E. BARBIER

Réciproque d'une proposition sur les coniques homothétiques qui ont le même centre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 433-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__433_0>

RÉCIPROQUE D'UNE PROPOSITION
Sur les coniques homothétiques qui ont le même centre;

PAR M. E. BARBIER.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 907.

1. *Si deux courbes sont telles, que toute sécante donne deux segments égaux, compris l'un et l'autre entre les deux courbes, les courbes ne sont autres que deux coniques homothétiques.* M. J. Bertrand, après avoir mis en évidence le défaut d'une prétendue démonstration de cette proposition, la démontra, dans le *Journal de M. Liouville,* dans le cas de deux courbes infiniment voisines; nous pouvons démontrer la proposition en général, comme on va le voir dans cette Note.

2. *Lemme.* — Si l'on peut démontrer qu'une courbe est telle, qu'en prenant à volonté deux points sur cette courbe, on puisse faire passer une conique doublement osculatrice à la courbe en ces deux points, la courbe ne peut être qu'une conique qui se confond avec toute conique doublement osculatrice qu'on lui mènerait.

Pour démontrer cette proposition, rappelons-nous : 1° que M. Bertrand a démontré que les coniques sont les seules courbes dont toutes les lignes diamétrales sont droites; 2° qu'il n'y a pas de courbe qui, en un point quelconque, ait avec la tangente au même point un contact d'ordre supérieur au premier.

Au milieu de la droite qui joint les points d'osculation de deux courbes doublement osculatrices, les lignes diamétrales conjuguées à la direction de la droite sont osculatrices; si l'une des deux courbes est une conique, on peut donc dire qu'au milieu de la ligne droite, qui joint les deux points d'osculation, la ligne diamétrale correspondante est une osculatrice à sa tangente.

Le lemme se démontre maintenant ainsi : La courbe dont il s'agit a des lignes diamétrales continuellement osculatrices à ses tangentes, c'est-à-dire des lignes droites diamétrales; en vertu de la proposition démontrée par M. Bertrand, la courbe, ayant des lignes droites pour lignes diamétrales conjuguées à une direction quelconque, ne peut être qu'une conique : le lemme s'ensuit.

3. Le lemme qui vient d'être posé nous permet de réduire la démonstration de notre proposition à la démonstration de celle-ci : Si deux courbes sont telles, que toute sécante donne deux segments égaux, compris l'un et l'autre entre les deux courbes, on peut mener une conique doublement osculatrice en deux points pris à volonté sur l'une des courbes.

Soient B et C deux points pris sur l'une des courbes : la corde BC *prolongée* coupe l'autre courbe aux points A et D, on a $AB = CD$. Nous pouvons considérer une première conique ayant deux points infiniment voisins du point B, communs avec la première courbe, et trois points infiniment voisins du point C, communs avec cette même courbe, puis faire passer par le point A une seconde conique concentrique et homothétique à la première; elle passera par le point D, à cause de $AB = CD$.

Une sécante faisant avec la ligne droite ABCD un angle infiniment petit du premier ordre donnerait, dans le système des deux courbes,

$$A'B' = C'D',$$

et dans le système des deux coniques,

$$A''B'' = C''D'',$$

d'où, par soustraction, l'équation

$$A'A'' - B'B'' = C'C'' - D'D'',$$

dans laquelle $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ sont des quantités infiniment petites.

Or, nous allons supposer qu'il n'y ait que deux points infiniment voisins réunis au point B et trois points réunis au point C, et réduire à l'impossible cette supposition; nous l'abandonnerons alors, et remarquant que nous pouvons astreindre notre première conique à ces cinq conditions, nous serons conduits à la supposition de l'énoncé, à savoir : que cette conique, déterminée par le contact et par l'osculation d'une courbe en des points donnés B et C, est, par cela même, doublement osculatrice à cette courbe.

4. Réduisons à l'absurde l'hypothèse d'un contact en A et d'une osculation en C, par le moyen de l'équation

$$A'A'' - B'B'' = C'C'' - D'D'',$$

où l'on peut supposer l'une des quantités nulles, en faisant passer la sécante $A'B'C'D'$ par l'un des points A, B, C, ou D :

1° Si $A'B'C'D'$ passe au point A, $A'A'' = 0$, et comme $C'C''$ est d'ordre supérieur à $B'B''$, on en conclut que $B'B''$ et $D'D''$ sont de même ordre et de même signe; il y a donc un simple contact en D comme en B, et le sens du contact est le même en ces deux points.

2° Si $A'B'C'D'$ passe au point D, on conclut que $A'A''$ et $B'B''$ sont de même ordre infinitésimal et de même signe, et, par suite, qu'en A, comme en B, il y a un simple contact, le sens du contact étant le même en ces deux points.

Notre hypothèse nous amène donc à affirmer hypothétiquement, qu'en A et en D la seconde conique est tangente à la seconde courbe, dans un même sens, qui est le même que le sens du contact de la première conique et de la première courbe au point B.

3° Si $A'B'C'D'$ passe au point B, nous devons admettre que $A'A''$ et $D'D''$ sont de signes contraires; les contacts en A et en D n'ont donc pas le même sens, ce qui contredit une conclusion précédente.

L'hypothèse d'un contact simple en B et d'une osculation en C ne se soutient pas; nous devons l'abandonner, ainsi que nous l'avons annoncé, pour adopter qu'en deux points pris sur la première courbe, il y a une conique doublement osculatrice à cette courbe; en vertu de notre lemme, cette première courbe n'est autre qu'une conique, et, par suite, la première courbe se confond avec une conique homothétique à la première.

5. Nous pouvons donc affirmer qu'il n'y a que la couche ellipsoïdale, considérée dans la question de l'attraction des ellipsoïdes, qui prenne deux segments égaux de toute sécante qui la traverse.

En effet, toutes les sections planes pourraient être soumises à notre démonstration, et l'on sait, d'ailleurs, qu'il n'y a que les surfaces du second degré dont toutes les sections planes soient des coniques.

6. Pour terminer, nous indiquerons la démonstration qu'on peut donner de cette proposition : Il n'y a que les coniques dont toutes les lignes diamétrales soient droites.

En effet, dans une courbe, on peut inscrire une ligne brisée ABCDEFGHI..., dont les côtés soient alternativement parallèles à deux directions données; cette construction donnera autant de points que l'on voudra, et ces points seront aussi voisins que l'on voudra, si l'angle des deux directions est infiniment petit; or, il est facile de montrer que la conique déterminée par les cinq points A, B, C, D, E passe par les points obtenus en continuant la construction; donc la courbe n'est autre qu'une conique.