NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOREL

Problèmes de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 232-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__232_1>

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE;

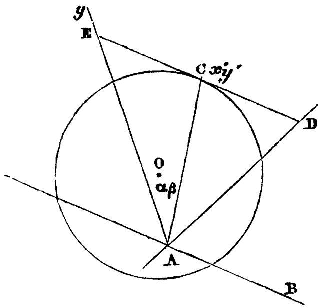
PAR M. MOREL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Répétiteur à Sainte-Barbe.

Mener entre deux droites une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.

Je prends pour axes les deux droites données. Je joins l'origine A au point de contact inconnu $C(x', y')$, et je mène la ligne AB parallèle à la tangente ED (*fig.* 1).

Fig. 1.



D'après la définition même des faisceaux harmoniques, les lignes AC et AB sont conjuguées harmoniques par rapport aux axes; leurs équations sont donc

(1) $$y - kx = 0 \quad \text{pour AC,}$$

(2) $$y + kx = 0 \quad \text{pour AB.}$$

L'équation du cercle est

(3) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2.$$

Le point (x', y') étant sur le cercle, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation de ce cercle, et aussi à l'équation (1), puisqu'il est sur la droite AC.

La droite passant par le point $O(\alpha, \beta)$ et par le point (x', y') devra être perpendiculaire à la droite ED, et, par suite, à la parallèle AB. On devra donc avoir

$$1 - k\frac{y'-\beta}{x'-\alpha} + \left(\frac{y'-\beta}{x'-\alpha} - k\right)\cos\theta = 0.$$

On en déduit pour k la valeur

$$k = \frac{x' - \alpha + (y' - \beta)\cos\theta}{y' - \beta + (x' - \alpha)\cos\theta}.$$

Portant cette valeur de k dans l'équation

$$y' - kx' = 0,$$

on trouve que le point (x', y') doit être tel, que ses coordonnées satisfassent à l'équation

$$y^2 - x^2 - y(\beta + \alpha\cos\theta) + x(\alpha + \beta\cos\theta) = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère qui passe par l'origine, par le centre du cercle, et par les projections orthogonales du centre sur les axes.

Les asymptotes sont parallèles aux droites représentées par l'équation

$$y^2 - x^2 = 0,$$

c'est-à-dire parallèles aux deux bissectrices des angles des axes.

Cherchons le centre de cette hyperbole. On a

$$f'_y = 2y - (\beta + \alpha\cos\theta) = 0,$$

$$f'_x = 2x - (\alpha + \beta\cos\theta) = 0.$$

Donc si par les milieux des segments interceptés sur chacun des axes, on mène une parallèle à l'autre, on a un diamètre, qui est conjugué de la direction du premier axe. Il en résulte que la ligne qui joint les projections du centre sur les axes est toujours un diamètre. On peut donc facilement trouver et construire cette hyperbole. Les points de rencontre de cette hyperbole avec le cercle donné détermineront le point C cherché.

Cherchons la condition pour que cette équation représente deux droites. On sait qu'une courbe dont l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

représentera deux lignes droites si l'on a entre les coefficients la relation

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0.$$

Nous aurons donc ici, puisque B et F sont nuls,

$$(\alpha + \beta \cos\theta)^2 - (\beta + \alpha \cos\theta)^2 = 0.$$

En développant, il vient

$$(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\theta = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $\alpha = \pm\beta$, c'est-à-dire si le centre du cercle est sur l'une des bissectrices des deux axes. Dans ce cas, en effet, l'équation devient, si l'on suppose d'abord $\alpha = \beta$,

$$y^2 - x^2 - (y - x)(\alpha + \alpha\cos\theta) = 0,$$

ce qui donne

$$y - x = 0 \quad \text{et} \quad y + x - \alpha(1 + \cos\theta) = 0.$$

Si $\alpha = -\beta$, on aura

$$y^2 - x^2 - (y + x)(\beta - \beta\cos\theta) = 0,$$

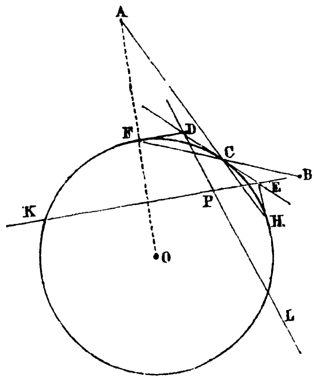
ou

$$y + x = 0, \quad y - x = \beta(1 - \cos\theta).$$

Étant donnés deux points A *et* B (*fig.* 2) *dans le plan d'un cercle* O, *trouver sur le cercle le point* C *tel, que* AC + CB *soit un minimum.* (Ce problème sert à déterminer la position du point brillant d'une sphère donnée, lorsque le point lumineux et l'œil sont aussi donnés.)

Supposons le problème résolu, je mène la tangente au point C; alors, d'après un théorème connu, l'angle ACD est égal à l'angle BCE.

Fig. 2.



Je prolonge la ligne BC jusqu'au point F, où elle rencontre la circonférence, et je mène la tangente FD; de même je prolonge la ligne AC jusqu'au point H, et je mène la tangente HE; les deux triangles isocèles DFC et CEH sont égaux, puisque l'angle ECH étant égal à l'angle DCF, la corde CH est égale à la corde CF; donc on a DC = CE.

Mais par le point D passe la polaire du point B, ligne complétement déterminée; il en est de même de EK; donc le problème revient au suivant : *mener entre deux droites données une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.*