LUIS FERNANDEZ Y PASALAGUA

Question de licence. Faculté des sciences de Paris, 7 juillet 1868

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 453-455

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__453_1>

QUESTION DE LICENCE.

Faculté des Sciences de Paris, 7 juillet 1868.

SOLUTION DE M. LUIS FERNANDEZ Y PASALAGUA.

Déterminer tous les conoïdes droits tels, qu'en chacun de leurs points les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires. On indiquera ensuite comment varie, sur les surfaces obtenues, la valeur absolue du rayon de courbure commun aux deux sections principales, quand on se déplace sur l'une des génératrices.

L'équation qui donne les rayons de courbure des deux sections principales d'une surface quelconque est, comme on sait,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(rt-s^2)\rho^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\\ \quad\times[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\rho+(1+p^2+q^2)^2=0.\end{array}\right.$$

Les deux racines de cette équation devant être égales et de signes contraires,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]=0.$$

Négligeant la solution $1 + p^2 + q^2 = 0$, qui donne, comme on sait, des surfaces imaginaires, il reste

$$(2) \qquad (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

D'autre part, l'équation générale des conoïdes droits est, en prenant la directrice pour axe des z et le plan directeur pour plan des xy,

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On en déduit, par l'élimination de la fonction arbitraire,

$$(3) \qquad px + qy = 0.$$

Différentions cette équation successivement par rapport à x et par rapport à y :

$$(4) \qquad rx + p + sy = 0,$$

$$(5) \qquad ty + q + sx = 0.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$(6) \qquad (rq - ps)x + (sq - pt)y = 0.$$

L'équation (2) se réduit alors, en tenant compte de l'équation (3) et de l'équation (6), à

$$(7) \qquad r + t = 0.$$

Des équations (4) et (5) on tire encore

$$r = -\frac{p + sy}{x}, \quad t = -\frac{q + sx}{y};$$

donc

$$rt - s^2 = \frac{(p + sy)(q + sx)}{xy} - s^2 = \frac{pq}{xy},$$

et l'équation (1) se réduit alors à

$$(8) \qquad pq\rho^2 + xy(1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Prenons maintenant $\frac{y}{x}$ pour variable indépendante, et appelons-la u :

$$\frac{y}{x} = u, \quad p = -\frac{dz}{du}\frac{y}{x^2}, \quad q = \frac{dz}{du}\frac{1}{x},$$

$$r = \frac{d^2z}{du^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}\frac{dz}{du}, \quad t = \frac{d^2z}{du^2}\frac{1}{x^2}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (7) et (8) ; elles deviennent alors

$$(9) \qquad \frac{dz^2}{du^2}\frac{y}{x^3}\rho^2 = xy\left[1 + \frac{dz^2}{du^2}\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)\right]^2,$$

$$(10) \qquad \frac{d^2z}{du^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{d^2z}{du^2}\frac{1}{x^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{dz}{du} = 0.$$

Négligeant la solution singulière de cette dernière $x = 0$, qui correspond à un plan, elle devient

$$\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\frac{dz}{du}} = \frac{-2u}{1 + u^2};$$

donc

$$\frac{dz}{du} = \frac{C}{1 + u^2},$$

et

$$(11) \qquad z = C \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

C'est l'équation de l'héliçoïde gauche.

L'équation (9) devient

$$(12) \qquad \rho = 1 + \frac{x^2 + y^2}{C^2}.$$

Nous voyons par là que, si nous nous déplaçons sur une génératrice, en partant de la directrice, le rayon de courbure varie de ± 1 à $\pm \infty$.