L. PAINVIN

Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 529-545
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__529_0>

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 481);

PAR M. L. PAINVIN.

§ IV. — *L'équation en λ a deux racines égales.*

14. *Lorsque l'équation en λ a deux racines égales, les deux surfaces se touchent en un point unique, si le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit; les deux surfaces seront bitangentes et se couperont suivant deux courbes planes, si le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts; la droite qui joint les points de contact* (*c'est-à-dire l'intersection des deux plans*) *n'appartient pas aux deux surfaces.*

Réciproquement, *lorsque les deux surfaces sont tangentes ou doublement tangentes, l'équation en λ a deux racines égales : dans le premier cas, le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit; dans le second cas, où l'on suppose que la droite des contacts n'est pas une droite commune aux deux surfaces, le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.*

L'énoncé suivant plus détaillé fera mieux saisir la position relative des deux surfaces.

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit.*

Soient A le sommet du cône correspondant à la racine double, B et C les sommets des cônes correspondant aux deux racines simples :

1° *Les deux surfaces* S *et* T *se touchent au point* A ; *les sommets* B *et* C *des deux cônes, correspondant aux racines simples, sont dans le plan tangent commun aux deux surfaces. Les points de contact des plans tangents, menés à chacune des surfaces par la droite* BC, *sont en ligne droite avec le sommet* A ; *soit* AD *cette droite.*

2° *Les trois points* A, B, C *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; le plan polaire du point* A *est le plan tangent commun* BAC ; *les plans polaires des points* B *et* C *sont respectivement les plans* CAD *et* BAD. *Il n'y a que ces trois points qui aient même plan polaire par rapport aux deux surfaces.*

3° *Le cône* (A), *correspondant à la racine double, est conjugué par rapport au trièdre formé par les trois plans qui ont même pôle par rapport aux deux surfaces; les arêtes de ce trièdre sont les droites* AB, AC, AD *précédemment définies. Les cônes ayant leurs sommets en* B *et* C *touchent le plan tangent commun* BAC ; BA *et* CA *sont respectivement les génératrices de contact.*

Lorsqu'un plan tourne autour de BC, *ses pôles, distincts par rapport à chacune des deux surfaces, se meuvent sur* AD, *et inversement. Lorsqu'un plan tourne autour de* AC, *ses pôles, distincts par rapport à chacune des surfaces, se meuvent sur* AB, *et inversement.*

4° *La courbe d'intersection des deux surfaces est une courbe gauche du quatrième ordre ayant un point double au point où les deux surfaces se touchent; les tangentes en ce point double sont les intersections du plan tangent commun avec le cône correspondant à la racine double ; ces tangentes sont conjuguées harmoniques par* *rapport aux droites qui joignent le point double aux sommets des deux autres cônes. Le point double de la courbe gauche ne peut pas devenir un point de rebroussement, tant que l'équation en λ n'a que deux racines égales. Le point double est isolé lorsque le plan* BAC *coupe le cône* (A) *suivant deux génératrices imaginaires.*

DEUXIÈME CAS. — *Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.*

1° *Les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes et se touchent en deux points situés sur la droite d'intersection des deux plans ; cette droite n'est pas située sur les surfaces.*

Soient ABC et ABD les plans des deux courbes, A et B les points où les deux surfaces se touchent, CDA et CDB les plans tangents communs.

2° *Les cônes, correspondant aux racines simples, ont leurs sommets sur la droite* CD, *intersection des plans tangents communs, soient* C_1 *et* D_1 ; *les plans qui passent par les sommets* C_1 *et* D_1 *et par la droite* AB *des contacts forment un système harmonique par rapport aux deux plans* ABC *et* ABD *des courbes communes. Les cônes* (C_1) *et* (D_1) *touchent à la fois les plans tangents communs* CDA *et* CDB ; *les plans de contact sont précisément les plans* C_1AB *et* D_1AB.

