NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Sur la détermination graphique des axes principaux des courbes et des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 352-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__352_1>

SUR LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES AXES PRINCIPAUX DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. Paul SERRET.

Extrait d'un ouvrage inedit (*).

I. *Étant donnés trois points* A, B, C *et le centre* O *d'une conique,* les *directions des axes principaux* de la courbe se peuvent déterminer *à priori* de la manière suivante.

Prenant les points milieux A′, B′, C′ des côtés du triangle ABC, et le point de concours H′ des hauteurs du triangle résultant A′B′C′, on mène la droite OH′, et l'on détermine le point de concours F des *symétriques* de cette droite par rapport à deux quelconques des côtés du triangle A′B′C′. Les bissectrices de l'angle

$$\widehat{OH', OF}$$

fournissent les directions cherchées.

II. De même, *étant donnés le centre* O *d'une conique*

(*) *Géométrie de Direction* (sous presse); Gauthier-Villars, éditeur.

et l'un de ses triangles conjugués ABC, si l'on détermine le point de concours H des hauteurs de ce triangle, et que, menant la droite OH, on construise le point de concours F des symétriques de cette droite par rapport à deux quelconques des côtés du triangle ABC : les *axes principaux* de la courbe seront dirigés suivant les bissectrices de l'angle

$$\widehat{OH, OF}.$$

Observation. — Les rayons menés, du point O, aux sommets du triangle, et les parallèles à ses côtés, issues du même point, font trois couples de diamètres conjugués de la courbe, ou trois couples de rayons conjugués d'un faisceau en involution. Deux de ces couples suffisent d'ailleurs pour définir ce faisceau dont les rayons conjugués, perpendiculaires entre eux, fourniront ensuite les axes que l'on cherche : et telle est la solution normale du problème. Celle que l'on vient de donner, assez irrégulière au point de vue de la démonstration, offre pourtant un exemple de ce que devraient être la plupart des constructions, et ce qu'elles sont si rarement; c'est-à-dire dégagées de tout superflu et capables de tirer, des seules données de la figure, toutes les lignes nécessaires à la détermination de l'inconnue. Le principe que nous y avons employé se retrouvera d'ailleurs dans le problème suivant, qui est un peu moins facile, et dont on ne connaît encore qu'un très-petit nombre de solutions.

III. Problème. — *Construire les directions des axes principaux d'un ellipsoïde défini par trois diamètres conjugués oa, ob, oc.*

1. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

l'équation de la surface rapportée aux diamètres donnés; et

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} & m(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)^2 + n(\beta x + \beta' y + \beta'' z)^2 \\ & \qquad\qquad + p(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)^2 = 1 \\ & \text{ou} \qquad m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2 = 1 \end{aligned}\right.$$

l'équation de la même surface rapportée à trois plans diamétraux conjugués quelconques

$$\mathrm{ABC} = 0.$$

Quels que soient ces derniers, comme le terme indépendant des variables est le même dans les deux équations (1), (1'), leurs premiers membres doivent être identiques. On a donc identiquement

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \equiv m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2,$$

et les équations

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$(2')\qquad m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2 = 0$$

représentent une seule et même surface : un cône *fixe*, réel ou imaginaire ; asymptote à la surface proposée, si celle-ci est un hyperboloïde, et dont la trace sur un plan déterminé quelconque est une *conique fixe*

$$(3)\qquad m\mathrm{A}'^2 + n\mathrm{B}'^2 + p\mathrm{C}'^2 = 0,$$

conjuguée à chacun des triangles A' B' C' qui résultent de la section, par le plan que l'on aura choisi, de trois plans diamétraux conjugués de la surface primitive.

Or, si l'on considère, en particulier, la trace du cône (2) ou (2') sur l'un des plans tangents

$$z = c$$

de la surface, la conique résultante est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0,$$

ou

$$(3') \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Si d'ailleurs on coupe la surface proposée (1) par le plan diamétral parallèle

$$z=0,$$

la section résultante est

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Les courbes (3′) et (4) forment donc l'un de ces systèmes de *deux coniques* que l'on nomme *conjuguées*, parce que, transportées dans un même plan et autour du même centre, les diamètres réels de l'une servent de mesure aux diamètres imaginaires de même direction dans l'autre. Et l'on peut énoncer ce théorème :

Les traces, sur un même plan tangent d'une surface du second ordre, *de trois diamètres conjugués quelconques de la surface sont les sommets d'autant de* triangles conjugués *à une même conique ayant pour centre le point de contact du plan tangent considéré*, *égale en outre et homothétique à la* conique conjuguée *de la section déterminée dans la surface par le plan diamétral parallèle*.

