NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Note sur le nombre e

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 541-551

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__541_1>

NOTE SUR LE NOMBRE e;

PAR M. S. REALIS.

§ I.

1. Posons

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Puisque la série qu'on vient d'écrire est convergente quel que soit x, on aura évidemment pour toutes les valeurs positives de cette variable (et l'on prouverait qu'il en est de même à l'égard des valeurs négatives) :

$$(1) \qquad 1 + x < \varphi(x) < 1 + x\varphi(x).$$

C'est en nous basant sur ces relations d'inégalité que nous allons parvenir à sommer la série $\varphi(x)$.

Nous aurons, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1,

$$1 + x < \varphi(x) < (1 - x)^{-1}.$$

Mettons ce résultat sous la forme

$$1 + \frac{1}{m} < \varphi\left(\frac{1}{m}\right) < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1},$$

d'où, puisque m est positif,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m},$$

et faisons croître m indéfiniment. Les deux expressions entre lesquelles est comprise $\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$ se rapprocheront indéfiniment l'une de l'autre, et, à la limite, les trois expressions coïncideront ensemble. Nous pourrons donc écrire

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

en désignant par e la valeur numérique finie de $\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$, pour $m = \infty$, laquelle se trouve parfaitement déterminée d'après cette formule et se développe dans la série convergente

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Je crois pouvoir omettre à ce sujet des explications qui rentrent dans les procédés usuels de l'enseignement.

Faisant ensuite, dans les inégalités ci-dessus, $m = \frac{p}{z}$, $z < p$, nous obtiendrons

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p < \left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p < \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-p}.$$

Il suit de là que si p augmente indéfiniment, z restant fixe, on aura à la limite

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p = \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-p}, \quad \text{pour} \quad p = \infty;$$

ou, puisque alors $\left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p = \left\{\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m\right\}^z = e^z$:

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = e^z = \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-r}, \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On constaterait maintenant, d'après un procédé connu, que

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

La série du second membre n'est autre que celle d'où l'on est parti, dans laquelle on a remplacé x par z ; nous conclurons donc de là

$$\varphi(z) = e^z,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\varphi(x) = e^x,$$

et nous aurons

$$(2) \qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir.

Si l'on fût parti de la formule

$$1 - x < [\varphi(x)]^{-1} < (1 + x)^{-1},$$

qui se déduit également de (1) pour les valeurs de x positives, on eût obtenu de la même manière

$$[\varphi(x)]^{-1} = e^{-x} = \varphi(-x),$$

et, par suite,

$$1 - x < e^{-x} < 1 - xe^{-x},$$

ce qui généralise le résultat ci-dessus. Cette dernière formule, du reste, se conclut directement de la formule (2), en multipliant celle-ci par la quantité positive e^{-x}, et transposant.

Parmi les différentes manières de remonter de la série $\varphi(x)$ à l'équation

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x,$$

la marche que nous avons suivie a cela de particulier qu'elle nous fait retrouver en même temps l'origine de la série, c'est-à-dire les expressions

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p, \quad \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$$

dont $\varphi(x)$ est la limite commune lorsque p devient infini.

2. En résumé, e désignant la somme de la série numérique

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

on a les formules suivantes :

$$(2) \qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x,$$

$$(3) \qquad 1 + x < e^x < (1 - x)^{-1},$$

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < e^x < \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p},$$

$$(5) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

dont la première n'avait peut-être pas encore été remarquée.

Les inégalités (2) s'étendent à toutes les valeurs réelles de x qui ne sont pas nulles. Plus cette variable converge vers zéro à partir d'une valeur donnée quelconque, plus les quantités séparées par les signes d'inégalité se rapprochent l'une de l'autre. A la limite, on a des relations d'égalité.

Les inégalités (3) ont lieu pour toutes les valeurs négatives de x, et pour les valeurs positives qui ne dépassent pas l'unité.

Enfin, les inégalités (4) ont lieu pour toutes les valeurs de x réelles et différentes de zéro, sous les conditions de p positif et de $x^2 < p^2$.

