Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 128-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__128_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 816, 817 *et* 819

(voir 2e série, t. VI, p. 334) ;

PAR M. N. GELSKI,
Élève externe de l'École des Mines.

816. *En supposant répartie le long d'une spirale logarithmique une densité proportionnelle à la courbure, le centre de gravité d'un arc quelconque s'obtient en joignant le pôle au point de contact de cet arc avec la tangente parallèle à la corde, et portant sur ce rayon vecteur une longueur égale au rapport de cette corde à l'angle des rayons extrêmes.*

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soit

$$r = e^{a\theta}$$

l'équation de la spirale.

La masse de l'arc $M_0 M_1$ sera

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ds\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = \theta_1 - \theta_0.$$

En appelant ξ et η les coordonnées du centre de gravité, et $y_1 = r_1 \sin\theta_1$, $x_1 = r_1\cos\theta_1$, $y_0 = r_0 \sin\theta_0$, $x_0 = r_0\cos\theta_0$ les coordonnées des points extrêmes M_1 et M_0, on trouve, pour les moments des masses par rapport aux axes θx et θy,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} r\sin\theta\, d\theta = (\theta_1 - \theta_0)\eta, \quad \int_{\theta_0}^{\theta_1} r\cos\theta\, d\theta = (\theta_1 - \theta_0)\xi.$$

En effectuant l'intégration par parties

$$(\theta_1 - \theta_0)\eta = \frac{a}{1+a^2}(y_1 - y_0) - \frac{1}{1+a^2}(x_1 - x_0),$$

$$(\theta_1 - \theta_0)\xi = \frac{a}{1+a^2}(x_1 - x_0) + \frac{1}{1+a^2}(y_1 - y_0).$$

En divisant membre à membre ces deux équations, et remarquant que $a = \operatorname{tang}\mu$, μ étant l'angle constant formé par la normale avec le rayon vecteur, et en appelant θ l'angle formé par le rayon vecteur contenant le centre de gravité, et φ l'angle formé par la corde M_0M_1 avec la partie positive de l'axe θx,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\operatorname{tang}\mu . \operatorname{tang}\varphi - 1}{\operatorname{tang}\mu + \operatorname{tang}\varphi} = - \frac{1}{\operatorname{tang}(\mu + \varphi)},$$

d'où

$$\theta = \mu + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on mène la tangente parallèle à la corde M_0M_1, le point M, où elle touche l'arc M_0M_1, se trouve sur le rayon vecteur qui forme avec l'axe polaire l'angle précédemment trouvé. Donc la première partie du problème se trouve démontrée.

Élevant à présent au carré et ajoutant

$$(\theta_1 - \theta_0)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2},$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\cos\mu \times \text{corde } M_0M_1}{\theta_1 - \theta_0},$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité au foyer est égale au rapport de la corde à l'angle des rayons extrêmes multiplié par le *facteur constant* $\cos\mu$.

Note. — Cette question a été résolue à peu près de la même manière par MM. Pelet, élève du lycée de Nîmes, et L. Bignon, de Lima.

817. *Si l'on considère de même une cycloïde dont la densité soit proportionnelle à la courbure, et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc se trouve sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de son milieu qui est une quatrième proportionnelle au rayon du cercle générateur et aux deux segments que la tangente au point extrême détermine sur l'abscisse de ce point comptée à partir du sommet de la tangente.*

Pour la cycloïde entière, le centre de gravité de la courbure se trouve, d'après cela, au milieu de la hauteur.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

En appelant θ l'angle formé par une normale quelconque à la cycloïde avec son axe, on a, pour l'expression de la masse de l'arc M_0M_1 symétrique par rapport au sommet s de cette courbe,

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} ds\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = 2\theta_1.$$

Le centre de gravité, qui, par suite de la symétrie, se trouve sur l'axe de la courbe, sera complétement déterminé si l'on connaît l'ordonnée η comptée à partir de la base de la courbe.

