LAGUERRE

Sur la règle des signes en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 175-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__175_1>

SUR LA RÈGLE DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Lorsque, dans une figure, l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite, ou des angles ayant même sommet, tous les géomètres ont reconnu l'utilité et la nécessité d'affecter un signe à ces segments et à ces angles; le *Cours de Géométrie supérieure* de M. Chasles offre un exemple des nombreux avantages que l'emploi de la règle des signes a ainsi introduits dans la science.

Mais lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet, il semble généralement admis que la règle des signes n'est plus applicable. M. Chasles, dans la Préface de son Cours, exprime formellement cette idée :

« Si l'on ne démontre ordinairement, dit-il (Préface de la *Géométrie supérieure*, p. IX), une formule ou une relation que par une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux segments et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter à tous les états de la figure, il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment le plus ordinairement les éléments de démonstration, dans la Géométrie ancienne, ne comportent pas l'application du principe des signes. Telles sont la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables, *celle encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux sinus des angles opposés. La règle des signes ne s'applique point à ces propositions, puisque les segments que l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles autour de sommets différents.* »

Je me propose de faire voir, dans cette Note, que, contrairement à l'idée émise par l'illustre géomètre, la règle des signes s'applique à tous les théorèmes de Géométrie sans exception.

Je me bornerai à examiner, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus. Les considérations très-simples qui, dans ce cas, résolvent la question, s'étendent d'elles-mêmes à toutes les autres propositions; ce théorème, d'ailleurs, est l'un de ceux dont l'usage est le plus fréquent pour établir les relations qui existent entre des segments comptés sur des droites différentes, en sorte qu'il suffit presque d'établir, relativement à ce théorème, la règle des signes pour légitimer d'une façon générale l'emploi de cette règle.

2. Étant donnés un certain nombre de points situés sur une même droite, on peut assigner à cette droite un certain sens positif, en admettant qu'un point mobile, qui se mouvrait dans ce sens sur la droite, parcourt des longueurs positives. Cette assignation pourra, dans la plupart des cas, être faite arbitrairement; dans d'autres cas, au contraire, elle devra être faite d'une manière déterminée, en sorte que cette détermination elle-même sera une partie essentielle de la proposition de Géométrie que l'on aura à considérer.

Quoi qu'il en soit, cette assignation une fois faite, pour éviter toute confusion, je désignerai une droite sur laquelle on aura fixé le sens positif sous le nom de *direction*. Deux points A et B, se trouvant sur une direction donnée d, le segment AB a un signe parfaitement déterminé, et il est clair que ce signe change quand on change la direction de d.

Étant données deux directions a et b, l'angle (a, b) que fait la direction a avec la direction b est l'angle dont il faut faire tourner a autour de l'intersection des deux droites jusqu'à ce que les deux directions s'appliquent l'une sur l'autre et soient dirigées dans le même sens. Cet angle, on le voit, est déterminé, à un multiple près d'une circonférence entière; son sinus et son cosinus sont donc aussi parfaitement déterminés.

Étant donné l'angle (a, b) de deux directions, si l'une de ces directions change de sens, l'angle est augmenté d'une demi-circonférence; par conséquent, le sinus et le cosinus de cet angle changent de signe.

3. Cela posé, nous pourrons énoncer de la façon suivante la proposition relative à la proportionnalité des côtés d'un triangle aux sinus des angles opposés.

Proposition. — *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on assigne arbitrairement un sens positif aux trois droites qui forment les côtés de ce triangle, et si l'on désigne par* a, b, c *les trois directions ainsi obtenues*, a *étant la direction qui renferme les côtés* B *et* C, etc., *on a les relations suivantes, qui comportent la règle des signes*,

$$\frac{AB}{\sin(a, b)} = \frac{BC}{\sin(b, c)} = \frac{CA}{\sin(c, a)}.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'assigner aux côtés du triangle une direction déterminée : on vérifie facilement l'exactitude des formules ci-dessus. On peut remarquer maintenent que l'on peut, sans qu'elles cessent d'être exactes, prendre un côté quelconque dans un sens inverse à celui que l'on considérait tout d'abord.

