ABEL TRANSON

De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 222-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__222_0>

DE LA TRANSFORMATION ISOGONALE ET DE LA TRANSFORMATION ISOLOGIQUE DES FIGURES PLANES;

PAR M. ABEL TRANSON.

1. Je traiterai dans cette Note du mode de transformation dans lequel à un point de la figure transformée correspond un point de la figure transformante. On verra que ce mode de transformation se subdivise en deux autres, auxquelles s'appliquent naturellement les dénominations de *transformation isogonale* et de *transformation isologique*.

2. Soient x, y les coordonnées d'un point ω de la figure transformée; X, Y celles du point Ω qui lui correspond dans la figure transformante. Les formules de transformation seront

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

où φ et ψ représentent des fonctions bien déterminées. Je supposerai d'ailleurs que les coordonnées x et y soient rapportées aux mêmes axes que les X et Y.

Cela posé, si du point (x, y) on passe à un point voisin $(x + dx, y + dy)$, on passera en même temps du point transformant (X, Y) à un point voisin correspondant $(X + dX, Y + dY))$, et comme on a les relations

$$dX = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy, \quad dY = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy,$$

si l'on appelle t le coefficient d'inclinaison $\frac{dy}{dx}$, et T le coefficient d'inclinaison correspondante $\frac{dY}{dX}$, on aura

$$T = \frac{\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}t}{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}t}.$$

On voit qu'à une valeur de t correspond une valeur unique de T, et réciproquement; d'où l'on peut conclure immédiatement que si l'on considère autour du point ω quatre points o, o', o'', o''', qui en soient infiniment voisins; et autour du point Ω les quatre points infiniment voisins correspondants O, O′, O″, O‴; les quatre directions ωo, $\omega o'$, $\omega o''$, $\omega o'''$ auront le même rapport anharmonique que les quatre directions correspondantes ΩO, ΩO′, ΩO″, ΩO‴; ce qu'on peut énoncer sous une forme plus générale de la manière suivante :

Théorème. — *Un faisceau de directions issues du point ω et le faisceau des directions correspondantes issues du point Ω sont des faisceaux homographiques.*

Il résulte de ce théorème que si l'on considère à la fois un nombre quelconque de courbes tracées sur la première figure et passant toutes au point ω, et les courbes correspondantes de la seconde figure passant toutes au point Ω, le faisceau des tangentes aux premières en leur point commun ω sera homographique avec le faisceau des tangentes menées aux courbes qui passent en Ω.

3. Calculons maintenant la tangente de l'angle entre deux directions correspondantes issues des points ω et Ω; si nous supposons les axes de coordonnées rectangulaires,

la tangente de cet angle aùra pour expression

$$\frac{\mathrm{T}-t}{1+\mathrm{T}.t}=\frac{\frac{d\psi}{dx}+\left(\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}\right)t-\frac{d\varphi}{dy}t^2}{\frac{d\varphi}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\right)t+\frac{d\psi}{dy}t^2}.$$

Relativement à un point déterminé (x, y), cette expression varie avec t, à moins qu'on n'ait à la fois

$$\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}=0, \quad \frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

parce qu'alors la tangente en question a pour valeur $-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}$.

Lorsque les fonctions φ et ψ satisfont à ces deux conditions pour toutes les valeurs de x et de y, les deux faisceaux de directions correspondantes issues des deux points correspondants ne sont pas seulement homographiques, ils sont *semblables*; car l'angle de deux rayons de l'un est égal à l'angle des rayons correspondants de l'autre. Les orientations seules des deux faisceaux diffèrent entre elles; et précisément elles diffèrent de l'angle dont la tangente a pour valeur $-\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}$. Il arrive alors que deux courbes quelconques de la figure transformante se rencontrent sous le même angle que les deux courbes transformées. M. Siebeck, dans un Mémoire très-intéressant inséré dans le *Journal de Crelle* (1858), dit alors que la transformation est *isogonale*.

Lorsque la transformation n'est point *isogonale*, nous dirons qu'elle est *isologique*, pour exprimer le genre d'égalité (*entre rapports*) que présentent dans cette circonstance plus générale deux faisceaux correspondants. Or il est digne de remarque qu'une transformation isologique est toujours isogonale relativement à des points isolés du plan, lesquels points sont en nombre limité ou illimité selon la nature des fonctions φ et ψ.

Mais remarquons que deux faisceaux peuvent être homographiques directement ou inversement selon que les angles correspondants se suivent dans le même sens de rotation ou dans un sens de rotation contraire. De même la similitude peut être directe ou inverse.

Pour trouver les conditions qui distinguent la similitude directe de la similitude inverse, construisons relativement au point transformé (x, y) la tangente de l'angle Θ entre les deux directions transformantes T_1, T_0, qui correspondent aux directions transformées t_1, t_0; et, pour simplifier, supposons $t_0 = 0$. On trouve

$$\tang\Theta = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right)t_1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)t_1}.$$

Or $\tang\Theta$ doit être égale à $\pm t_1$ selon que la similitude est directe ou inverse; cela conduit aux doubles équations

$$\frac{d\varphi}{dy} \pm \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} \mp \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

dont les signes supérieurs donnent lieu à deux faisceaux directement, et les inférieurs à deux faisceaux inversement, semblables.

Il résulte de cette discussion que toute transformation isologique est directement isogonale pour tous les points déterminés par le système d'équations

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

et inversement semblable pour les points qui satisfont au second système. Ajoutons qu'elle serait isogonale le long d'une courbe continue si les deux équations de l'un de ces systèmes rentraient l'une dans l'autre.

