Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 525-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__525_1>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Haton de la Goupillière à M. Geroño.

« Monsieur et cher maître,

» Vous paraîtrait-il hors de propos, au moment où les Cours vont recommencer, d'insérer, au milieu de vos intéressants articles, une simple remarque sur un point de l'enseignement élémentaire qui me semble insuffisant dans son état actuel, à en juger du moins par les réponses uniformes des candidats dans les examens.

» Je veux parler de l'élégante démonstration indiquée par Sturm pour obtenir le maximum de l'expression $x^p y^q z^r$ (pour nous borner au cas de trois facteurs, ce qui ne particularise en rien), lorsque la somme des quantités positives x, y, z conserve une valeur constante a. On rattache cette recherche à celle du maximum du produit $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda$, dans lequel $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\lambda$ reste également constant. Et, pour celle-ci, on se fonde sur le principe démontré directement pour deux facteurs, en remplaçant $\alpha\beta$ par $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$ sans modifier les valeurs de γ, δ, ..., λ.

» Or s'il est bon, en général, pour soulager l'esprit, de scinder en propositions successives toute question un peu compliquée, il n'en doit pas moins être toujours possible de présenter le raisonnement d'un seul coup et dans son entier. Si l'on essaye, dans le calcul actuel, de faire cette démonstration directement sur l'expression suivante, que l'on substitue à la proposée,

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\underline{\frac{x}{p}\cdot\frac{y}{q}}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q}\cdot\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdots\frac{z}{r},$$

en remplaçant les deux facteurs soulignés $\frac{x}{p}$ et $\frac{y}{q}$ chacun par leur moyenne arithmétique

$$\frac{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}{2},$$

sans altérer la valeur des autres, on se heurte contre une impossibilité radicale, puisqu'un certain nombre de ces facteurs sont nécessairement identiques à ceux que l'on veut modifier. Le raisonnement me paraît dès lors tout à fait dénué de fondement, et sa conclusion gratuite par conséquent.

» Voici l'explication qu'il me paraîtrait nécessaire d'ajouter sur ce point. L'expression

$$(1) \qquad \alpha.\beta.\gamma.\delta\ldots\lambda,$$

composée de $p+q+r$ facteurs, comme la suivante :

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q \left(\frac{z}{r}\right)^r,$$

est plus générale que cette dernière lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont considérés comme indépendants (sauf la condition de leur somme), car ces facteurs peuvent alors être tous différents, tandis que ceux du second produit ne présentent jamais que trois valeurs distinctes répétées p, q, r fois. En même temps, il n'est aucun des états de la fonction (2) que ne puisse évidemment affecter la première. Celle-ci passe donc en particulier par le maximum de (2) sans qu'on puisse *à l'avance* affirmer réciproquement que (2) atteigne le maximum de (1), et qu'il suffise, par suite, de déterminer ce dernier par la méthode ordinaire pour l'appliquer tel quel à l'expression (2). Il faut, au contraire, après avoir effectué cette détermination, s'assurer que le résultat correspond bien à l'une des formes que le produit (2) est susceptible de prendre parmi celles de (1), et non à l'une de celles en beaucoup plus grand nombre qu'il ne saurait présenter.

» Or, quand on dispose de l'entière indépendance de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, on reconnaît, par la méthode reçue, qui est alors tout à fait légitime, que le maximum de (1) correspond à l'égalité de tous les facteurs. Rien ne s'oppose d'ailleurs, dans les conditions du second problème, à ce qu'on adopte pour x, y, z les valeurs déterminées par les trois relations qui expriment cette égalité :

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r},\quad p\frac{x}{p}+q\frac{y}{q}+r\frac{z}{r}=a.$$

On voit donc que l'expression (2) peut affecter en particulier l'état qui constitue le maximum de la première (*), et comme elle ne saurait offrir d'autres formes que celles de (1) lui-même, il s'ensuit qu'elle ne peut dépasser cette valeur, qui est bien dès lors son maximum. »