NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PELLET

Question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 372-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__372_1>

QUESTION DE LICENCE;

SOLUTION PAR M. E. PELLET,
Élève à l'École Normale.

Déterminer tous les conoïdes droits tels que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires.

On indiquera ensuite comment varie sur les surfaces obtenues la valeur absolue du rayon de courbure commun aux deux sections principales, quand le point se déplace sur l'une des génératrices.

On sait que les valeurs des rayons de courbure principaux sont les racines de l'équation

$$(rt-s^2)\rho^2-\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\rho \\ +(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Soit $z=\varphi\frac{y}{x}$ l'équation du conoïde, on a

$$p=-\varphi'\frac{y}{x^2},\quad q=\varphi\frac{1}{x},\quad r=2\varphi'\frac{y}{x^3}+\varphi''\frac{y^2}{x^4};$$

$$s=-\varphi''\frac{y}{x^4}-\varphi'\frac{1}{x^2},\quad t=\varphi''\frac{1}{x^2},$$

φ' et φ'' étant les dérivées première et seconde de $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ par rapport à $\frac{y}{x}$.

$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0,$$

qui devient, en mettant les valeurs précédentes pour p, q, r, s, t,

$$\varphi''\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+2\varphi'\frac{y}{x}=0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\varphi'=\frac{a}{1+\frac{y^2}{x^2}},$$

puis

$$\varphi=a\,\text{arc tang}\left(\frac{y}{x}\right)+b.$$

Ainsi les conoïdes droits ayant en chaque point leurs deux rayons de courbure principaux égaux et dirigés en sens contraires, sont les hélicoïdes droits.

Les rayons de courbure principaux au point (x, y, z) ont pour expression

$$\pm\frac{a^2+x^2+y^2}{a}=\pm\frac{a^2+r^2}{a},$$

r étant la distance du point à l'axe des z, ou autrement la longueur de la génératrice passant par le point, comprise entre l'axe des z et le point. Le plan tangent au point (x, y, z) fait avec le plan tangent au point $(0, 0, z)$ qui est vertical, un angle dont la tangente est $\frac{r}{a}$.

On peut donc facilement construire ces rayons de courbure en grandeur et en position.