NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Propriétés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__57_1>

PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE A DEUX CERCLES;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Le quadrilatère circonscriptible à deux cercles est un trapèze étoilé, qui est inscriptible dans le cercle construit sur la distance des centres comme diamètre.

Soient O, O′ les centres des deux cercles, R, R′ leurs rayons, et D la distance des centres.

Représentons par a chaque côté transversal du quadrilatère, tangent intérieurement aux deux cercles, et par b chaque côté tangent extérieurement à ces cercles; désignons de plus par x, y les deux diagonales du quadrilatère : elles sont perpendiculaires à la ligne des centres et interceptent sur cette ligne un segment que nous appellerons d.

Indiquons enfin par 2α, 2β les angles compris entre les côtés opposés du quadrilatère, exprimés les uns par a et les autres par b.

2. Nous avons de suite

$$d = a\cos\alpha = b\cos\beta, \tag{I}$$

$$\mathrm{D}\sin\alpha = \mathrm{R}+\mathrm{R}', \quad \mathrm{D}\sin\beta = \mathrm{R}-\mathrm{R}'. \tag{II}$$

La relation (I) exprime que :

Les côtés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles sont inversement proportionnels aux cosinus de leurs inclinaisons sur la ligne des centres.

Et les égalités (II) donnent

$$(1) \qquad \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \frac{4RR'}{D^2}.$$

3. Le point de concours I des deux tangentes intérieures et celui E des deux tangentes extérieures divisent la distance des centres $OO' = D$ en parties harmoniques dans le rapport de R à R'; si donc des points I, E nous abaissons les perpendiculaires p, q sur les tangentes qui n'y passent point, et que nous appelions P, Q les pieds de ces perpendiculaires, les points P, E, situés sur b, diviseront harmoniquement, dans le même rapport, l'intervalle $D\cos\beta$ compris entre les points de contact du côté b; et les points I, Q partageront harmoniquement, dans le même rapport de R à R', la distance $D\cos\alpha$ qui sépare les points de contact du côté a. D'après cela, il est aisé de voir qu'on a la proportion

$$\frac{R-p}{p-R'} = \frac{R}{R'},$$

d'où l'on tire

$$(\text{III}) \qquad p = \frac{2RR'}{R+R'} = \frac{2RR'}{D\sin\alpha}.$$

On trouverait de même

$$(\text{IV}) \qquad q = \frac{2RR'}{R-R'} = \frac{2RR'}{D\sin\beta}.$$

4. Désignons par a' et a'' les deux segments que détermine le point I sur le côté a; la perpendiculaire p forme

avec les deux tangentes intérieures et le côté b deux triangles rectangles qui donnent

$$p = a' \sin(\alpha - \beta) = a'' \sin(a + \beta),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a' + a''}{p} = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2 \sin\alpha \cos\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta},$$

ou, en ayant égard à (1) et (III),

$$a = \frac{2\cos\beta \times p \sin\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = 2\cos\beta \times \frac{2RR'}{D} \times \frac{D^2}{4RR'}.$$

On a donc

$$\text{(V)} \qquad a = D\cos\beta, \quad b = D\cos\alpha.$$

Ainsi, *dans le quadrilatère circonscriptible à deux cercles, chaque côté est égal à la distance des centres projetée sur l'autre côté* (côté adjacent).

Ou encore :

Chaque côté est égal à la distance qui sépare les points de contact situés sur l'autre côté.

5. Dans les expressions (V), mettons à la place de $\cos\beta$, $\cos\alpha$ leurs valeurs tirées des équations (II), et élevons au carré, nous trouvons pour les *carrés des côtés*

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} a^2 = (D + R - R')(D + R' - R), \\ b^2 = (D + R + R')(D - R - R'). \end{cases}$$

6. Les égalités (I) et (V) donnent les relations remarquables

$$\text{(VII)} \qquad d = D\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\text{(VIII)} \qquad ab = Dd,$$

dont la dernière exprime que :

1° *Le produit des côtés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles est égal à la distance des centres multipliée par la distance des diagonales;*

2° *Le produit des deux tangentes, l'une intérieure et l'autre extérieure, est égal à la distance des centres multipliée par la distance des cordes qui joignent les points de concours des tangentes.*