3° *Un point quelconque de la corde des contacts,* AB, *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces, et ces plans passent tous par la droite* CD, *intersection des deux plans tangents communs.*

Les sommets des deux cônes, correspondant aux racines simples, ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; les plans polaires des points C_1 *et* D_1 *sont respectivement les plans* D_1AB *et* C_1AB.

Les plans polaires d'un point quelconque, pris sur CD *intersection des plans tangents communs, sont différents pour chacune des surfaces, mais ils passent tous par la droite* AB.

15. Je vais démontrer toutes les propositions renfermées dans l'énoncé qui précède. Je ferai d'abord observer que, dans cette étude et dans les suivantes, je ne m'occuperai plus de la distinction entre les solutions réelles et les solutions imaginaires.

Reportons-nous aux équations générales (1), (2), (3), (4) du n° 1, et supposons que l'équation en λ (4) possède une racine double λ_0; nous prendrons le sommet du cône correspondant comme sommet A du tétraèdre de référence; l'équation de ce cône ne devra plus renfermer de terme en x; or cette équation se déduit de l'équation (3), n° 1, en y faisant $\lambda = \lambda_0$; on devra donc avoir

$$\frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_0. \tag{1}$$

L'équation du cône est alors

$$\left.\begin{aligned} &(A_{22} + \lambda_0 B_{22})y^2 + (A_{33} + \lambda_0 B_{33})z^2 \\ &\quad + (A_{44} + \lambda_0 B_{44})t^2 + 2(A_{23} + \lambda_0 B_{23})yz \\ &\quad + 2(A_{24} + \lambda_0 B_{24})yt + 2(A_{34} + \lambda_0 B_{34})zt = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

et l'équation en λ devient

$$(\lambda - \lambda_0)\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21}(\lambda - \lambda_0) & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} & A_{24} + \lambda B_{24} \\ B_{31}(\lambda - \lambda_0) & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} & A_{34} + \lambda B_{34} \\ B_{41}(\lambda - \lambda_0) & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{43} + \lambda B_{43} & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

La racine λ_0 devant être une racine double de l'équation (3), le multiplicateur de $(\lambda - \lambda_0)$ devra s'annuler pour $\lambda = \lambda_0$; on trouve ainsi la condition

$$(4)\qquad B_{11}\begin{vmatrix} A_{22}+\lambda_0 B_{22} & A_{23}+\lambda_0 B_{23} & A_{24}+\lambda_0 B_{24} \\ A_{32}+\lambda_0 B_{32} & A_{33}+\lambda_0 B_{33} & A_{34}+\lambda_0 B_{34} \\ A_{42}+\lambda_0 B_{42} & A_{43}+\lambda_0 B_{43} & A_{44}+\lambda_0 B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation se décompose en deux; en égalant à zéro le premier facteur, le cône (2) reste un cône proprement dit; mais si l'on égale à zéro le second facteur, on a précisément la condition pour que le cône (2) se réduise à deux plans distincts.

Remarquons de suite que, dans le cas actuel, le cône (2) ne peut pas se réduire à deux plans coïncidents; en effet, eu égard à la relation (4), l'équation (3) en λ peut s'écrire :

$$(5)\qquad \left\{ (\lambda-\lambda_0)^2 \left\{ B_{12}\begin{vmatrix} B_{21} & A_{23}+\lambda B_{23} & A_{24}+\lambda B_{24} \\ B_{31} & A_{33}+\lambda B_{33} & A_{34}+\lambda B_{34} \\ B_{41} & A_{43}+\lambda B_{43} & A_{44}+\lambda B_{44} \end{vmatrix} - B_{13}\begin{vmatrix} B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{24}+\lambda B_{24} \\ B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{34}+\lambda B_{34} \\ B_{41} & A_{42}+\lambda B_{42} & A_{44}+\lambda B_{44} \end{vmatrix} + B_{14}\begin{vmatrix} B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{23}+\lambda B_{23} \\ B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{33}+\lambda B_{33} \\ B_{41} & A_{42}+\lambda B_{42} & A_{43}+\lambda B_{43} \end{vmatrix} \right\} = 0. \right.$$

