NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Note sur le nombre e

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 16-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__16_1>

NOTE SUR LE NOMBRE e

(voir 2e série, t. VI, p. 541) ;

PAR M. S. REALIS.

§ II.

1. Reprenons la formule

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p < e^x < \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p},$$

où

$$p>0,\ p^2>x^2,$$

et

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

Nous en déduirons, en changeant x en $-x$, et ajoutant membre à membre,

$$(1)\quad \left(1+\frac{x}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x}{p}\right)^p < 2\,\mathrm{Ch}\,x < \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p},$$

puis

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(1+\dfrac{x}{p}\right)^p+\left(1-\dfrac{x}{p}\right)^p = 2\,\mathrm{Ch}\,x \\ = \left(1-\dfrac{x}{p}\right)^{-p}+\left(1+\dfrac{x}{p}\right)^{-p} \end{array}\right\} \text{ pour } p=\infty,$$

en représentant par la notation $\mathrm{Ch}\,x$ la fonction

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Nous aurons également, lorsqu'on fait croître p au delà de toute valeur donnée,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(1+\dfrac{x}{p}\right)^p-\left(1-\dfrac{x}{p}\right)^p = 2\,\mathrm{Sh}\,x \\ = \left(1-\dfrac{x}{p}\right)^{-p}-\left(1+\dfrac{x}{p}\right)^{-p} \end{array}\right\} \text{ pour } p=\infty,$$

en désignant par $\mathrm{Sh}\,x$ la fonction

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.$$

Les fonctions $\mathrm{Ch}\,x$, $\mathrm{Sh}\,x$ sont appelées cosinus et sinus hyperboliques de x, parce que, en les regardant comme des coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires, elles appartiennent à l'hyperbole équilatère, courbe ayant de nombreuses analogies avec le cercle. On a, en effet,

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1,$$

équation de l'hyperbole et analogue à celle qui existe entre le cosinus et le sinus d'un arc de cercle. Mais, dans le cas actuel, x ne doit pas être considéré comme un arc de la courbe.

De même que la formule (1), la formule suivante

$$(4)\quad \left(1+\frac{x}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x}{p}\right)^p<2\,\mathrm{Sh}\,x<\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p}$$

a lieu pour $p > x > 0$, ainsi que cela se prouve en comparant les développements des trois membres en séries convergentes.

Ces résultats ramènent à des notions élémentaires et parfaitement explicites l'origine analytique des fonctions hyperboliques. On a, de plus, dans les formules (1) et (4), un moyen direct d'évaluer ces fonctions en nombres, en assignant en même temps le degré d'approximation qu'on atteint à chaque opération.

2. En se reportant à la formule (2) du § I, savoir

$$1+x<e^x<1+xe^x,$$

on aperçoit aussitôt des relations nouvelles et très-remarquables qui ont lieu à l'égard des fonctions hyperboliques.

Des expressions de $\mathrm{Ch}\,x$ et $\mathrm{Sh}\,x$ en fonction des exponentielles, on tire

$$e^x = \mathrm{Ch}\,x+\mathrm{Sh}\,x,$$
$$e^{-x} = \mathrm{Ch}\,x-\mathrm{Sh}\,x.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule citée nous fournit les relations suivantes

$$(5)\quad \begin{cases} 1+x<\mathrm{Ch}\,x+\mathrm{Sh}\,x<1+x(\mathrm{Ch}\,x+\mathrm{Sh}\,x), \\ 1-x<\mathrm{Ch}\,x-\mathrm{Sh}\,x<1-x(\mathrm{Ch}\,x-\mathrm{Sh}\,x), \end{cases}$$

qui subsistent pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et se réduisent à des égalités lorsque $x=0$.

Ces formules doivent être regardées comme fondamentales dans la théorie des sinus et cosinus hyperboliques, puisqu'elles expriment une propriété caractéristique du nombre e, duquel les fonctions mentionnées tirent leur origine.

On peut remarquer que les deux formules (5) rentrent l'une dans l'autre si l'on y joint les relations

$$\mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\,x, \quad \mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\,x.$$

Nous inscrivons encore les formules

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 < \mathrm{Ch}\,x < 1 + x\,\mathrm{Sh}\,x, \\ x < \mathrm{Sh}\,x < x\,\mathrm{Ch}\,x, \end{array} \right.$$

qu'il y aura occasion de rappeler plus loin. La première se tire des inégalités (5) par voie d'addition; l'autre se vérifie à l'aide des séries convergentes écrites plus haut, et suppose x positif.

