Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 478-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__478_1>

QUESTIONS.

825. Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe et des bissectrices des angles formés au sommet opposé sont en ligne droite. (J.-J.-A. MATHIEU.)

826. Si n est un nombre entier quelconque, l'un des quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3 est divisible par 12, et le quotient marque le nombre des solutions différentes de l'équation indéterminée $x+y+z=n$, en nombres entiers et positifs dont aucun n'est nul.

(VACHETTE.)

827. Déterminer *géométriquement* les trajectoires orthogonales :

(*) Pour que ces deux circonferences se coupent, il faut, toutefois, qu'on ait

$$\begin{aligned} &R.O'O'' < R'\,OO'' + R''.OO', \\ &R'\,OO'' < R.O'O'' + R''.OO', \\ &R''\,OO' < R\,O'O'' + R'.OO'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le produit du rayon de chacune des trois circonferences donnees, par la distance du centre des deux autres, doit être moindre que la somme des deux autres produits analogues.

Quand ces conditions sont remplies, le nombre des solutions est illimite.

1° De toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens;

2° De toutes les paraboles ayant même sommet et même axe. (LAISANT.)

828. Déterminer *géométriquement* un cercle qui coupe sous des angles donnés α, β, γ trois cercles A, B, C, donnés sur un même plan. Nombre des solutions.

829. On donne dans un plan une ellipse et une circonférence (O) concentriques. Une seconde circonférence (O′) roule sans glisser sur la première. On demande le lieu des points d'intersection des tangentes communes à la circonférence (O′) et à l'ellipse.

(E. DEMAN.)

830. On donne dans un plan deux circonférences (O) et (O′). Un point P se meut sur la première (O); l'enveloppe des polaires de ce point par rapport à la circonférence O′ est une conique. Trouver le lieu du centre de cette conique lorsque le centre de la circonférence O′ se meut sur une circonférence O″ concentrique à la première (O). (E. DEMAN.)

831. Soient α, β, γ, δ, ε cinq quantités quelconques. Posons

$$A = (\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$B = (\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$C = (\alpha-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2,$$
$$D = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2,$$
$$E = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2;$$
$$\Pi = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2 \times (\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2,$$
$$P = \sum (\alpha-\beta)^4(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2.$$

Démontrer la relation suivante :

$$\text{ABCDE} - 2\text{P}^2 = 24\,\Pi.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

832. Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, son paramètre est égal au diamètre d'un cercle inscrit au triangle, multiplié par le produit des sinus des angles formés par le cercle avec les droites qui joignent l'un des foyers de la conique aux sommets du triangle.

(H. FAURE.)

833. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation

$$x^3 - px + q = 0,$$

on aura

$$p^2 + 3y'a^2 = r'^2, \quad p^2 + 3y''b^2 = r''^2, \quad p^2 + 3y''c^2 = r'''^2;$$

y', y'', y''' et r', r'', r''' étant racines entières de deux équations cubiques que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de p et q. Le produit $r'r''r'''$, pris positivement, sera un carré. (S. RÉALIS.)

834. Si a et b sont les deux axes d'une ellipse; R, R_1 les rayons de deux cercles osculateurs; d la distance de leurs centres; p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles, on a la relation

$$2dp = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(\text{R}_1^{\frac{2}{3}} - \text{R}^{\frac{2}{3}}\right).$$

(L. PAINVIN.)

835. Une sphère et un plan étant donnés, démontrer que toutes les sphères décrites des différents points du plan comme centres, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par un point fixe, et déterminer ce point.

(Vittorio SANNDI.)