Or, pour que le cône (2) se réduise à deux plans coïncidents, on devrait avoir

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{A_{22}+\lambda_0 B_{22}}{A_{23}+\lambda_0 B_{23}} = \frac{A_{23}+\lambda_0 B_{23}}{A_{33}+\lambda_0 B_{33}} = \frac{A_{24}+\lambda_0 B_{24}}{A_{34}+\lambda_0 B_{34}}, \\ &\frac{A_{22}+\lambda_0 B_{22}}{A_{24}+\lambda_0 B_{24}} = \frac{A_{23}+\lambda_0 B_{23}}{A_{34}+\lambda_0 B_{34}} = \frac{A_{24}+\lambda_0 B_{24}}{A_{44}+\lambda_0 B_{44}}. \end{aligned} \right.$$

Mais on voit alors que, eu égard aux relations (6), la quantité entre parenthèses, dans l'équation (5), s'annule pour $\lambda = \lambda_0$; l'équation en λ aurait donc trois racines égales.

Ainsi nous n'avons à examiner que les deux cas suivants :

1° Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit;

2° Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.

1° *Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit.*

16. Je prendrai pour tétraèdre de référence un tétraèdre dont trois des sommets seront : le point A, sommet du cône correspondant à la racine double; les points B et C, sommets des cônes correspondant aux deux racines simples; le quatrième sommet reste arbitraire.

Reprenons l'analyse du numéro précédent; exprimant d'abord que le cône, correspondant à la racine double, a son sommet en A, on a les relations

$$(1^\circ)\qquad \frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_0;$$

puis, en écrivant que l'équation (3) en λ admet λ_0 pour racine double, on arrive à la relation (4), qui doit être vérifiée en égalant à zéro le premier facteur; on a ainsi

$$(2^\circ)\qquad B_{11} = 0,\quad \text{d'où}\quad A_{11} = 0,$$

puisque λ_0 n'est ni nul ni infini.

Si maintenant λ_1 est la première des racines simples, le cône correspondant doit avoir son sommet en B, c'est-à-dire que son équation [déduite de l'équation (3), n° 1, en y faisant $\lambda = \lambda_1$] ne doit pas renfermer de termes en y ;

on conclut de là

$$(3^\circ)\qquad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{A_{22}}{B_{22}} = \frac{A_{23}}{B_{23}} = \frac{A_{24}}{B_{24}} = -\lambda_1.$$

De même, le cône, correspondant à la racine simple λ_2, devant avoir son sommet en C, on aura

$$(4^\circ)\qquad \frac{A_{31}}{B_{31}} = \frac{A_{32}}{B_{32}} = \frac{A_{33}}{B_{33}} = \frac{A_{34}}{B_{34}} = -\lambda_2.$$

Comparant les rapports (3° et (4°), on voit que

$$\frac{A_{23}}{B_{23}} = -\lambda_1,\quad \frac{A_{23}}{B_{23}} = -\lambda_2;$$

et comme λ_1 et λ_2 sont des racines distinctes, ni nulles, ni infinies, il en résulte

$$(5^\circ)\qquad A_{23} = 0,\quad B_{23} = 0.$$

La comparaison des rapports (1°) et (3°), puis (1°) et (4°), nous donne encore

$$(6^\circ)\qquad A_{12} = 0,\quad B_{12} = 0;\quad A_{13} = 0,\quad B_{13} = 0.$$

En ayant égard aux relations (1°), (2°), (3°), (4°), (5°), (6°), les équations (1) et (2), n° 1, des surfaces S et T, deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} (\mathrm{S})\quad A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 \\ \qquad\qquad + 2A_{14}xt + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ (\mathrm{T})\quad \dfrac{A_{22}}{\lambda_1}y^2 + \dfrac{A_{33}}{\lambda_2}z^2 + B_{44}t^2 \\ \qquad\qquad + 2\dfrac{A_{14}}{\lambda_0}xt + 2\dfrac{A_{24}}{\lambda_1}yt + 2\dfrac{A_{34}}{\lambda_2}zt = 0. \end{cases}$$

