Nouvelles annales de mathématiques

Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires ; d'après M. Lill

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 363-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__363_1>

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES QUI ONT DES RACINES IMAGINAIRES;

D'APRÈS M. LILL,
Capitaine du Génie autrichien.

Dans un précédent article (*), les *Nouvelles Annales* ont fait connaître un procédé graphique, aussi nouveau qu'élégant, dû à M. Lill, pour trouver les *racines réelles* d'une équation algébrique à coefficients réels. Rappelons brièvement en quoi il consiste.

Après avoir représenté conventionnellement l'équation donnée par un contour polygonal rectangulaire 0 1 2 3 4 5 (**) (*voir* la figure, p. 366), il suffit

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. VI, p. 359; *voir* aussi les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 854.

(**) On suppose ici et dans la figure que l'équation donnée est du quatrième degré; mais la méthode est générale. Quant à la manière de forde former d'autres contours rectangulaires, tels que $o a_1 b_1 c_1 5$, ayant les mêmes extrémités o et 5 que le contour primitif, s'appuyant par leurs sommets a_1, b_1, c_1 sur les côtés 1 2, 2 3, 3 4 de celui-ci, et par conséquent découpant dans son intérieur une série de triangles semblables successifs $o1a_1$, $a_1 2 b_1$, $b_1 3 c_1$, $c_1 45$. Dans chacun de ces *contours dérivés*, le rapport $\frac{1a_1}{o1}$ ou la tangente trigonométrique de l'angle $1oa_1$, est une racine réelle de l'équation.

M. Lill ajoute aujourd'hui (*) qu'une méthode analogue s'applique à la détermination des *racines imaginaires*. Il s'agit encore de former des contours rectilignes, tels que $oa'b'c'5$, ayant mêmes extrémités initiale et finale que le contour primitif, et donnant lieu aussi à des triangles successifs $o1a'$, $a'2b'$, $b'3c'$, $c'45$, tous semblables entre eux. Mais ces triangles et ces contours dérivés ne sont plus rectangulaires, et leurs sommets intermédiaires a', b', c' sont situés hors des côtés 1 2, 2 5, 3 4 du contour primitif, au lieu de tomber sur ces côtés mêmes.

Cela fait, si, du premier sommet a', on abaisse sur le côté 1 2 une perpendiculaire $a'\alpha$, et qu'on la prolonge, dans l'autre sens, d'une quantité égale $\alpha a''$, les rapports des *longueurs complexes*

$$1\alpha + \alpha a' \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 1\alpha - \alpha a'' \sqrt{-1}$$

au côté o1, ou ce que M. Lill appelle les *tangentes imaginaires* des angles $a'o1$, $a''o1$ sont deux racines imaginaires conjuguées de l'équation. Si l'équation donnée a

---

mer ce polygone, notamment de déterminer la direction mutuelle de ses côtés successifs, *voyez* l'article inséré aux *Comptes rendus*.

(*) La première communication que l'auteur m'a faite de ce supplément remonte à la date du 9 mars dernier. Diverses circonstances en ont, de son aveu, retardé la publication. (E. J.)

des coefficients imaginaires, le contour polygonal, qui la représente, n'est plus rectangulaire. Mais c'est encore en construisant, d'après les mêmes principes, une série de triangles semblables, qu'on parvient à la détermination des racines de l'équation.

Enfin M. Lill fait connaître qu'on peut éviter l'emploi des triangles scalènes, et n'employer, même pour la recherche des racines imaginaires, que des contours rectangulaires, comme pour les racines réelles, avec cette différence que leurs sommets ne s'appuient plus sur les côtés du contour primitif comme lorsqu'il s'agit des racines réelles. Nous ne donnerons pour le moment aucune autre indication sur ce sujet.

Pour bien fixer les idées, soit

$$x^4 - 6x^3 + 14{,}25\,x^2 - 15{,}75\,x + 6{,}5 = 0$$

l'équation proposée (c'est celle à laquelle la figure se rapporte; l'unité choisie pour échelle est le demi-centimètre).

On voit d'abord qu'on peut *inscrire* dans le contour primitif rectangulaire 012345 les deux contours dérivés rectangulaires $0a_1\,b_1\,c_1\,5$ et $0a_2\,b_2\,c_2\,5$. Ainsi l'équation a deux racines réelles, dont les valeurs sont

$$\frac{1a_1}{01} = \text{tang}\,10a_1 = 1$$

et

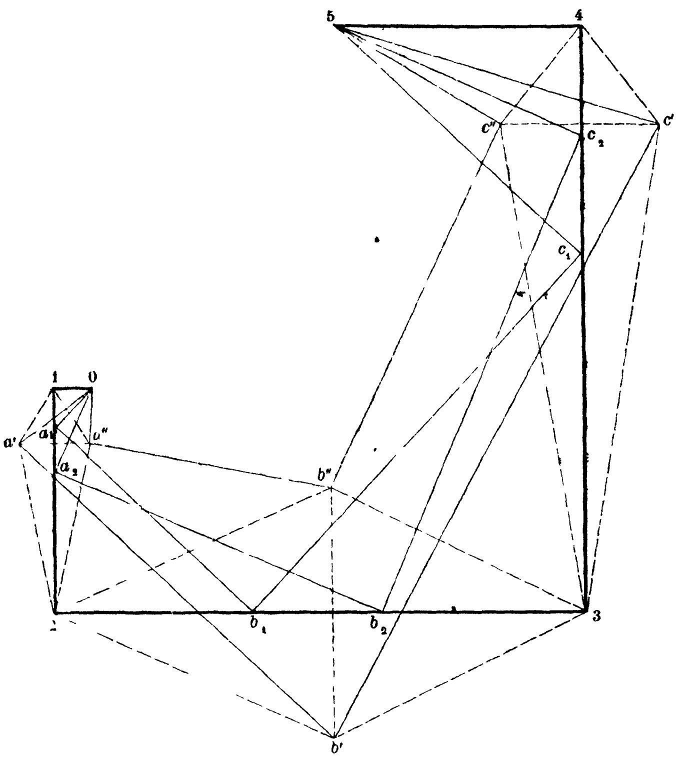
$$\frac{1a_2}{01} = \text{tang}\,10a_2 = 2.$$

On voit ensuite que les deux contours $0a'b'c'5$ et $0a''b''c''5$, qui aboutissent aux points 0 et 5, donnent lieu, respectivement, à la série de triangles semblables $01a'$, $a'2b'$, $b'3c'$, $c'45$ et $01a''$, $a''2b''$, $b''3c''$, $c''45$. On en conclut que les deux racines imaginaires ont pour valeurs

$$\frac{1\alpha + \alpha a' \sqrt{-1}}{01} = \text{tang imaginaire } a'01 = 1{,}5 + \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{1\alpha + \alpha a'' \sqrt{-1}}{01} = \text{tang imaginaire } a''01 = 1{,}5 - \sqrt{-1}.$$



Ce procédé, comparé à celui que M. Lill avait fait connaître précédemment, en est, comme on voit, la généralisation, faite conformément aux principes du calcul des *quantités complexes* ou *directives*; calcul bien connu aujourd'hui, grâce notamment aux récentes et savantes publications de MM. Hoüel et Transon (*).

Les lecteurs des *Nouvelles Annales* qui voudront bien se reporter à l'article précité des *Comptes rendus* n'auront pas de peine à trouver la démonstration du remarquable procédé de M. Lill.