S. RÉALIS

Démonstration d'une formule de trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 12-20
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__12_1>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE TRIGONOMÉTRIE;

PAR M. S. RÉALIS.

1. C'est Euler qui a reconnu le premier, dans un Mémoire inséré dans les *Novi Commentarii Academiæ*

Petropolitanæ, t. VIII, p. 157, que la limite vers laquelle tend le produit

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n},$$

lorsque le nombre n des facteurs augmente indéfiniment, est égale à $\frac{\sin x}{x}$, en sorte qu'on a, pour un nombre illimité de facteurs,

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^4}\cdots=\frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi que le remarque M. Frenet dans son *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal* (2[e] édition, p. 56), la considération de cette limite s'était présentée à Viète à propos de la surface du cercle. Ce géomètre a été conduit, en effet, à une relation qui revient à la formule

$$\frac{S_{2^n k}}{S_k}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}},$$

où S_k désigne la surface du polygone régulier inscrit de k côtés, et x l'angle au centre de ce polygone.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1[re] série, t. VIII, p. 459, et t. XVII, p. 283), on trouve une démonstration élémentaire de la formule d'Euler, démonstration adoptée maintenant dans l'enseignement classique, et consignée dans plusieurs ouvrages didactiques, entre autres dans le *Recueil* mentionné.

La démonstration que je présente ici est un peu moins simple que celle qu'on vient de citer, mais elle est tout aussi élémentaire, et conduit incidemment à plusieurs résultats intéressants.

2. Dans cette démonstration, on s'appuie d'abord sur

la relation

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)],$$

par laquelle on exprime un produit de deux cosinus au moyen d'une somme de deux cosinus.

Faisons, dans cette formule,

$$a = \frac{x}{2}, \quad b = \frac{x}{2^2},$$

x désignant un arc quelconque, et multiplions chaque nombre par $\cos\frac{x}{2^3}$; il nous viendra

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3} + \cos\frac{3x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\right).$$

Mais, en vertu de la relation rappelée,

$$\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2^3} + \cos\frac{3x}{2^3}\right),$$

$$\cos\frac{3x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5x}{2^3} + \cos\frac{7x}{2^3}\right);$$

donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{x}{2^3} + \cos\frac{3x}{2^3} + \cos\frac{5x}{2^3} + \cos\frac{7x}{2^3}\right).$$

On trouve ainsi, en général, pour toute valeur entière et positive de n,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{3x}{2^n} + \cos\frac{5x}{2^n} + \ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \cos\frac{(2^n-3)x}{2^n} + \cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right], \end{aligned}\right.$$

ce qui se prouve directement en vérifiant que, si la formule (1) subsiste pour une valeur donnée de n, elle subsistera encore pour la valeur $n+1$.

3. *Remarques*. — 1° D'après la manière dont on passe de la formule (1) où l'on fait $n=2$, à la même formule où l'on fait $n=3$, puis de proche en proche aux cas de $n=4, 5, 6,\ldots$, on est conduit à remarquer, en passant, que les 2^{n-1} premiers nombres impairs, depuis 1 jusqu'à 2^n-1 inclusivement, sont donnés par les 2^{n-1} valeurs que prend l'expression

$$2^{n-1}\pm 2^{n-2}\pm 2^{n-3}\pm\ldots\pm 2^2\pm 2\pm 1,$$

lorsqu'on y combine de toutes les manières possibles les signes des termes 2^{n-2}, $2^{n-3},\ldots, 2^2, 2, 1$.

On a, par exemple, pour $n=3$,

$$2^3-1=7,\quad 2^2=4,$$

et

$$2^2-2-1=1,$$
$$2^2-2+1=3,$$
$$2^2+2-1=5,$$
$$2^2+2+1=7.$$

Il suit de là, entre autres conséquences intéressantes pour l'analyse numérique, que tout nombre impair peut être représenté d'une infinité de manières au moyen de l'expression ci-dessus, où l'on donne successivement à n toutes les valeurs entières, à partir de la plus petite valeur qui convient au nombre considéré.

Par exemple,

$$5=2^2+2-1,$$
$$5=2^3-2^2+2-1,$$
$$5=2^4-2^3-2^2+2-1,$$
$$5=2^5-2^4-2^3-2^2+2-1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut aussi reconnaître immédiatement que la somme des 2^{n-1} premiers nombres impairs est $2^{2(n-1)}$, ainsi qu'on le sait d'ailleurs par les éléments d'arithmétique.

2° Peut-être est-il bon d'observer que la formule (1) est un cas particulier, très-remarquable, à la vérité, d'une autre formule par laquelle on exprime en général un produit d'un nombre quelconque de cosinus au moyen d'une somme de cosinus.

Soient, en effet, n arcs quelconques, x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots, x_n$. On trouve, par la même voie qui nous a conduit à la formule (1),

$$\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cos x_4 \ldots \cos x_n$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum \cos(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm \ldots \pm x_n),$$

où la caractéristique sommatoire indique qu'il faut ajouter ensemble les cosinus de tous les arcs (au nombre de 2^{n-1}) qui sont donnés par l'expression

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm \ldots \pm x_n,$$

dans laquelle on combine de toutes les manières possibles les signes des $n - 1$ quantités $x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Cette formule, du reste, ne doit être regardée que comme une transformée de celle relative au cas particulier de $n = 2$, dont elle est engendrée.