Les moments des masses de l'arc M_0M_1 par rapport à cette base sont

$$2\theta_1\eta = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta\, 2a\cos^2\theta = 2a\theta_1 + a\sin 2\theta_1,$$

d'où

$$\eta = \frac{(2a\theta_1 + a\sin 2\theta_1)a}{2a\theta_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Car a est le rayon du cercle générateur;

$2a\theta_1 + a\sin 2\theta_1$ est l'abscisse du point extrême M_1 comptée sur la tangente au sommet et à partir de ce point;

$2a\theta_1$ est le segment détaché sur cette abscisse par la tangente en M_1.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = a$, c'est-à-dire que le centre de gravité de la cycloïde entière se trouve au milieu de la hauteur.

Note. — Solution analogue de M. Bignon, de Lima.

819. *Si la densité de la chaînette varie en raison inverse de la hauteur au-dessus de la directrice, le centre de gravité d'un arc quelconque compté à partir du sommet a pour abscisse la moitié de l'abscisse extrême, et pour ordonnée la hauteur du rectangle qui aurait la même aire et la même base horizontale que la courbe et que l'on sait facilement construire.*

(Haton de la Goupillière.)

Nous avons, pour l'expression de la masse d'un arc compté à partir du sommet,

$$\int_0^{x_1} ds\,\frac{1}{y} = \frac{1}{a}\int_0^{x_1} dx = \frac{x_1}{a}.$$

Pour les moments par rapport aux axes θx et θy; en appelant ξ et η les coordonnées du centre de gravité et θ l'inclinaison de la tangente, on a

$$\frac{x_1}{a}\,\xi = \int_0^{x_1} ds\,\frac{1}{y}\,x = \frac{1}{a}\int_0^{x_1} x\,dx = \frac{x_1^2}{2a};$$

d'où

$$\xi = \frac{1}{2}x_1,$$

$$\frac{x_1}{a}\,\eta = \int_0^{x_1} ds\,\frac{1}{y}\,y = a\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = a\tang\theta_1,$$

d'où

$$\eta = \frac{a^2 \tan \theta_1}{x_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Or l'aire correspondante de la courbe est

$$\int_0^{x_1} y\,dx = a^2 \tan \theta_1.$$

Note. — Solution analogue de M. Bignon, de Lima.

Question 827

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 479) ;

PAR M. A. LEMAITRE,
Maître répétiteur au lycée impérial de Besançon.

Déterminer géométriquement les trajectoires orthogonales :

1° *De toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens ;*

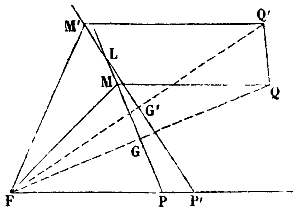
2° *De toutes les paraboles ayant même sommet et même axe.* (LAISANT.)

1° En chaque point de la courbe cherchée, la tangente normale à la parabole correspondante divise en deux parties égales l'angle d'une parallèle à une direction fixe, celle de l'axe avec le rayon vecteur allant du point de contact à un point fixe, le foyer.

Cette propriété, qui est celle de la parabole ayant pour foyer le point fixe, pour axe l'axe donné, et passant par le point considéré, conduit quand on l'exprime analytiquement à l'équation tangentielle de cette courbe.

Mais nous allons prouver géométriquement que cette propriété ne convient qu'à la parabole.

Soient F le foyer donné, FP l'axe, M et M′ deux points infiniment voisins de la courbe. Menons FM, FM′ et les



parallèles à l'axe MQ, M′Q′. Les bissectrices MP, M′P′ des angles FMQ, FM′Q′ sont les tangentes à la courbe aux points M et M′. Leur point commun est L, et P et P′ leurs intersections avec l'axe.

Remarquons qu'à cause des parallèles FP et MQ et de la bissectrice MP, les trois angles PMQ, PMF et MPF sont égaux. Par suite, le triangle FMP est isocèle.

Il en est de même du triangle FM′P′.

Menons maintenant du sommet F de ces triangles les perpendiculaires FG, FG′ sur leurs bases qu'elles partagent en deux parties égales en G et G′. Ces droites vont couper les droites MQ, M′Q′ aux points Q et Q′ symétriques du point F par rapport aux droites MP et MP′. Joignons QQ′ et comparons les deux triangles LPP′, FQQ′.