4. Appelons m le rapport des deux éléments correspondants ωo, ΩO; on verra aisément que toute courbe transformée satisfaisant à l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2-m^2\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2-m^2=0,$$

où m est un paramètre constant, aura ses éléments dans un rapport de longueur constant avec ceux de la courbe correspondante. Et, par suite, sur deux telles courbes deux arcs finis correspondants auront entre eux ce même rapport.

Dans le cas des transformations isogonales, l'équation ci-dessus se ramène à la forme suivante :

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2-m^2\right]\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=0.$$

Et alors, en égalant à zéro le premier facteur, on obtient la transformée unique qui (pour une valeur donnée de m) donne lieu à la circonstance en question (*).

5. Dans la transformation que M. Chasles a appelée *homographie*, à chaque point de l'une des figures correspond un point unique de l'autre. Et d'après les formes des fonctions φ et ψ qui conviennent à cette transforma-

(*) Je remarquerai ici que M. Siebech, dans son Mémoire cité ci-dessus, a indiqué, à l'occasion de la transformation isogonale, l'existence de certaines courbes dont les arcs correspondants ont un rapport constant; mais il résout la question autrement et sans en faire aucune application.

tion, il est aisé de reconnaître qu'elle est isologique. Mais, outre qu'*à un point de l'une des figures homographiques correspond un point de l'autre*, il faut ajouter qu'*à chaque droite de l'une correspond une droite unique de l'autre.*

Ces deux relations, correspondance de point à point et correspondance de droite à droite, entraînent comme conséquences toutes les autres relations descriptives et aussi toutes les relations métriques des figures homographiques. Elles constituent par leur réunion une définition de l'homographie « qui a toute la précision mathématique désirable en ce qu'elle n'implique aucune condition superflue. »

D'abord, puisque l'homographie est une transformation isologique et que de plus toute droite y correspond à une autre droite, il s'ensuit évidemment que « quatre droites issues d'un même point dans la première figure ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes de la seconde figure. »

La propriété que « quatre points en ligne droite dans une figure ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points correspondants de la seconde figure » n'est pas moins évidente. Car si l'on joint quatre points situés sur une droite transformée l à un point quelconque ω pris extérieurement à cette droite sur la première figure, on déterminera les points correspondants de la transformante L par sa rencontre avec les quatre rayons issus de Ω et correspondants à ceux qui aboutissent à ω. Or le rapport anharmonique des quatre premiers rayons est égal (à cause de l'isologie) à celui des quatre autres; donc aussi les rapports des points qu'ils déterminent respectivement sur l et L sont égaux.

6. La circonstance que toute transformation isologique

est directement isogonale en quelques points isolés du plan transformé et inversement isogonale en d'autres points, donne lieu à une propriété de l'homographie qui n'avait peut-être pas encore été remarquée. En effet, les fonctions propres à l'homographie étant les suivantes :

$$\varphi(x, y) = \frac{Ax + By + C}{A''x + B''y + 1}, \quad \psi(x, y) = \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + 1},$$

on verra aisément que la transformation est directement isogonale en un point unique et inversement en un autre point aussi unique; de là ce théorème :

Théorème. — *Dans deux figures homographiques deux couples de points particuliers se correspondent qu'on pourrait appeler* « *centres* », *qui sont caractérisés par la circonstance que deux segments correspondants pris à volonté dans les deux figures, étant vus l'un et l'autre de leurs centres respectifs, y sous-tendent deux angles égaux; mais tandis que par rapport aux centres de l'un des couples le sens de rotation des angles égaux est le même, il est contraire pour les centres du second couple.*

On peut démontrer ce théorème directement et par des considérations purement géométriques, en observant que deux figures homographiques peuvent toujours être considérées comme deux figures primitivement déduites l'une de l'autre par voie de perspective et qu'on a ensuite placées sur un même plan de manière à y occuper deux situations absolument indépendantes (Géométrie supérieure, *passim*). Il suffira donc d'établir l'existence du théorème en question par rapport à deux figures planes actuellement en perspective l'une de l'autre, ce qui est à la fois intéressant et facile.

7. X et Y étant les fonctions réelles de x et y ci-dessus

représentées par φ et ψ, soient deux variables directrices

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY,$$

on peut dire avec Cauchy que Z est une fonction de z, puisqu'une valeur déterminée de z détermine un système unique de valeurs pour x et y, et par suite une valeur déterminée aussi pour Z. D'ailleurs en construisant la dérivée de Z, c'est-à-dire le rapport différentiel $\frac{dZ}{dz}$, on trouve pour sa valeur

$$\frac{\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}.$$

Cette valeur est indépendante de $\frac{dy}{dx}$ lorsqu'on a à la fois

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

et alors la dérivée de Z est, comme Z elle-même, une fonction bien déterminée de z ; au lieu que si ces conditions ne sont pas remplies la dérivée de Z dépend à la fois de z et du rapport $\frac{dy}{dx}$.

Dans le premier cas, Cauchy appelle la fonction *monogène*, et dans le second il dit qu'elle est *non monogène*.

Jusqu'à ce grand géomètre, on n'avait pas eu cette idée de fonctions non monogènes; et lui-même, après avoir établi cette distinction, n'a considéré que les fonctions monogènes dans sa belle théorie des intégrales définies. Mais la relation générale ci-dessus indiquée entre Z et z, quels que soient φ et ψ, n'en est pas moins, conformément au véritable sens mathématique des mots, une relation de fonction à variable; et on voit par les lois de la transformation des figures que les fonctions non monogènes peuvent prendre place dans la science aussi légitimement que les fonctions monogènes, puisque si les unes donnent lieu à des transformations isogonales, les autres donnent naissance à des transformations isologiques.