4. Rappelons maintenant la formule

$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \ldots + \cos[a + (k - 1)b]$$
$$= \frac{\sin \frac{kb}{2} \cos\left(a + \frac{k-1}{2} b\right)}{\sin \frac{b}{2}},$$

qui sert à calculer la somme des cosinus d'une suite de k arcs en progression par différence.

Soit fait, dans cette formule,

$$a = \frac{x}{2^n}, \quad b = \frac{x}{2^{n-1}}, \quad k = 2^{n-1},$$

il en résultera

$$\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{3x}{2^n} + \cos\frac{5x}{2^n} + \ldots + \cos\frac{(2^n - 1)x}{2^n}$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2^n}}.$$

La formule (1) devient donc

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

et, en mettant le second membre sous la forme

$$\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2^n}}\,\frac{\sin x}{x},$$

on voit tout de suite qu'on aura, à la limite,

$$(2) \quad \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

quelle que soit la valeur de l'arc x.

C'est la relation d'Euler, qu'il s'agissait de démontrer. On voit, par ce qui précède, qu'elle est équivalente à la relation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{3x}{2^n} + \cos\frac{5x}{2^n} + \ldots + \cos\frac{(2^n - 1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{\sin x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty. \end{aligned} \right.$$

5. *Remarques*. — 1° Mettant la formule (2) sous la forme

$$\text{séc}\frac{x}{2}\,\text{séc}\frac{x}{2^2}\,\text{séc}\frac{x}{2^3}\,\text{séc}\frac{x}{2^4}\cdots = \frac{x}{\sin x},$$

ainsi que le fait Euler, et supposant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\text{séc}\frac{\pi}{2^2}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^3}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^4}\,\text{séc}\frac{\pi}{2^5}\cdots = \frac{\pi}{2},$$

résultat auquel M. Catalan est parvenu par une voie différente dans une Note qu'on lit dans les *Nouvelles Annales*, 1$^{\text{re}}$ série, t. I, p. 190.

2° Prenant la dérivée des deux membres de l'équation

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

on parvient à la relation

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}$$
$$= \frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x}.$$

Si n grandit indéfiniment, le nombre des termes du premier membre de cette formule devient illimité, et le second membre, qui exprime la somme de ces termes, tend indéfiniment vers la limite $\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x}$. On a donc

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \cdots = \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x}.$$

Ce résultat renferme la solution de la question 951 (Laisant), proposée dans les *Nouvelles Annales* (juillet

1869). Il avait été obtenu d'une manière directe par Euler, qui, par une marche inverse de celle qu'on vient de suivre, s'en est servi pour en déduire la relation (2). (*Voir* le Mémoire cité au n° 1; *voir* aussi, au sujet des questions 951 et 952, le *Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle,* par J. VIEILLE; 2e Partie, Chap. XI, n° 11.)

3° Prenant la dérivée des deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{3x}{2^n}+\cos\frac{5x}{2^n}+\ldots+\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right]$$
$$=\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\frac{x}{2^n}}\,\frac{\sin x}{x},$$

et faisant ensuite grandir n à l'infini, on obtient cette autre formule

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sin\frac{x}{2^n}+3\sin\frac{3x}{2^n}+5\sin\frac{5x}{2^n}+\ldots\right.\\&\qquad\qquad\left.+(2^n-1)\sin\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right]\\&=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x},\quad\text{pour}\quad n=\infty.\end{aligned}\right.$$

6. Soit la formule

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots+\sin[a+(k-1)b]$$
$$=\frac{\sin\frac{kb}{2}\sin\left(a+\frac{k-1}{2}b\right)}{\sin\frac{b}{2}},$$

qui fait connaître la somme des sinus de k arcs en progression par différence. Faisons-y

$$a=\frac{x}{2^n},\quad b=\frac{x}{2^{n-1}},\quad k=2^{n-1};$$

nous en conclurons, en observant que $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sin\frac{x}{2^n} + \sin\frac{3x}{2^n} + \sin\frac{5x}{2^n} + \ldots + \sin\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{1-\cos x}{x}, \quad \text{pour} \quad n = \infty, \end{aligned} \right.$$

et, par la différentiation,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\cos\frac{x}{2^n} + 3\cos\frac{3x}{2^n} + 5\cos\frac{5x}{2^n} + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (2^n-1)\cos\frac{(2^n-1)x}{2^n}\right] \\ &= \frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \text{pour} \quad n = \infty, \end{aligned} \right.$$

résultats assez remarquables, je crois, pour mériter d'être signalés.

Les formules (3), (4), (5), (6), et d'autres analogues qui s'ensuivent, peuvent être rapprochées des relations démontrées par M. Catalan dans son *Traité élémentaire des Séries*, p. 58, et dans une Note sur les séries divergentes, publiée dans les *Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 195.