Nous voyons déjà que le plan $t = 0$ est tangent aux deux surfaces en A, car il les coupe toutes deux suivant deux droites qui se rencontrent en A. Ainsi :

« Les deux surfaces se touchent en A ; ce point A est
» le sommet du cône correspondant à la racine double,
» et les sommets B, C, des deux cônes correspondant aux
» racines simples sont dans le plan tangent commun aux
» deux surfaces. »

Le plan polaire du point B est $f'_y = 0$; on trouve pour les deux surfaces

$$A_{22} y + A_{24} t = 0;$$

ce plan est donc le même pour les deux surfaces et passe par l'arête AC; nous pouvons le prendre pour plan ACD du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$(7^\circ) \qquad A_{24} = 0;$$

d'ailleurs on ne peut pas admettre que A_{22} soit nul, car alors les équations (7) représenteraient des cônes, et l'équation en λ aurait des racines nulles ou infinies. Le plan polaire du point C est $f'_z = 0$; on trouve pour les deux surfaces

$$A_{33} z + A_{34} t = 0;$$

ce plan est encore le même pour les deux surfaces et passe par l'arête AB; nous pouvons le prendre pour plan ABD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(8^\circ) \qquad A_{34} = 0.$$

Le coefficient A_{14} ne peut pas être nul, car les équations (7) représenteraient deux cônes ayant même sommet, en ayant égard aux relations (7°) et (8°). Ainsi, dans l'hypothèse actuelle, *les équations des deux surfaces pourront se mettre sous la forme définitive*

$$(8) \qquad \begin{cases} (S) & by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0, \\ (T) & b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 + 2xt = 0. \end{cases}$$

L'équation en λ, correspondant aux équations (8), est

$$(9) \qquad (\lambda+1)^2(b_1+\lambda b)(c_1+\lambda c)=0,$$

et les équations des trois cônes sont

$$(10)\left\{\begin{array}{l}
(\mathrm{A})\ (b-b_1)y^2+(c-c_1)z^2+(d-d_1)t^2=0,\\
\qquad\qquad \text{correspondant à la racine double;}\\
(\mathrm{B})\ (b_1c-bc_1)z^2+(b_1d-bd_1)t^2+2(b_1-b)xt=0,\\
(\mathrm{C})\ (c_1b-cb_1)y^2+(c_1d-cd_1)t^2+2(c_1-c)xt=0,\\
\qquad\qquad \text{correspondant aux racines simples.}
\end{array}\right.$$

17. Les plans

$$dt+2x=0, \quad d_1t+2x=0$$

sont respectivement tangents aux surfaces (8), et les points de contact sont évidemment sur l'arête AD; ainsi :

« Les points de contact des plans tangents, menés à » chacune des surfaces par la droite BC, sont en ligne » droite avec le point A où les deux surfaces se tou- » chent. »

C'est sur cette droite AD que l'on place le quatrième sommet D du tétraèdre de référence; sa position sur cette droite reste d'ailleurs arbitraire.

« Les trois points A, B, C ont même plan polaire par » rapport aux deux surfaces; le plan polaire du point A » est le plan tangent commun BAC; le plan polaire du » point B est le plan CAD; le plan polaire du point C » est le plan BAD. »

Ces propositions, déjà démontrées, se concluent immédiatement des équations (8); j'ajoute que

« Les trois points A, B, C sont les seuls qui aient » même plan polaire par rapport aux deux surfaces. »

Car, en identifiant les équations des plans polaires d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), on a

$$\frac{t_0}{t_0} = \frac{by_0}{b_1 y_0} = \frac{cz_0}{c_1 z_0} = \frac{dt_0 + x_0}{d_1 t_0 + x_0}:$$

on verra sans difficulté que ces équations ne donnent que les trois points A, B, C, car les constantes b, c sont essentiellement différentes des constantes b_1, c_1, autrement l'équation en λ (9) aurait trois racines égales.

