LÉON DYRION

Note sur les courbes considérées comme enveloppes d'une droite

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 176-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__176_1>

NOTE SUR LES COURBES CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES D'UNE DROITE ;

PAR M. LÉON DYRION.

α étant un paramètre variable, la droite représentée par l'équation

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - \varphi(\alpha) = 0$$

enveloppe une courbe C; je vais exposer une manière simple de déterminer le rayon de courbure en chaque point de cette courbe.

On sait, par la méthode générale des courbes enveloppes, que le point générateur de la courbe C est l'intersection de la droite (1) par une autre droite dont l'équation est

$$(2) \qquad -x\sin\alpha + y\cos\alpha - \varphi'(\alpha) = 0.$$

Or cette seconde droite est perpendiculaire sur la première et, par suite, est la normale de la courbe C;

La droite (2) enveloppe à son tour une courbe C′ qui est la développée de C ; et la normale de cette développée est représentée par l'équation

$$(3) \qquad -x\cos\alpha - y\sin\alpha - \varphi''(\alpha) = 0,$$

et, comme on le sait d'avance, cette normale est parallèle à la tangente correspondante de la courbe C.

Cela posé, la distance normale entre les droites (1) et (3) mesure évidemment le rayon de courbure de la courbe C au point où cette courbe touche la droite (1); donc ce rayon de courbure a pour mesure

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha).$$

Ainsi donc : *En chaque point* (α) *de la courbe qu'enveloppe la droite mobile*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \varphi(\alpha) = 0,$$

le rayon de courbure est exprimé par

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha).$$

On en conclut immédiatement que l'expression

$$\varphi'(\alpha) + \varphi'''(\alpha)$$

mesure le rayon de courbure de la développée C; et ainsi de suite.

Remarquons, en second lieu, que les expressions

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - \varphi(\alpha), \quad -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha - \varphi'(\alpha)$$

mesurent les distances d'un même point (x_1, y_1) à la tangente et à la normale de la courbe C; donc

La distance d'un point quelconque à la normale de la courbe C *est la dérivée par rapport à* α *de la distance du même point à la tangente de la même courbe.*

En troisième lieu, le rayon de courbure

$$R = \varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha)$$

est, à une constante près, la longueur de l'arc de la courbe C'; or cette expression de R peut être considérée, à une constante près, comme la quantité

$$\int \varphi'(\alpha) \,.\, d\alpha + \frac{d.\varphi'(\alpha)}{d\alpha},$$

ce qui nous conduit à la règle suivante :

Pour rectifier un arc de courbe, exprimez en fonction de α la distance de la tangente à un point quelconque ; intégrez, puis différentiez par rapport à α; et faites la somme, en choisissant convenablement les limites de l'intégrale.

Nous allons montrer comment les trois propositions que nous venons de démontrer font retrouver simplement certaines propriétés déjà connues :

1° La distance de l'origine à la droite (1) est donnée par la formule

$$OP = \varphi(\alpha),$$

et la distance de la même origine à la droite (2) est

$$OP' = \varphi'(\alpha).$$

Or, d'après les formules connues, cela nous apprend que OP' est la sous-normale, en coordonnées polaires, du lieu du point P; d'où nous concluons ce théorème connu (Bertrand, *Calcul différentiel*) : *La normale en chaque point de la podaire d'une courbe* C *passe par la projection du pôle sur la normale de la courbe* C; de là nous concluons en particulier : *Si l'on projette un foyer d'une conique sur la tangente et sur la normale d'un même point de la courbe, la droite qui joint les deux projections passe par le centre de la conique.*

2° Dans le cas où la courbe C est une cycloïde, et où l'origine O est un des points de rebroussement, on trouve facilement

$$OP = \varphi(\alpha) = 2a \,.\, \sin\alpha - 2a\alpha\cos\alpha,$$

en désignant par a le rayon du cercle générateur; et l'on en conclut

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 4a . \sin\alpha,$$

ce qui exprime le théorème connu sur le rayon de courbure de la cycloïde.

3° S'il s'agit de la lemniscate représentée par l'équation

$$\rho^2 = a^2 . \cos 2\omega,$$

on trouve facilement que

$$\alpha = 3\omega,$$

que par suite

$$\varphi(\alpha) = a . \left(\cos\frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = \frac{a^2}{3\rho}.$$

4° Si une droite de longueur constante se meut dans un angle droit, son équation est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - l\cos\alpha . \sin\alpha = 0,$$

et par conséquent

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 3 . \varphi(\alpha)$$

est le triple de la distance du sommet de l'angle droit à la ligne mobile. Si l'on formait l'équation de la normale

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - \varphi'(\alpha) = 0,$$

on pourrait dans ce cas l'écrire

$$-(x - l\sin\alpha)\sin\alpha + (y - l\cos\alpha)\cos\alpha = 0,$$

ce qui permettrait de vérifier le théorème connu relatif au centre instantané de rotation.

Nous allons maintenant indiquer quelques autres conséquences de notre procédé général :

1° Si la droite mobile est représentée par

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \mathrm{A} \,.\, \alpha^m,$$

et plus généralement si $\varphi(\alpha)$ est une fonction entière et d'ordre m de α, la dérivée du $m^{ième}$ ordre $\varphi^m(\alpha)$ sera une simple constante; et par conséquent la droite mobile enveloppera la $m^{ième}$ développante d'un cercle;

2° Si $\varphi(\alpha) = \mathrm{A} \,.\, e^{\alpha}$, toutes les dérivées successives de $\varphi(\alpha)$ seront égales, et par conséquent le rayon de courbure de la courbe enveloppe aura la même longueur que celui d'une quelconque de ses développées successives. On trouvera d'ailleurs facilement que cette courbe enveloppe est représentée en coordonnées cartésiennes par

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{A} \,.\, e^{\alpha}, \quad \alpha = \text{arc tang} \frac{y - x}{y + x},$$

ce qui donne

$$\left(\text{en posant : arc tang} \frac{y}{x} = \omega, \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho\right)$$

$$\rho = \mathrm{A} \sqrt{2} \,.\, e^{\omega + \frac{n}{4}}.$$

Cette courbe est donc la spirale logarithmique.