2. La proposition réciproque est également vraie : les diamètres menés du centre de l'ellipsoïde aux sommets de l'un quelconque des triangles conjugués à la courbe précédente font toujours trois diamètres conjugués de la surface.

3. En particulier, *les traces* de trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, ou d'un hyperboloïde à deux nappes, *sur le plan tangent mené par l'un des ombilics, sont les sommets d'autant de triangles* conjugués à un même cercle *et dont les trois hauteurs se croisent en cet ombilic.*

On sait que les questions relatives aux figures à trois dimensions se peuvent traiter de deux manières différentes : soit dans l'espace même où ces figures sont tracées; soit, dans le plan, par une réduction préalable de la question en une autre où n'interviennent plus que deux des trois dimensions de l'étendue. Le théorème que l'on vient d'établir réalise cette réduction du problème *solide* en un problème *plan*, pour la plupart des questions relatives aux diamètres conjugués des surfaces du second ordre.

4. Revenons à notre problème; et soient oa, ob, oc ou a, b, c les trois diamètres conjugués, réels ou imaginaires, qui définissent la surface. Dans le plan tangent de cette dernière pour le point c, et autour de ce point comme centre, imaginons la courbe C

$$(C) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

égale et homothétique à la conique conjugée de la section diamétrale parallèle. Et soient A′, B′, C′ les traces, sur le même plan, des axes principaux de la surface.

D'après le théorème précédent, le *triangle principal* A′B′C′ est conjugué à la courbe C. Et il résulte, de l'orthogonalité des axes OA′, OB′, OC′, que le point de concours des hauteurs de ce triangle coïncide avec le pied H de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en c; le carré de cette perpendiculaire OH mesurant, au signe près, la *puissance* du point H *par rap-*

port au triangle A′B′C′,

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}'}.\overrightarrow{\mathrm{H}a'} = -\overline{\mathrm{OH}}^2.$$

On pourrait s'arrêter là, et le problème que l'on s'était proposé serait implicitement résolu. On sait effectivement que le centre du cercle conjugué à un triangle A′B′C′ est au point de rencontre H des hauteurs de ce triangle, le carré du rayon de ce cercle étant mesuré par la puissance de ce point par rapport au triangle :

$$r^2 = \overrightarrow{\mathrm{HA}'}.\overrightarrow{\mathrm{H}a'}.$$

On connaît donc ici le centre H et le rayon

$$r = \sqrt{\overline{\mathrm{HA}'}.\overline{\mathrm{H}a'}} = \sqrt{-\overline{\mathrm{OH}}^2} = \mathrm{OH}\sqrt{-1}$$

du cercle conjugué au triangle principal A′B′C′; et celui-ci n'est autre que le *triangle conjugué* commun *à la conique* C *et à un cercle imaginaire* donné de centre et de rayon.

5. Mais la solution effective du problème suppose la détermination effective de ce triangle. Pour y parvenir, nous remarquerons d'abord que le produit

$$\mathrm{HA}'.\mathrm{H}a' = -\overline{\mathrm{OH}}^2$$

mesure aussi la demi-puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle A′B′C′,

$$\frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{HA}'}.\overline{\mathrm{H}a''} = -\overline{\mathrm{OH}}^2 \text{ (*)}.$$

(*) L'une quelconque des hauteurs $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{H}a'}$ d'un triangle étant prolongée jusqu'au cercle circonscrit suivant $\overline{a'a''}$, on a

$$\overline{\mathrm{H}a'} = \overline{a'a''},\quad \overline{\mathrm{H}a'} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{H}a''};$$

$$\mathrm{HA}'.\mathrm{H}a' = \frac{1}{2}\,\mathrm{HA}'.\mathrm{H}a''.$$

On connaît donc, en premier lieu, le point de concours H *des hauteurs du triangle principal* A′B′C′, et la *puissance*

$$(1) \qquad \overline{\mathrm{HA}'}.\overline{\mathrm{H}a''} = -2\overline{\mathrm{OH}}^2$$

de ce point par rapport au cercle circonscrit à ce triangle.