Les équations (10) mettent en évidence les propriétés suivantes :

« Le cône correspondant à la racine double est con-
» jugué par rapport au trièdre formé par les trois plans
» qui ont même pôle par rapport aux deux surfaces; les
» arêtes de ce trièdre sont : les droites qui joignent le som-
» met (A) aux deux autres sommets (B) et (C) corres-
» pondant aux racines simples, et la droite AD sur la-
» quelle se trouvent les points de contact des plans tan-
» gents menés par la droite BC. »

« Les cônes ayant leurs sommets en B et C sont res-
» pectivement tangents au plan tangent commun BAC;
» BA et CA sont les génératrices de contact. »

On constatera immédiatement, à l'aide des équations (8), que :

« Lorsqu'un plan tourne autour de BC, ses pôles, dis-
» tincts par rapport à chacune des surfaces, décrivent la
» droite AD, et inversement; »

« Lorsqu'un plan tourne autour de AB, ses pôles, dis-
» tincts par rapport à chacune des surfaces, décrivent la
» droite AC, et inversement.

18. Il nous reste enfin à démontrer la proposition suivante :

« La courbe d'intersection des deux surfaces est une
» courbe du quatrième ordre ayant un point double au
» point où les deux surfaces se touchent; les tangentes

» en ce point double sont les intersections du plan tan-
» gent commun avec le cône correspondant à la racine
» double de l'équation en λ; ces tangentes sont conju-
» guées harmoniques par rapport aux droites qui joignent
» le point double aux sommets des deux autres cônes. Le
» point double de la courbe gauche ne peut pas devenir
» un point de rebroussement tant que l'équation en λ n'a
» que deux racines égales. »

L'équation du cône correspondant à la racine double est, n° 16,

$$(11)\qquad (b-b_1)y^2+(c-c_1)z^2+(d-d_1)t^2=0;$$

un plan quelconque passant par le sommet A aura pour équation

$$y=mz+nt;$$

il coupera les deux surfaces (8) suivant des courbes respectivement situées sur les cônes

$$(12)\left\{\begin{array}{l}(bm^2+c)z^2+(bn^2+d)t^2+2\,bmn\,zt+2xt=0,\\(b_1m^2+c_1)z^2+(b_1n^2+d_1)t^2+2\,b_1mn\,zt+2xt=0.\end{array}\right.$$

Ces deux cônes touchent le plan BAC, ou $t=0$, suivant l'arête BA ; par conséquent un plan quelconque passant par le point A coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui se touchent en A, la tangente commune est dans le plan BAC; en d'autres termes, un plan quelconque passant par le point A y rencontre la courbe gauche, intersection de deux surfaces S et T, en deux points coïncidant avec le point A ; donc A est un *point double* pour cette courbe gauche.

Le cône (11) passe par cette courbe; les génératrices de ce cône, situées dans le plan $t=0$, rencontreront la courbe en trois points coïncidents, car tout plan passant par une de ces génératrices coupera les deux surfaces suivant deux coniques osculatrices; pour constater ce dernier fait, on remarque que les génératrices en question sont

$$(13) \qquad t = 0, \quad (b - b_1) y^2 + (c - c_1) z^2 = 0;$$

si alors on fait $m = \sqrt{\dfrac{c - c_1}{b_1 - b}}$, et si l'on assimile les équations (12) à celles de deux coniques, l'équation en μ, qui correspond aux sécantes communes, est

$$(\mu + 1)^2 [(b + \mu b_1) m^2 + c + \mu c_1] = 0,$$

ou, en remplaçant m par sa valeur,

$$(\mu + 1)^3 = 0;$$

cette équation ayant ses trois racines égales, les cônes (12) sont osculateurs.

Ainsi les droites (13) sont bien les tangentes au point double; ces deux droites forment évidemment un système harmonique par rapport aux droites AB et AC, c'est-à-dire $z = 0$ et $y = 0$.