7. Par l'égalité (VIII), on a de suite

$$(\text{IX})\quad d^2 = \frac{(\text{D}+\text{R}+\text{R}')(\text{D}+\text{R}-\text{R}')(\text{D}+\text{R}'-\text{R})(\text{D}-\text{R}-\text{R}')}{\text{D}^2}.$$

8. Passons aux diagonales. Le quadrilatère considéré comme convexe étant inscriptible, nous avons

$$a \times a = xy + b \times b,$$

d'où

$$(\text{X})\qquad xy = a^2 - b^2.$$

Donc *le produit des diagonales est égal à la différence des carrés des côtés adjacents.*

9. Les relations (VI) donnent

$$a^2 - b^2 = \text{D}^2 - (\text{R} - \text{R}')^2 - \text{D}^2 + (\text{R} + \text{R}')^2 = 4\text{RR}',$$

de sorte que

$$(\text{XI})\qquad xy = 4\text{RR}',$$

c'est-à-dire que :

Le produit des diagonales est égal au produit des diamètres des deux cercles.

10. Par les deux extrémités de la droite qui joint les points de concours des tangentes dans le cercle O′, menons des parallèles à la ligne des centres jusqu'à la rencontre

de la droite qui joint les points de concours des tangentes dans le cercle O; nous formons deux triangles rectangles qui donnent

$$(2)\qquad x+y=2a\sin\alpha,\quad x-y=2b\sin\beta,$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\sin\alpha + b\sin\beta,\\ y &= a\sin\alpha - b\sin\beta,\end{aligned}\right.$$

et, en ayant égard aux valeurs (II) et (VI),

$$(\text{XII})\qquad \left\{\begin{aligned} x = {} & \frac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)}\\ & +\frac{R-R'}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')},\\ y = {} & \frac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)}\\ & +\frac{R'-R}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')};\end{aligned}\right.$$

telles sont les *valeurs des deux diagonales*.

11. Si nous introduisons les valeurs (VI) dans les égalités (2), nous obtenons

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x+y &= 2D\sin\alpha\cos\beta,\\ x-y &= 2D\sin\beta\cos\alpha,\end{aligned}\right.$$

qui donnent

$$(\text{XIII})\qquad x=D\sin(\alpha+\beta),\quad y=D\sin(\alpha-\beta);$$

d'où

$$(\text{XIV})\qquad \frac{x}{y}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

et par suite,

$$(\text{XV})\qquad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{4RR'\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},\\ y^2 &= \frac{4RR'\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.\end{aligned}\right.$$

12. Des relations (4) on tire encore

$$\text{(XVI)} \qquad \frac{x+y}{x-y} = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta},$$

qui démontre que :

Dans tout quadrilatère circonscriptible à deux cercles, la somme des deux diagonales est à leur différence comme la tangente du demi-angle des côtés intérieurs est à la tangente du demi-angle des côtés extérieurs.

13. Les mêmes relations (4) donnent aussi

$$x^2 - y^2 = 4 D^2 \cos\alpha \cos\beta \times \sin\alpha \sin\beta = 4 D d \sin\alpha \sin\beta.$$

Or par (II) on a

$$4 R^2 - 4 R'^2 = 4 D^2 \sin\alpha \sin\beta;$$

il vient donc, en divisant,

$$\text{(XVII)} \qquad \frac{x^2 - y^2}{4 R^2 - 4 R'^2} = \frac{d}{D}.$$

Ainsi *la différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des diamètres comme la distance des diagonales est à la distance des centres.*

14. Élevons au carré la seconde des égalités (4), nous obtenons

$$x^2 + y^2 = 2xy + 4 D^2 \sin^2\beta \cos^2\alpha.$$

Substituons les valeurs fournies par (XI) et (II) et nous trouvons, pour la *somme des carrés des diagonales*,

$$\text{(XVIII)} \quad x^2 + y^2 = 4 R^2 (D^2 + R'^2 - R^2) + 4 R'^2 (D^2 + R^2 - R'^2);$$

d'où, en vertu de (XI),

$$\text{(XIX)} \quad \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{R}{R'} (D^2 + R'^2 - R^2) + \frac{R}{R'} (D^2 + R^2 - R'^2).$$