Supposons, par exémple, que l'on change le sens de la direction a, BC changera alors de signe, ainsi que $\sin(a, b)$ et $\sin(c, a)$; les autres quantités ne subissant aucun changement, l'on voit que, dans la série d'égalités précédentes, chaque terme aura changé de signe : l'égalité ne sera donc pas troublée.

4. La proposition précédente étant établie en toute rigueur, je m'en servirai pour démontrer la relation qui existe entre le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites et le rapport anharmonique des quatre points où ce faisceau est coupé par une transversale quelconque.

M. Chasles (*Géométrie supérieure*, § XIII), pour établir cette relation, emploie aussi la proposition précédente; mais comme, pour lui, elle ne comporte pas l'emploi de la règle des signes, il démontre d'abord par son moyen que les deux rapports anharmoniques ont la même valeur absolue; il prouve ensuite, par une considération directe, qu'ils ont le même signe.

Il est facile de voir que le théorème de la proportionnalité des côtés aux sinus suffit pour la démonstration de l'égalité des deux rapports.

Soit un faisceau de quatre droites passant par un même point O; assignons à chacune de ces droites un sens positif abitraire, et soient a, b, c, d les quatre directions ainsi obtenues. Soient, de plus, A, B, C, D les points où une transversale quelconque coupe les droites de ce faisceau; donnons à cette transversale un sens positif pris arbitrairement, et appelons ω la direction de cette transversale. Cela posé, en appliquant au triangle OAB la proposition énoncée ci-dessus, il viendra

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sin(b,\ a)}{\sin(\omega,\ b)};$$

de même le triangle OAB donnera

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sin(d,\ a)}{\sin(\omega,\ d)},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\sin(b,\ a)}{\sin(\omega,\ b)} \cdot \frac{\sin(\omega,\ d)}{\sin(d,\ a)};$$

on aurait de même

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\sin(b,\ c)}{\sin(\omega,\ b)} \cdot \frac{\sin(\omega,\ d)}{\sin(d,\ c)},$$

d'où enfin

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\sin(a,\ b)}{\sin(a,\ d)} : \frac{\sin(c,\ b)}{\sin(c,\ d)},$$

égalité qui, ainsi que la proposition dont j'étais parti, comporte la règle des signes.

Il est à remarquer que la valeur du rapport anharmonique du faisceau de quatre droites donnée dans le second membre est indépendante du sens positif que l'on a assigné à ces droites; car, si l'on prend en sens contraire l'une de ces directions, la direction a par exemple, $\sin(a,\ b)$ et $\sin(a,\ d)$ changeant à la fois de signe, leur rapport reste invariable.

5. Sans multiplier davantage les exemples, j'énoncerai la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles situés d'une façon quelconque dans un plan est *convenablement et complétement énoncé*, il doit toujours comporter la règle des signes. »

Les divers théorèmes se distribuent en deux classes bien distinctes. Pour les uns, on peut choisir d'une façon arbitraire le sens dans lequel est prise la direction positive d'un certain nombre de droites, et alors le sens dans lequel on doit prendre les autres droites de la figure est déterminé par les théorèmes eux-mêmes, et cette détermination en est un élément essentiel : la façon dont elle est faite doit faire partie de l'énoncé lui-même de ces théorèmes.

Pour les autres, et ce sont les plus nombreux, le sens positif que l'on doit attribuer aux diverses droites de la figure est complétement arbitraire; et si les théorèmes sont convenablement énoncés, ils doivent être vérifiés quelle que soit la façon dont on fasse cette attribution.

Les considérations qui précèdent ne sont pas sans doute de nature à trouver place dans l'enseignement élémentaire; leur introduction compliquerait souvent et inutilement les questions; néanmoins, comme elles tiennent à un point de doctrine souvent controversé, j'ai cru qu'il n'était pas inutile de les présenter.