Les deux angles en L et en F sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires.

Or on a dans les triangles MGF, M′G′F

$$\frac{FG}{MG} = \frac{FQ}{MP} = \operatorname{tang} FMP, \quad \frac{FG'}{M'G'} = \frac{FQ'}{M'P'} = \operatorname{tang} FM'P'.$$

Mais à la limite, le point L, point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines, tend vers le point de contact M. Les angles FMP, FM′P′ tendent vers l'égalité, et par suite leurs tangentes. On a donc à la limite

$$\frac{FQ}{MP} = \frac{F'Q'}{M'P'},$$

et les triangles MPP′, FQQ′ tendent à être semblables à la limite, comme ayant un angle égal compris entre côtés qui tendent à être proportionnels, les deux premiers côtés d'un des triangles étant perpendiculaires aux côtés correspondants de l'autre. Il en est de même pour les troisièmes côtés. Donc QQ′ tend à être perpendiculaire à l'axe FP. Le lieu du point Q est donc tel que pour passer de sa position à la position voisine, il se meut sur une perpendiculaire à la droite AP. Son lieu géométrique est donc cette perpendiculaire.

Mais alors le point M étant également distant de QQ′ et de F, son lieu est la parabole qui a le point F comme foyer, et la droite QQ′ comme directrice.

Remarque. — Ce raisonnement suppose que MP n'est pas nul, c'est-à-dire que M n'est pas sur l'axe. Mais s'il y est, une de nos paraboles y passe, qui coupe normalement la ligne double AP, parabole limite dont la directrice passe au foyer F. De plus la droite AP répond elle-même à la question, et elle coupe les paraboles données en leurs sommets.

2° Soient S le sommet donné, SX l'axe donné, M un point du lieu, MT, MN la tangente et la normale à la parabole, et par suite la normale et la tangente à la courbe cherchée, et enfin MP l'ordonnée perpendiculaire à SX (*).

D'après une propriété connue de la parabole, on a

$$TP = 2SP.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

La tangente de l'angle MNS, supplément de l'angle MNX $= \theta'$, est égale à la tangente de l'angle TMP qui est $\frac{TP}{MP} = \frac{2SP}{MP}$. On a donc

$$\tang\theta' = -\frac{2SP}{MP}.$$

La tangente de l'angle MSX $= \theta$ est

$$\tang\theta = \frac{MP}{SP},$$

et en faisant le produit

$$(1) \qquad \tang\theta \tang\theta' = -2.$$

Considérons une ellipse ayant pour centre le point S, pour axe l'axe Sx, et une perpendiculaire menée par S, et dont l'équation rapportée à ses axes soit

$$(2) \qquad y^2 + 2x^2 = c.$$

On pourra déterminer c de façon que l'ellipse passe par le point M, et alors elle serait tangente à la droite MN, car la relation (1) existe pour un point quelconque de cette ellipse, entre le coefficient angulaire $\tang\theta$ de son diamètre et le coefficient angulaire $\tang\theta'$ de la tangente à son extrémité.

Cette ellipse satisfait donc à la question. J'ajoute qu'une autre courbe ne peut y satisfaire.

Car, d'après ce que nous venons de voir, cette courbe au point M aurait un élément commun avec l'ellipse S dont nous avons parlé.

L'élément suivant serait commun à la courbe et à une autre ellipse aussi représentée par l'équation (2), c ayant une valeur c' différente de la première. Mais toutes les ellipses représentées par l'équation (2) sont concentriques et homothétiques, et par suite, si voisines qu'elles soient, n'ont aucun point commun. Il faut donc ou que deux éléments consécutifs n'aient pas de point commun, ce qu'on ne comprend pas dans une courbe continue, ou que les deux éléments se trouvent sur une même ellipse; et comme il en serait de même pour l'élément suivant, et ainsi de suite, il en résulte que l'ellipse S est la seule courbe qui réponde à la question pour le point M (*).

Note. — Ont résolu la même question : MM. Édouard Besson, étudiant en droit; Napoléon Porte, élève au lycée de Grenoble.