6. Observant ensuite que la position, dans un plan déterminé, d'un triangle quelconque, dépend de six paramètres; de trois seulement, si ce triangle doit être conjugué à une conique C; d'un seul paramètre, enfin, si ses trois hauteurs doivent, en outre, concourir en un point donné H : on verra qu'il existe, dans le plan tangent actuel, une série déterminée comprenant une infinité de triangles, conjugués à la courbe C, comme le triangle principal; assujettis, comme celui-là, à avoir, dans le point H, le point de concours de leurs hauteurs; inscrits dès lors et circonscrits, en même temps que ce triangle, à deux courbes déterminées. De là ce problème incident :

Trouver la commune trajectoire des sommets, et la commune enveloppe des côtés d'un triangle A′B′C′ *dont les trois hauteurs se croisent en un point donné* H, *et qui demeure conjugué à une conique fixe* C.

La première de ces courbes se détermine bien aisément. Et comme la droite menée du point H (α, β) à l'un quelconque des sommets (x, y) du triangle mobile doit être perpendiculaire au côté opposé, ou à la polaire même $\left(\frac{x\mathrm{X}}{a^2} + \frac{y\mathrm{Y}}{b^2} = -1\right)$ de ce sommet par rapport à la courbe C, on a, dans la condition résultante

$$\frac{-b^2x}{a^2y}\,\frac{y-\beta}{x-\alpha} = -1 \;(*),$$

(*) On suppose ici, et l'on supposera jusqu'à la fin, les diamètres a, b perpendiculaires entre eux, ce qui revient au fond à substituer, à l'aide l'équation même de la courbe parcourue par chacun des sommets du triangle mobile : une hyperbole équilatère

$$(\text{II}) \qquad (a^2 - b^2)xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0$$

passant par le point donné H, par le centre c de la conique C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes principaux de cette dernière ; identique, en un mot, comme on le devait prévoir, à l'hyperbole qui contient les pieds des normales menées, du point H, à cette conique.

Comme tous les triangles de la série actuelle, *le triangle principal* A'B'C' *sera donc inscrit à l'hyperbole* (II). Mais on peut ajouter que le *cercle circonscrit à ce triangle rencontrera cette hyperbole suivant un quatrième point* que l'on peut construire, et qui n'est autre que le *point* H', diamétralement opposé au point H *dans l'hyperbole ;* propriété commune d'ailleurs aux cercles analogues pour tous les triangles de la série.

Il résulte, en effet, d'un théorème connu, que le *cercle des neuf points* d'un triangle quelconque A'B'C', inscrit à une hyperbole équilatère, contient le centre ω de la courbe. Et comme trois de ces neuf points sont les points milieux a, b, c des segments HA', HB', HC', on voit, en doublant les rayons vecteurs menés de l'origine H aux quatre points a, b, c et ω de ce cercle, que les quatre points A', B', C' et H' résultant de cette duplication seront encore sur un même cercle : circonscrit au triangle A'B'C' et passant par le point H', diamétralement opposé au point H par rapport au centre ω de l'hyperbole. Comme le point H (*), le point H' appartient donc à l'hyperbole (II).

---

d'une construction connue, aux diamètres conjugués $2a$, $2b$ de la section diamétrale $z = 0$, les axes mêmes de cette section.

(*) C'est une propriété connue du triangle inscrit à une hyperbole équilatère que le point de concours des hauteurs appartient à la courbe.

La même conclusion résulterait aussi du calcul.

On trouve, effectivement, que le point de concours des hauteurs et les sommets 1, 2, 3 d'un triangle inscrit à l'hyperbole équilatère

$$(h) \qquad xy = 1,$$

ont leurs abscisses liées par la relation

$$(k) \qquad x_1 x_2 x_3 x_H = -1.$$

Formant ensuite l'équation *aux abscisses de rencontre* de l'hyperbole (h) et du cercle (1, 2, 3)

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

on trouve

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2Ax + 2\frac{B}{x} + C = 0$$

ou

$$x^4 + 2Ax^3 + Cx^2 + 2Bx + 1 = 0;$$

et l'on en déduit

$$(k') \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = +1.$$

Or les relations (k), (k') entraînent l'égalité

$$x_4 = -x_H$$

ou la conclusion que le quatrième point de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'un cercle circonscrits à un même triangle, est le point diamétralement opposé, dans l'hyperbole, au point de concours des hauteurs de ce triangle.