Quant à l'équation (5), qui détermine le nombre e, et constitue un théorème fondamental en analyse, on doit la considérer comme tout à fait générale, puisque la série du second membre reste convergente pour toute valeur réelle, ou imaginaire, de x.

Il est facile de voir que le nombre e, ainsi déterminé, est le seul qui satisfait constamment à l'une quelconque des formules (2), (3), (4), où l'on fait varier x d'une manière continue à partir de zéro. Cela résulte de ce que, pour tout nombre h différent de e, on peut déterminer p de manière que la quantité h^x se trouve en dehors des limites entre lesquelles est renfermé e^x, d'après la formule (4).

Mais on aura, en posant

$$e^x = h^z,$$

et prenant les logarithmes dans le système dont la base est e,

$$x = z \log h,$$

et, par suite,

$$1 + z \log h < h^z < 1 + zh^z \log h,$$

pour tout nombre positif h.

Cette formule, où z peut varier d'une manière quelconque sans passer par zéro, convient au nombre h à l'exclusion de tout autre nombre, comme la formule (2) à l'égard du nombre e.

3. Nous avons supposé d'avance

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots,$$

ce qui établit qu'il existe effectivement une fonction qui vérifie la double inégalité (1) dans toute l'étendue des valeurs positives de x, et qui finit par fournir des relations d'égalité lorsque x, en décroissant, finit par devenir nul. Mais, on a pu voir que la considération de ce développement n'était pas nécessaire pour la détermination de φ. La formule (1), posée comme une condition à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue φ lorsqu'on y fait croître la variable depuis zéro jusqu'à l'infini, suffit en effet, à elle seule, pour reproduire le développement et amener (indirectement, si l'on veut) la solution

$$e^x = \varphi(x)$$

qui s'étend à toutes les valeurs réelles de x.

On peut ajouter, à ce sujet, que si l'on se propose de satisfaire aux inégalités (1) en ne faisant varier x que de zéro à une limite donnée, il peut y avoir des solutions autres que celle considérée qui conviennent à la question.

Que l'on prenne, par exemple,

$$\psi(x) = \frac{2 + x}{2 - x},$$

et l'on aura également

$$\psi(0) = 1,$$

et

$$1 + x < \psi(x) < 1 + x\psi(x),$$

pour toutes les valeurs négatives de x, et pour les valeurs positives moindres que 2. On prouverait sans peine que $\psi(x)$ est une quantité plus grande ou plus petite que e^x, selon que x est ou n'est pas compris entre o et 2.

Il resterait à examiner si la fonction $\varphi(x) = e^x$ est la seule qui vérifie la formule (1) pour toute valeur réelle de x, en donnant $\varphi(0) = 1$. C'est sur quoi je reviendrai ailleurs, pour ne pas m'écarter en ce moment de l'objet principal du présent article.

4. Il importe d'observer que la double inégalité (2) peut s'énoncer au moyen de la seule inégalité

$$1 + x < e^x \tag{6}$$

considérée par rapport aux valeurs positives et aux valeurs négatives de x; considérée, dis-je, par rapport aux deux étendues distinctes séparées par la valeur $x = 0$.

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier l'inégalité

$$1 - x < e^{-x}$$

par e^x, ce qui donne, en transposant,

$$e^x < 1 + xe^x.$$

Ainsi, la double inégalité (2), où il suffit de considérer les valeurs de x de même signe, représente les deux relations distinctes qu'exprime la formule (6) selon qu'on y fait varier x de o à $+\infty$, ou de o à $-\infty$. On ne saurait effectivement considérer ces relations comme n'en formant qu'une, dès qu'il y a une solution de continuité dans les valeurs de la variable qui vérifient la formule (6). C'est ce qui se voit mieux sur la formule (4) déjà considérée, et qui est une conséquence de (6). Cette formule exprime bien manifestement deux relations distinctes, puisqu'elle fournit deux limites entre lesquelles est comprise la valeur de e^x. Mais, et c'est là le fait capital, il suffit de l'une quelconque de ces deux relations, posée *à priori* comme une condition à laquelle doit satisfaire le nombre inconnu e, pour en déduire aussitôt la série exponentielle et la détermination de e.