3. Nous allons étendre maintenant à des valeurs imaginaires de la variable les résultats obtenus au n° 1 pour les valeurs réelles. A cet effet, nous changerons x en $x\sqrt{-1}$ dans les équations (2) et (3); nous serons amenés par là à considérer les expressions symboliques

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

qui se développent respectivement dans les séries réelles et convergentes

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et que nous représenterons par les notations abrégées $\cos x$, $\sin x$. Nous dirons, d'après cela, que $\cos x$ est la limite commune vers laquelle tendent les expressions

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{1}\right)^p}{2},$$

$$\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{2}$$

lorsque p tend vers l'infini, et que $\sin x$ est, dans le même cas, la limite commune des expressions

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p}{2\sqrt{-1}},$$

$$\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si p a une valeur finie, mais positive et plus grande numériquement que x, les quantités $\cos x$, $\sin x$ seront toujours comprises entre les expressions indiquées. Mais il est remarquable que les inégalités (1) et (4) se trouveront renversées par suite du changement de x en $x\sqrt{-1}$; c'est-à-dire qu'il faut poser

$$\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p$$
$$>2\cos x>\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p};$$

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p}{\sqrt{-1}}$$
$$>2\sin x>\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{\sqrt{-1}},$$

en faisant attention que x doit être positif dans la deuxième de ces formules. Cela se prouve par la comparaison des développements en séries convergentes, ce dont on laissera le soin au lecteur.

Ces résultats ne sont vrais, remarquons-le bien, que parce que les imaginaires s'entre-détruisent dans chacune des expressions considérées; il n'y aurait, en effet, aucun sens à attacher à des formules telles que

$$A + B\sqrt{-1} > 2\cos x,$$

$$\lim \frac{A' + B'\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 2\sin x,$$

si l'on n'avait pas, par identité, $B = 0$, $A' = 0$.

4. D'après la définition que nous en avons donnée, les fonctions $\cos x$, $\sin x$ résultent liées entre elles par la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

et fournissent les valeurs particulières $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Elles peuvent donc être représentées par les abscisses et les ordonnées rectangles d'un cercle ayant l'unité pour rayon, et l'on aperçoit déjà l'analogie de ces fonctions avec le cosinus et le sinus trigonométriques de l'arc x. Cette analogie ne cesse pas de subsister si l'on applique les expressions du n° 3 à la reconstruction des formules trigonométriques relatives à l'addition et soustraction des arcs, à leur multiplication, etc. (on peut voir, à ce sujet, la note C à la fin du *Complément des éléments d'Algèbre*, de Lacroix). Mais il n'y a pas seulement analogie, il y a identité. On reconnaît effectivement, dans les séries écrites au n° 3, les développements qui s'obtiennent pour les fonctions trigonométriques $\cos x$, $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre. Rappelons d'ailleurs qu'il y a moyen de remonter directement des séries mentionnées, considérées en elle-mêmes, aux fonctions trigonométriques dont elles sont le développement (*).

Nous ferons remarquer, d'après cela, que les relations (6) obtenues plus haut entre les coordonnées de l'hyperbole trouvent leurs analogues en Trigonométrie dans les quatre inégalités suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} 1 > \cos x > 1 - x\sin x, \\ x > \sin x > x\cos x. \end{cases}$$

Ces relations (7), où nous supposerons que l'arc x varie d'une manière continue à partir de zéro, subsistent ensemble pour tous les arcs pris dans le premier quadrant, auquel cas x, $\cos x$, $\sin x$ sont positifs. Elles subsistent encore ensemble lorsque x dépasse le premier quadrant, en restant inférieur à une certaine quantité comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et en ce cas $\cos x$ est négatif. Du reste, à l'exception de la deuxième inégalité que le lecteur démontrera facilement, les formules (7) n'expriment que des relations connues.

Il vient, en les additionnant,

$$1 + x > \cos x + \sin x > 1 + x(\cos x - \sin x),$$

résultat qui a lieu pour les valeurs de x indiquées, et qui a pareillement son corrélatif dans les fonctions hyperboliques.

5. On peut se demander si la formule fondamentale

$$(8)\qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x$$

continue d'avoir lieu d'une manière générale lorsque la variable devient imaginaire.

(*) *Annales de Gergonne*, t. XV, p. 384 (Ampère). — *Analyse algébrique* de Cauchy, chap. IX. — *Nouvelles Annales*, 1^re^ série, t. V, p. 608 (Lemonnier).