7. Passons maintenant à la commune enveloppe des côtés des triangles (A'B'C', H).

Tous ces triangles étant inscrits à l'hyperbole (H) et conjugués à la conique C, la courbe, enveloppe de leurs côtés, ou des polaires de leurs sommets par rapport à cette conique, n'est autre que la *polaire réciproque* de l'hyperbole par rapport à la directrice C : une conique aussi, comme cela résulte d'un théorème bien connu ; et, dans le cas actuel, une *parabole* P dont les éléments principaux peuvent être réunis indépendamment de tout calcul.

Comme l'hyperbole (II) passe, en effet, par le centre c de la conique directrice C; la polaire du centre c, par rapport à la directrice, ou la *droite à l'infini*, est tangente à la polaire réciproque que l'on cherche : et celle-ci est une parabole P.

Comme l'hyperbole (II) possède, en outre, un point à l'infini sur chacun des axes cx, cy de la directrice C; sa polaire réciproque, par rapport à cette dernière, est tangente à chacun des axes cy, cx dont le point de concours c appartient dès lors à la directrice de la parabole P.

Enfin, le point donné H, où se croisent les hauteurs d'une infinité de triangles A'B'C' circonscrits à cette parabole, est un second point de sa directrice $(\overline{cH})$; et la polaire hh' du point H, par rapport à la conique C, en est une seconde tangente.

On connaît donc la directrice cH et deux tangentes distinctes cx, hh' de la parabole enveloppe dont le foyer F se trouve dès lors au point de rencontre de deux droites que l'on sait construire (symétriques de la directrice par rapport à ces tangentes).

Or, tous les triangles (A'B'C', H) étant circonscrits à la parabole P, les cercles circonscrits à tous ces triangles passent d'eux-mêmes, comme l'on sait, et *le cercle circonscrit au triangle principal* A'B'C' *passe* également *par le foyer* F de cette parabole.

8. En résumé, l'on connaît deux points F, H' du cercle circonscrit au triangle principal A'B'C' (n^os 6 et 7), ainsi que la puissance du point H par rapport à ce cercle

(n° 5), formule (I); on peut donc en obtenir un troisième point situé sur l'une des droites HH′ ou HF.

Construisant ensuite le cercle déterminé par ces trois points et construisant de même l'hyperbole (II), ces deux courbes se coupent en quatre points : le premier, H′, qu'on laissera de côté, parce qu'il est indépendant de la situation du centre O de la surface sur la perpendiculaire menée du point H au plan tangent où se fait la construction; les trois autres, A′, B′, C′, qui répondent seuls au problème et déterminent les traces, sur ce plan, des axes principaux de la surface.

Le problème proposé se trouve donc résolu, et sa construction ramenée à celle des trois derniers points de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'un cercle auxquels leur définition même assigne un premier point commun (H′).

9. On aurait pu négliger la notion relative au point H′ et construire le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ d'après ces seules conditions : qu'il passe par le point F; que sa puissance par rapport au point H soit égale à un carré donné $\left(-2\overline{OH}^2\right)$, et sa puissance par rapport au centre c de la courbe C, à $-(a^2+b^2)$ (théorème Faure). Obtenue d'après cette dernière condition, la seconde trace de ce cercle sur la droite cF reproduirait justement le point H′ que l'on voulait négliger.

10. L'analyse précédente se peut résumer dans cette construction :

Les trois diamètres conjugués qui définissent la surface étant oa, ob, oc; dans le plan tangent mené par l'extrémité c de l'un de ces diamètres, et autour de ce point comme centre, on *imagine* la courbe C égale et homothétique à la conique conjuguée de la section diamétrale parallèle, et l'on *construit effectivement :*

1° L'hyperbole équilatère, lieu géométrique des pieds des normales menées à la courbe C par le pied H de la perpendiculaire abaissée, du centre O de la surface, sur le plan tangent considéré; et, dans cette hyperbole, le point H' diamétralement opposé au point H;

2° Le foyer F de la parabole polaire réciproque de l'hyperbole précédente par rapport à la courbe C.

Menant ensuite par les points F et H' un cercle dont la puissance par rapport au point H soit égale à $-2\overline{OH}^2$; les traces, sur le plan tangent considéré, des axes principaux de la surface se trouveront aux trois derniers points de rencontre de ce cercle et de l'hyperbole précédente.