NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GABRIEL LIPPMANN

Lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 496-497

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__496_1>

LIEU DES FOYERS DES CONIQUES TANGENTES A QUATRE DROITES DONNÉES;

SOLUTION DE M. GABRIEL LIPPMANN,
Élève du lycée Napoléon.

Soient

$$a = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$b = x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0,$$
$$c = x\cos\gamma + y\sin\gamma - p'' = 0,$$
$$d = x\cos\delta + y\sin\delta - p''' = 0,$$

les équations des quatre droites données.

En considérant x, y comme les coordonnées de l'un des deux foyers d'une conique tangente à ces droites, les expressions a, b, c, d représenteront les distances de ce foyer aux quatre droites dont il s'agit. Et, en nommant a_1, b_1, c_1, d_1 les valeurs que prennent a, b, c, d lorsque l'on remplace x, y par les coordonnées x_1, y_1 du second foyer de la conique, on aura, d'après une proposition connue,

$$aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1 = \text{const.}$$

D'où

$$a(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p) = b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p'),$$
$$b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p') = c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p''),$$
$$c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p'') = d(x_1\cos\delta + y_1\sin\delta - p''').$$

L'élimination de x_1, y_1 entre ces trois dernières équations donne

$$\begin{vmatrix} a\cos\alpha - b\cos\beta, & a\sin\alpha - b\sin\beta, & -ap + bp' \\ b\cos\beta - c\cos\gamma, & b\sin\beta - c\sin\gamma, & -bp' + cp'' \\ c\cos\gamma - d\cos\delta, & c\sin\gamma - d\sin\delta, & -cp'' + dp''' \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant ce déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} &p\,a[bc\sin(\gamma-\beta) + cd\sin(\delta-\gamma) + db\sin(\beta-\delta)] \\ -&p'\,b[cd\sin(\delta-\gamma) + da\sin(\alpha-\delta) + ac\sin(\gamma-\alpha)] \\ +&p''c[da\sin(\alpha-\delta) + ab\sin(\beta-\alpha) + bd\sin(\delta-\beta)] \\ -&p'''d[ab\sin(\beta-\alpha) + bc\sin(\gamma-\beta) + ca\sin(\alpha-\gamma)] = 0, \end{aligned}$$

ce qui est l'équation du lieu cherché.