Ajoutons ici que la relation (6) avait été remarquée par Cauchy, qui la démontre à l'aide de la série exponentielle et la désigne comme un *théorème duquel on peut deduire des conséquences importantes.*

Mais, ce qui résulte en particulier des considérations qui précèdent, c'est : 1° que la formule (6) équivaut à deux relations essentiellement distinctes, selon le sens dans lequel on y fait varier x, relations qui sont représentées d'une manière générale par la formule (2); 2° que, dans quelque sens qu'on y fasse varier x, la formule (6) exprime une propriété caractéristique n'appartenant qu'au nombre e, et servant par conséquent à le définir.

La double inégalité (2) exprime donc un théorème qui a lieu à l'égard du nombre e défini par l'une quelconque des deux inégalités successives qu'elle renferme. On en dira autant de chacune des doubles inégalités (3) et (4) du n° 2.

L'équation (5) a de même une double portée, en ce qu'elle renferme à la fois la définition

$$e = \varphi(1),$$

et le théorème

$$[\varphi(1)]^x = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ représentant toujours la série qui nous a servi plus haut de point de départ.

Les théorèmes énoncés par les formules (2), (3), (4), (5) sont équivalents, car ces formules, considérées en elles-mêmes, sont des conséquences de l'une quelconque d'entre elles, ou, en d'autres termes, elles se déduisent circulairement l'une de l'autre.

3. On est encore amené à la considération du nombre e de la manière suivante, qui peut être regardée comme une simplification du procédé développé par Cauchy dans ses *Résumés analytiques* (Turin, 1833, p. 52) :

Posons l'inégalité

$$1 - \frac{1}{m^2} < 1.$$

Nous en déduirons successivement, pour les valeurs de m plus grandes que l'unité,

$$1 + \frac{1}{m} < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m},$$

et enfin

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

en nommant e la limite commune vers laquelle tendent les deux membres de la dernière inégalité lorsque m tend vers l'infini.

Cette marche, plus simple et plus naturelle que la précédente, est aussi plus conforme à celle qui est adoptée dans l'enseignement. On passerait ensuite, comme dans le n° 1, à la limite commune des expressions

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p, \quad \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p},$$

et de là à la sommation de la série exponentielle.

Tout cela peut se baser, comme on sait, sur la formule du binôme démontrée pour un exposant entier et positif. Je me dispense, je le répète, d'entrer à ce sujet dans des détails et des développements très-essentiels, sans doute, mais qui sont du domaine de l'enseignement courant et peuvent être suppléés par le lecteur. Je ferai observer cependant que la marche indiquée devient bien plus rapide et plus régulière si les expressions dont on cherche la limite sont développées directement au moyen de la formule du binôme étendue à un exposant quelconque, ou même seulement à un exposant négatif et entier. Les séries qu'on obtient ainsi étant toutes convergentes, leur emploi ne saurait donner lieu à objections. On sait d'ailleurs que la formule en question s'établit par des moyens parfaitement admissibles dans les éléments de l'analyse algébrique.

6. Je remarquerai encore, en terminant ce paragraphe, que la double inégalité (2) peut être présentée sous la forme plus symétrique

$$(7) \qquad (b - a)\, e^a < e^b - e^a < (b - a)\, e^b,$$

où a et b désignent deux nombres réels quelconques.

Faisant, dans cette dernière formule, $b - a = x$, et divisant tous les termes par e^a, on en tire effectivement la formule (2). Et, en divisant tous les termes de (7) par e^b, on en tire encore la formule (2), avec changement de x en $-x$. Ainsi, la formule (7) considérée relativement à toutes les valeurs inégales de a et b revient précisément à la formule (2) considérée relativement à toutes les valeurs de x différentes de zéro. Dans le cas spécial de $a = b$, ou $x = 0$, ces formules se réduisent à des égalités. Elles sont donc équivalentes dans toute leur étendue.

On a de même, pour tout nombre positif h,

$$(b - a)\, h^a \log h < h^b - h^a < (b - a)\, h^b \log h,$$

les logarithmes étant pris dans le système dont la base est e; ce qui revient à une formule démontrée précédemment.