NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LE BESGUE

Note sur quelques équations indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 452-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__452_1>

NOTE SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. LE BESGUE.

L'impossibilité de la résolution en nombres entiers d'une équation indéterminée

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

où f et φ représentent des fonctions entières ou sommes de termes $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$ (A étant un entier positif ou négatif; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des entiers positifs ou nuls, et $x, y, z, \ldots$ des entiers positifs, négatifs ou nuls), est quelquefois rendue évidente en donnant à l'équation certaines formes particulières, par exemple celle-ci

$$mt + r = mu + r',$$

m étant un entier positif; t, u des entiers de même signe, aussi bien que r et r' supposés $< m$ en valeur absolue.

Si r et r' sont différents, il y a évidemment impossibilité : c'est le cas de $f(x, y, z, \ldots)$ et $\varphi(x, y, z, \ldots)$ *non* *congrus* pour un certain module m convenablement choisi.

Le cas de $r = 0$ et r' autre que o est un cas particulier qui se présente assez souvent.

(A) Voici un exemple pour ce dernier cas.

$x^2 + y^2 = (4a + 3)z$ est impossible (x, y premiers entre eux).

Démonstration. $4a + 3$ étant décomposé en ses facteurs premiers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il doit y en avoir un nombre impair de la forme $4b + 3$. Soit donc

$$x^2 = (4b + 3)t - y^2;$$

d'où, en élevant à la puissance $2b + 1$,

$$x^{4b+2} = (4b + 3)\mathrm{U} - y^{4b+2},$$

où U est entier. Le théorème de Fermat réduit cette équation à

$$(4b + 3)v + 1 = (4b + 3)w - 1,$$

où v et w sont entiers; or cela est impossible.

(B) Voici un autre exemple, question :

L'équation $x^2 = y^3 + 7$ est impossible en nombres entiers :

1° Pour y pair on a

$$x^2 = 8v^3 + 7;$$

donc x est impair; $x = 2z + 1$ donne

$$x^2 = 4z(z + 1) + 1 = 8u + 1,$$

u entier; or $8u + 1 = 8v^3 + 7$ est impossible.

2° y impair :

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = y^3 + 8 &= (y + 2)(y^2 - 2y + 4) \\ &= (y + 2)[(y - 1)^2 + 3]. \end{aligned}$$

Or $(y-1)^2+3$, pour $y-1$ pair, a un diviseur premier de la forme $4b+3$; l'équation est donc impossible.

(C) Autre exemple :

$x^3 \pm y^3 = 9z + r$ est impossible pour $r = 3, 4, 5, 6$: c'est la question 902 traitée par M. *Laisant*.

$\pm x$, $\pm y$ ayant l'une des formes $3t$, $3t+1$, $3t+2$, le premier membre ne peut prendre que l'une des formes

$$9\nu + 0,\ 1,\ 2,\ 7,\ 8.$$

Cette impossibilité par *non-congruence* a été appliquée à quelques cas particuliers de l'équation

$$x^m + y^m = z^m,$$

x, y, z entiers, m premier impair; par exemple : $m = 3$, $m = 7$.

Peut-on démontrer d'autres cas particuliers par la même méthode, sans introduire des nombres imaginaires formés avec les racines de l'unité?

Note du Rédacteur. — La démonstration relative à l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 = y^3 + 7$, dans le cas (2°) de y impair, a été fondée sur ce principe que :

Tout diviseur de la somme, x^2+1, de deux carrés premiers entre eux est également la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, $(y-1)^2+3$ étant de la forme $4b+3$, ne peut être la somme de deux carrés; donc, etc.

Le théorème que nous venons d'énoncer au sujet des diviseurs de la somme des carrés de deux nombres premiers entre eux est démontré dans la *Théorie des Nombres* de LEGENDRE. Ce théorème a d'abord été déduit de propositions plus générales dues à Lagrange, et cette déduction ne peut donner lieu à aucune objection. Mais, à la suite, on lit (p. 203, t. I, 3ᵉ édition) :

« *Ce théorème étant d'un très-grand usage dans la Théorie des Nombres, nous croyons devoir en donner une seconde démonstration fondée sur d'autres principes.* »

Il nous semble que cette seconde démonstration est au moins incomplète. Nous allons dire pourquoi.

En nommant N un diviseur de la somme $t^2 + u^2$ des carrés, t^2, u^2 *premiers entre eux*, et N'' un nombre entier moindre que $\frac{1}{4}$ N, l'auteur établit l'égalité

$$(N - \alpha t - 6u)^2 + (\alpha u - 6t)^2 = NN'',$$

où α, 6 sont des nombres entiers satisfaisant à une condition indiquée. Puis, il ajoute :

« *Si dans ce nouveau résultat on avait* $N'' = 1$, *le nombre* N *serait égal à la somme de deux carrés, et la proposition serait démontrée.* »

Sans doute, parce qu'il est facile de voir que si $N'' = 1$, les deux nombres $N - \alpha t - 6u$ et $\alpha u - 6t$ sont premiers entre eux.

« *Soit donc encore* $N'' > 1$, *alors en suivant la même marche, on déduirait du produit* NN'' *un nouveau produit* NN''', *où l'on aurait* $N''' < \frac{1}{2} N''$, *et qui sera exprimé pareillement par la somme de deux carrés, etc.* »

Mais, pour suivre la MÊME MARCHE, il faudrait que les deux nombres

$$N - \alpha t - 6u \quad \text{et} \quad \alpha u - 6t$$

fussent premiers entre eux; et c'est ce qui ne résulte pas de la démonstration dont il s'agit.

Au reste, cette démonstration s'applique clairement au cas où le diviseur N est premier; le principe étant établi pour ce cas particulier, on peut assez simplement faire voir qu'il est général, en décomposant le diviseur considéré N en ses facteurs premiers. (G.)