Pour que le point double A soit un point de rebroussement de la courbe gauche, il faudrait que les deux tangentes (13) se confondissent, c'est-à-dire que l'on eût

$$b_1 = b \quad \text{ou} \quad c_1 = c;$$

mais alors l'équation (9) en λ posséderait trois racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le point double A est un *point isolé*, lorsque le plan tangent commun coupe le cône correspondant à la racine double suivant deux génératrices imaginaires.

Remarque. — La réciproque énoncée au n° 14 se démontrera facilement en prenant le point de contact des deux surfaces pour un des sommets du tétraèdre de référence, et le plan tangent commun pour une des faces adjacentes à ce sommet, etc., etc.

II° *Le cône correspondant à la racine double se compose de deux plans distincts.*

19. J'ai déjà remarqué que ces deux plans ne peuvent pas se confondre (n° 15); on peut donc les prendre pour plans ABC et ABD du tétraèdre de référence. Reportons-nous aux équations (1), (2), (3) du n° 1; si λ_0 est la racine double, l'équation (3), où l'on remplace λ par λ_0, ne devra renfermer que le terme en zt, puisque cette équation doit représenter les deux plans ABC et ABD ou $t=0$ et $z=0$; on aura donc

$$\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{A_{22}}{B_{22}}=\frac{A_{33}}{B_{33}}=\frac{A_{44}}{B_{44}}=\frac{A_{12}}{B_{12}}$$
$$=\frac{A_{13}}{B_{13}}=\frac{A_{14}}{B_{14}}=\frac{A_{23}}{B_{23}}=\frac{A_{24}}{B_{24}}=-\lambda_0.$$

Les équations des deux surfaces pourront alors s'écrire

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{S}) & A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2\\ & \quad +2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{14}xt\\ & \quad +2A_{23}yz+2A_{24}yt+2A_{34}zt=0,\\ (\mathrm{T}) & A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2\\ & \quad +2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{14}xt\\ & \quad +2A_{23}yz+2A_{24}yt+2B_{34}zt=0;\end{array}\right.$$

l'équation en λ est, dans le cas actuel,

$$(15)\quad (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}(\lambda+1) & A_{14}(\lambda+1)\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}(\lambda+1) & A_{24}(\lambda+1)\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}(\lambda+1) & B_{34}+\lambda A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & B_{34}+\lambda A_{34} & A_{44}(\lambda+1)\end{vmatrix}=0.$$

La droite AB rencontre les deux surfaces aux deux mêmes points; car si l'on fait $z=0$, $t=0$, dans les équations (14), il vient

$$(16)\qquad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0;$$

les plans tangents en ces points (x_0, y_0, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$) ont pour équation

$$(17)\qquad \begin{cases} x_0(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t) \\ \quad + y_0(A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) = 0; \end{cases}$$

ces plans tangents sont aussi les mêmes pour les deux surfaces; donc les deux surfaces sont bitangentes.

Les deux points (16) sont distincts, car s'ils étaient coïncidents, on pourrait supposer A_{12} et A_{22} nuls, et on voit alors que l'équation en λ (15) aurait trois racines égales. Nous pouvons donc prendre les deux points (16) pour sommets A et B du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$(1^\circ)\qquad A_{11} = 0,\quad A_{22} = 0.$$

Les plans tangents aux points A et B sont alors, d'après l'équation (17) et les relations (1°),

$$(18)\quad A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t = 0,\quad A_{21}x + A_{23}z + A_{24}t = 0.$$

Or ces plans ne passent pas par la droite AB; car s'ils passaient par cette droite, on aurait $A_{12} = 0$, et l'équation en λ (15) aurait quatre racines égales. Nous pouvons donc prendre les deux plans (18) pour faces ACD et BCD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(2^\circ)\qquad A_{13} = 0,\quad A_{14} = 0;\quad A_{23} = 0,\quad A_{24} = 0.$$

Nous concluons de là, en ayant égard aux relations (1°) et (2°) et en nous rappelant que A_{12} n'est pas nul, que *les équations des deux surfaces peuvent se ramener à la forme définitive*

$$(19)\qquad \begin{cases} (S)\quad az^2 + bt^2 + 2xy + 2c\,zt = 0, \\ (T)\quad az^2 + bt^2 + 2xy + 2c_1zt = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces passant par les points communs aux surfaces (19) est

