NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 45-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__45_0>

QUESTIONS.

898. On donne un cercle C tangent à une droite D en O. D'un point M de la circonférence on mène MA perpendiculaire à D, et l'on prend $AB = AO$. On joint BM, et l'on demande l'enveloppe de la droite BM quand le point M se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables. (H. Brocard.)

899. Deux disques situés dans le même plan et ayant la forme d'ellipses égales sont mobiles chacun autour d'un de leurs foyers supposé fixe; ces disques restent constamment tangents l'un à l'autre. On demande le lieu décrit par le point de contact. (Dauplay.)

900. Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée de manière à toucher cette parabole en deux points. On demande le lieu décrit par le centre de l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact. (Dauplay.)

901. Lorsqu'une ellipse en roulant sans glisser sur une droite a fait un tour entier, l'arc décrit par le foyer est égal à la circonférence ayant pour diamètre le grand axe.

902. Tout cube parfait augmenté de 3, 4 ou 5 unités d'un ordre quelconque n'est pas un cube parfait.

(Jos. Joffroy.)

903. Si par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre on fait passer un plan perpendiculaire à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point. (M.)

904. Étant donné un faisceau de surfaces du second degré ayant même intersection, si par un point A pris sur une de ces surfaces, on mène une section plane normale à cette surface, et les demi-diamètres des autres surfaces parallèles à la tangente à la section au point A, ainsi que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces; si l'on prend, à partir du point A et dans la direction des normales à ces plans polaires, des troisièmes proportionnelles aux demi-diamètres et aux distances correspondantes des plans polaires aux centres des surfaces, les extrémités de ces droites et le centre de courbure de la section faite dans la première surface sont en ligne droite. (L'Abbé Aoust.)

905. On donne une ellipse et ses deux foyers F et G; deux droites touchent cette ellipse aux points M et N, et se coupent en T : démontrer la relation

$$\frac{\overline{TF}^2}{MF.NF} = \frac{\overline{TG}^2}{MG.NG}.$$

(Laguerre.)

906. On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont O est le centre commun. Par un point quelconque P de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole; soient H et K les points où ces droites coupent l'hyperbole et I le point milieu du segment HK : démontrer que les deux droites OP et OI sont également inclinées sur le grand axe, et que le rapport de OP à OI est constant. (Laguerre.)

907. Mêmes données. Par les trois points P, H et K, on fait passer un cercle, et sur ce cercle on prend le point P', conjugué harmonique du point P relativement aux deux points H et K: démontrer que la perpendicu-

laire élevée sur le milieu de PP′ est la polaire du point P relativement à l'ellipse. (LAGUERRE.)

908. Soit un quadrilatère inscriptible ABCD. Si je considère un triangle formé par trois sommets de ce quadrilatère, les pieds des perpendiculaires abaissées du quatrième sommet sur les côtés du triangle considéré sont sur une ligne droite XY.

Cela posé, démontrer :

1° Que les quatre droites XY, que l'on peut construire en groupant trois à trois les quatre sommets ABCD, se coupent au même point K;

2° Que ce point est un point commun aux quatre cercles des neufs points des quatre triangles, et que, par suite, si un sommet se meut sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois autres, le lieu du point C sera le cercle des neuf points de ce triangle.

(E. LEMOINE.)

909. Un ellipsoïde de grandeur donnée est tangent aux trois faces d'un angle trièdre trirectangle. Trouver la courbe qui limite la position possible d'un point de contact sur une des faces. (E. LEMOINE.)

910. Deux triangles OAB, OA′B′ ont un sommet commun: OAB est donné en grandeur et en position; OA′B′ en grandeur seulement. Placer OA′B′ de façon que les droites AA′, BB′ fassent entre elles un angle donné.

(E. LEMOINE.)

911. Si deux coniques de forme invariable se déplacent de manière que leurs quatre axes restent respectivement tangents à quatre cercles, et de manière que les points d'intersection des deux coniques soient sur un cercle, quel est le lieu des centres de ce cercle?

(DARBOUX.)

912. Le plus petit commun multiple m de n nombres entiers $a, b, c, \ldots, k, l$ est égal au quotient de leur produit P par le plus grand commun diviseur D des produits, $n-1$ à $n-1$ de ces n nombres. (Le Besgue.)

913. Le plus grand commun diviseur D de n nombres entiers $a, b, c, \ldots, k, l$ est égal au quotient de leur produit P par le plus petit commun multiple m des produits, $n-1$ à $n-1$, de ces n nombres.

(Le Besgue.)

914. La formule $ax+b$, où a et b sont premiers entre eux, ne renferme que des nombres premiers à m, si tous les diviseurs premiers de m divisent a. Mais, si m a des diviseurs premiers $p, q, r, \ldots$, qui ne divisent pas a, sur m nombres consécutifs compris dans $ax+b$, en posant

$$x = \alpha,\ \alpha+1, \ldots,\ \alpha+m-1,$$

il y aura

$$m\,\frac{p-1}{p}\,\frac{q-1}{q}\,\frac{r-1}{r}\cdots$$

nombres premiers à m. (Le Besgue.)

915. Étant donné un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$, déterminer la position d'un point $A_0\,(x_0 y_0)$ dont les coordonnées satisfont aux équations :

$$y_0 - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}y_2 - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.2}y_{n-2} \mp ny_{n-1} \pm y_n = 0,$$

$$x_0 - nx_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_2 - \ldots \mp nx_{n-1} \pm x_n = 0.$$

Démontrer par le calcul et la géométrie que la position de ce point est indépendante du choix des axes de coordonnées. (A. Sartiaux.)