NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

Note sur la décomposition des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 369-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__369_1>

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Je veux présenter ici deux remarques très-simples, mais qui pourraient servir à mettre de l'unité dans la théorie de la décomposition des fractions rationnelles. En admettant la forme de décomposition connue pour le cas où le dénominateur n'a que des facteurs simples, j'en déduis le résultat ordinaire dans le cas où un nombre quelconque de facteurs deviennent égaux. En second lieu, de la formule ainsi obtenue je passe au cas où les racines multiples sont imaginaires.

Si la fonction $F(x)$ n'admet que des diviseurs différents, et qu'on ait

$$F(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}\,\frac{1}{x-a} \\ &\quad + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}\,\frac{1}{x-b} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

S n racines, a, b, ..., f, g doivent devenir égales, supposons qu'auparavant elles forment une progression arithmétique dont nous ferons tendre la raison vers zéro. Posons donc

$$b = a + \varepsilon, \quad c = a + 2\varepsilon, \quad g = a + (n-1)\varepsilon.$$

La formule (1) deviendra évidemment, en faisant $F_1(x) = (x-h)(x-i)\ldots(x-l)$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{n-1}f(a)}{1.2.3\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1}F_1(a)}\,\frac{1}{x-a} \\ &+ \frac{(-1)^{n-2}f(a+\varepsilon)}{1.1.2\ldots(n-2)\varepsilon^{n-1}F_1(a+\varepsilon)}\,\frac{1}{x-a-\varepsilon} \\ &+ \frac{(-1)^{n-3}f(a+2\varepsilon)}{1.2.1.2.3\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1}F_1(a+2\varepsilon)}\,\frac{1}{x-a-2\varepsilon} + \ldots \\ &+ \frac{f[a+(n-1)\varepsilon]}{1.2\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1}F_1[a+(n-1)\varepsilon]}\,\frac{1}{x-a-(n-1)\varepsilon} \\ &+ \frac{H}{x-h} + \ldots + \frac{L}{x-l}. \end{aligned}\right.$$

Les n premiers termes représentent le quotient par $1.2\ldots(n-1)\varepsilon^{n-1}$ de la $n-1^{ième}$ différence des valeurs que prend la fonction $\dfrac{f(a)}{(x-a)F_1(a)}$, quand on donne, à la variable a, n valeurs en progression arithmétique. Or, quand ε tend vers zéro, ce quotient a pour limite, sauf le diviseur $1.2.3\ldots(n-1)$, la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ de la fonction par rapport à a. Quant aux termes suivants, leur limite n'offre pas de difficulté, et, quand les racines seront égales, on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{d^{n-1}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\frac{1}{x-a}\right)}{da^{n-1}} + \frac{H}{x-h} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Si l'on développe le premier terme par la formule qui donne la $n-1^{\text{ième}}$ dérivée d'un produit, on retrouve la suite connue

$$\frac{f(a)}{F_1(a)}\frac{1}{(x-a)^n} + \frac{d\frac{f(a)}{F_1(a)}}{da}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}\frac{f(a)}{F_1(a)}}{da^{n-1}}\frac{1}{x-a}.$$

En second lieu, considérons, comme on le fait pour le cas des racines inégales, les fonctions simples correspondant à deux racines imaginaires conjuguées dont le degré de multiplicité est le même ; la formule précédente suffit pour établir que les numérateurs sont des imaginaires conjuguées, et on a

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A + B\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n} + \dfrac{A_1 + B_1\sqrt{-1}}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{n-1}} + \ldots \\ + \dfrac{A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \dfrac{A - B\sqrt{-1}}{(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})} + \ldots \\ + \dfrac{A_{n-1} - B_{n-1}\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}. \end{array} \right.$$

En ajoutant toutes ces fractions, on aura une fraction irréductible

$$S = \frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n},$$

$\varphi(x)$ étant du degré $2n - 1$ et à coefficients réels. Or on a par la division

$$\varphi(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\varphi_1(x) + Mx + N,$$
$$\varphi_1(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\varphi_2(x) + M_1 x + N_1, \ldots,$$

de sorte qu'en éliminant φ_1, φ_2, etc., on trouve

$$\varphi(x) = Mx + N + [(x-\alpha)^2 + \beta^2](M_1 x + N_1) + \ldots$$
$$+ [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}(M_{n-1}x + N_{n-1}),$$

$$S = \frac{Mx + N}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_{n-1}x + N_{n-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

M et N n'étant pas nuls à la fois.

Note du Rédacteur. — Une solution moins simple de la même question a été donnée par M. Vieille, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1859.