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} & a(\lambda+1)z^2 + b(\lambda+1)t^2 \\ & \quad + 2(\lambda+1)xy + 2(c+\lambda c_1)zt = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation en λ est alors

$$(21)\qquad (\lambda+1)^2[ab(\lambda+1)^2 - (c+\lambda c_1)^2] = 0.$$

Si l'on prend pour λ les racines simples de l'équation (21), savoir :

$$\frac{c+\lambda c_1}{\lambda+1} = \pm\sqrt{ab},$$

les équations des cônes correspondants seront, d'après l'équation (20),

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} & (C_1)\quad az^2 + bt^2 + 2xy + 2\sqrt{ab}\,.\,zt = 0, \\ & (D_1)\quad az^2 + bt^2 + 2xy - 2\sqrt{ab}\,.\,zt = 0; \end{aligned}\right.$$

équations qui peuvent s'écrire

$$(22\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} & (C_1)\quad (z\sqrt{a} + t\sqrt{b})^2 + 2xy = 0, \\ & (D_1)\quad (z\sqrt{a} - t\sqrt{b})^2 + 2xy = 0. \end{aligned}\right.$$

Les sommets de ces deux cônes sont évidemment

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} & (C_1)\quad x=0,\quad y=0,\quad z\sqrt{a}+t\sqrt{b}=0, \\ & (D_1)\quad x=0,\quad y=0,\quad z\sqrt{a}-t\sqrt{b}=0. \end{aligned}\right.$$

Nous voyons donc que :

« Si l'équation en λ a deux racines égales, et si le cône » correspondant à la racine double se réduit à deux » plans, les deux surfaces se coupent suivant deux cour- » bes planes et se touchent en deux points situés sur la » droite d'intersection des plans de ces deux courbes. »

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second » ordre se coupent suivant deux courbes planes, ou » mieux, lorsqu'elles sont doublement tangentes et que » la corde des contacts n'appartient pas à ces surfaces, » l'équation en λ a deux racines égales, et deux seulement : le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans. »

Cette réciproque se démontrera sans difficulté en prenant les deux plans pour plans de coordonnées ou pour faces du tétraèdre de référence.

20. Les équations (22 *bis*) nous montrent que :

« Les cônes correspondant aux racines simples ont » leurs sommets sur l'intersection (D) des plans tangents » communs aux deux surfaces, et touchent à la fois ces » plans tangents communs; les plans de contact passent » par la droite AB et forment un système harmonique » par rapport aux plans ABC et ABD des deux courbes » planes communes. »

Les plans polaires, par rapport aux surfaces (19), d'un point quelconque (x_0, y_0, z_0, t_0), ont pour équations respectives :

$$(24)\quad \begin{cases} x_0 y + y_0 x + z_0(az + ct) + t_0(cz + bt) = 0, \\ x_0 y + y_0 x + z_0(az + c_1 t) + t_0(c_1 z + bt) = 0. \end{cases}$$

On constate immédiatement que :

« 1° Les plans polaires d'un même point se coupent » sur un plan passant par la droite AB. »

« 2° Un point quelconque de la corde des contacts AB » a même plan polaire par rapport aux deux surfaces, et » ces plans passent tous par l'intersection des deux plans » tangents communs. »

« 3° Les pôles des plans passant par la droite AB sont » distincts pour les deux surfaces. »

« 4° Les sommets des deux cônes correspondant aux » racines simples ont même plan polaire par rapport » aux deux surfaces; le plan polaire du sommet C_1 est » le plan D_1AB, et le plan polaire du sommet D_1 est le » plan C_1AB. »

« 5° Les plans polaires d'un point quelconque, pris » sur la droite CD, intersection des plans tangents com- » muns, sont différents pour chacune des surfaces; mais » ils passent tous par la corde des contacts, AB. »

(*La suite prochainement.*)