Pour répondre à cette question, il nous faut auparavant expliquer dans quel sens doit être entendue l'introduction des imaginaires dans une formule qui n'exprime pas une égalité.

Ainsi qu'il a été dit (3), on ne saurait attacher de sens à des relations d'inégalité établies *à priori* entre des expressions en partie réelles et en partie imaginaires. De ce qu'on a, entre quantités réelles, $A + B > A' + B'$, il serait absurde d'en conclure une relation entre

$$A + B\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad A' + B'\sqrt{-1}.$$

Rien ne s'oppose cependant à ce qu'on écrive

$$A + B\sqrt{-1} > A' + B'\sqrt{-1},$$

quand il nous sera prouvé que $A > A'$, $B = B'$. Mais ces dernières relations ne seront pas entraînées par la première; celle-ci, je le répète, n'aurait aucun sens si elle était posée indépendammeut des deux autres.

Cela admis, remplaçons x par $x + y\sqrt{-1}$ dans la formule (8), et faisons attention que

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

La double inégalité prendra la forme

$$\begin{aligned} 1 + x + y\sqrt{-1} &< e^x \cos y + e^x\sqrt{-1}\sin y \\ &< 1 + xe^x\cos y - ye^x\sin y + e^x(x\sin y + y\cos y)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et l'on pourra la regarder comme une conséquence des relations simultanées

$$\begin{gathered} 1 + x < e^x\cos y < 1 + e^x(x\cos y - y\sin y), \\ y = e^x\sin y = e^x(x\sin y + y\cos y), \end{gathered}$$

données *à priori* entre les quantités réelles x, y.

Or, d'après la nature des fonctions e^x, $\cos y$, $\sin y$, ces relations ne sauraient subsister ensemble pour toutes les valeurs de x qu'en supposant $y = 0$, et elles ne subsisteront ensemble d'aucune façon pour y quelconque. Donc la formule (8) n'a lieu d'une manière générale que pour les valeurs réelles de la variable.

6. Si l'on convient d'écrire

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1} > \mathrm{A}' + \mathrm{B}'\sqrt{-1}$$

lorsqu'on a $\mathrm{A} > \mathrm{A}'$, $\mathrm{B} > \mathrm{B}'$, les formules (7) peuvent être présentées sous une forme remarquable qu'il est à propos de signaler.

Posons, d'après cette convention,

$$1 + x\sqrt{-1} > \cos x + \sqrt{-1}\sin x > 1 - x\sin x + x\sqrt{-1}\cos x,$$

ce qui n'exprimera autre chose, sinon que ces relations ont lieu séparément entre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ pour toutes les valeurs de x auxquelles s'étend le système (7).

Remplaçons maintenant $\cos x$ et $\sin x$ par leur expressions en fonction des exponentielles imaginaires; il nous viendra

$$1 + x\sqrt{-1} > e^{x\sqrt{-1}} > 1 + x\sqrt{-1}\,e^{x\sqrt{-1}}.$$

Ce résultat singulier revient, comme on voit, à la formule (8), dans laquelle on a renversé le sens des inégalités, et remplacé x par $x\sqrt{-1}$; mais, encore une fois, il ne faut voir là qu'une manière abrégée d'énoncer des relations existantes entre des quantités réelles. En ce sens, la formule qui vient d'être écrite, et où nous supposons que x varie d'une manière continue à partir de zéro, embrasse toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $\alpha\pi$, α désignant un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et satisfaifaisant à l'équation.

$$\cos \alpha\pi = 1 - \alpha\pi \sin \alpha\pi.$$

Je n'insisterai pas davantage ici sur ce sujet.

7. Les analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires, en tant que résultant de la comparaison d'équations, ont été étudiées à différentes reprises par les géomètres (*), et il n'y a pas lieu de s'en occuper ici. Mais le sujet n'est pas épuisé, et les développements qui précèdent n'en présenteront pas moins quelque intérêt, surtout au point de vue de l'enseignement. D'abord, ils complètent en quelque sorte les notions qui se rapportent à l'origine analytique de ces quantités. Ils établissent, entre le cercle et l'hyperbole équilatère, de nouvelles analogies fondées sur un genre de relations qui n'avait pas encore été étudié. C'est enfin, d'après les formules posées, qu'on en vient à assigner un sens clair et explicite à la représentation symbolique des fonctions trigonométriques par les exponentielles imaginaires.

(*La suite prochainement.*)