NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HERMANN

Problèmes d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 216-221

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__216_1>

PROBLÈMES D'EXAMEN;

PAR M. HERMANN,
Ancien Élève de l'École Normale.

1. *Trouver le plus grand coefficient du développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme.*

Le terme général du développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

On le déduit du précédent en le multipliant par

$$\frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x}.$$

Par conséquent, les termes iront en croissant tant que l'on aura

$$\frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x} > 1,$$

$$n < \frac{m+1}{a+x}.$$

Par conséquent, le terme maximum sera le terme dans lequel n sera remplacé par le plus grand nombre entier contenu dans

$$\frac{m+1}{a+x}.$$

Si le quotient de $m+1$ par $a+x$ est un nombre entier, il y a deux termes égaux dans le développement.

2. *Minimum du produit*

$$1.2\ldots x.1.2\ldots y.1.2\ldots z.1.2\ldots t\ldots$$

dans lequel les variables x, y, z, t,..., en nombre n, ont une somme constante et égale à m.

Théorème. — *Si l'on divise m par n et si q et r sont le quotient et le reste; le produit sera minimum si l'on prend $n-r$ des variables égales à q, et r égales à $q+1$.*

Ce théorème peut être considéré comme la conséquence des deux lemmes suivants, que je commencerai par démontrer.

Lemme I. — Si deux quantités entières, x et y, ont une somme paire égale à $2k$, le produit

$$(1)\qquad 1.2\ldots x.1.2\ldots y$$

est plus grand que le produit

$$(2)\qquad 1.2\ldots k.1.2\ldots k;$$

car si l'on a

$$y = x + a,$$

d'où

$$k = x + \frac{a}{2},$$

le produit (2) peut s'écrire

$$1.2\ldots\left(x + \frac{a}{2}\right) 1.2\ldots\left(x + \frac{a}{2}\right),$$

et le produit (1)

$$1.2\ldots x.1.2\ldots(x + a);$$

les facteurs $x + 1, x + 2, \ldots, x + \frac{a}{2}$ sont remplacés dans (1) par

$$x + \frac{a}{2} + 1, \quad x + \frac{a}{2} + 2, \quad x + a;$$

donc le produit (1) est plus grand que le produit (2).

Lemme II. — Si deux quantités entières, x et y, ont une somme impaire égale à $2k + 1$, le produit

$$1.2\ldots k.1.2\ldots y$$

est plus grand que le produit

$$1.2\ldots k.1.2\ldots(k + 1).$$

Le théorème énoncé est la conséquence immédiate de ces deux lemmes. Il en résulte immédiatement que, dans le produit minimum, deux facteurs ne sauraient différer de plus d'une unité. Par conséquent, les facteurs du produit sont égaux à q ou à $q + 1$. Soit a le nombre des facteurs égaux à $q + 1$. On aura

$$aq + b(q + 1) = m,$$
$$a + b = n,$$
$$m = nq + r.$$

On déduit de ces relations

$$a = n - r, \quad b = r.$$

3. *Trouver le plus grand coefficient de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme.*

Soit n le nombre des termes du polynôme, et soit

$$m = nq + r;$$

le plus grand coefficient est

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots x.1.2\ldots y.1.2\ldots z},$$

dans lequel $n - r$ des quantités x, y, z sont égales à q et r égales à $q + 1$.

4. *Trouver le plus grand terme de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme.*

THÉORÈME. — *Le plus grand terme du développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme est*

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha_1.1.2\ldots\beta_1.1.2\ldots\gamma_1} a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \frac{a}{\alpha_1+1}\,\frac{a}{\alpha_1+2}\cdots\frac{p}{\alpha_1+p}$$
$$\times \frac{b}{\beta_1+1}\,\frac{b}{\beta_1+2}\cdots\frac{b}{\beta_1+q}\cdots$$

dans lequel α_1, β_1, γ_1, ... représentent les résultats que l'on obtient en partageant m en parties proportionnelles à a, b, c, et en ne prenant que les parties entières des résultats, et dans lequel les fractions

$$\frac{a}{\alpha_1+1}, \quad \frac{a}{\alpha_1+2}, \ldots, \quad \frac{a}{\alpha_1+p},$$

sont les r plus grandes de toutes les fractions

$$\frac{a}{\alpha_1+1},\quad \frac{a}{\alpha_1+2},\ldots,$$
$$\frac{b}{\beta_1+1},\quad \frac{b}{\beta_1+2},\ldots,$$
$$\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots,\ldots,$$

r désignant l'excès de m sur la somme $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots$.

Le plus grand terme est évidemment

$$1.2\ldots m\,\frac{a}{1}\,\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{1}\,\frac{b}{2}\cdots\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{1}\,\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{\gamma}\cdots,$$

dans lequel les fractions $\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\alpha}, \ldots, \frac{b}{1}, \ldots$ sont les m plus grandes de toutes les fractions

$$\begin{array}{llll|ll}
\frac{a}{1}, & \frac{a}{2}, & \frac{a}{3},\ldots, & \frac{a}{\alpha_1}, & \frac{a}{\alpha_1+1}, & \frac{a}{\alpha_1+2},\ldots,\\
\frac{b}{1}, & \frac{b}{2}, & \frac{b}{3},\ldots, & \frac{b}{\beta_1}, & \frac{b}{\beta_1+1}, & \frac{b}{\beta_1+2},\ldots,\\
\frac{c}{1}, & \frac{c}{2}, & \frac{c}{3},\ldots, & \frac{c}{\gamma_1}, & \frac{c}{\gamma_1+1}, & \frac{c}{\gamma_1+2},\ldots,\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Or les fractions situées à droite de la barre verticale sont toutes plus petites que les fractions situées à gauche; il faudra donc prendre d'abord les $m-r$ fractions qui se trouvent à gauche, et prendre ensuite à droite les r plus grandes fractions

Exemple. — *Trouver le plus grand terme de la puissance* 15[e] *d'un quatrinôme* $(a+b+c+d)$ *dans lequel les quantités* a, b, c, d *ont les valeurs suivantes* :

$$a=2,\quad b=3,\quad c=\frac{14}{4},\quad d=5,$$
$$\alpha_1=2,\quad \beta_1=3,\quad \gamma_1=3,\quad \delta_1=5,$$
$$r=15-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1)=2.$$

Il faut donc prendre les deux plus grandes de toutes les fractions

$$\frac{2}{2+1},\quad \frac{2}{2+2},$$

$$\frac{3}{3+1},\quad \frac{3}{3+2},$$

$$\frac{\frac{14}{4}}{3+1},\quad \frac{\frac{14}{4}}{3+2},$$

$$\frac{5}{5+1},\quad \frac{5}{5+2}.$$

Les deux plus grandes fractions sont les fractions

$$\frac{\frac{14}{4}}{3+1},\quad \frac{5}{5+1}.$$

Par conséquent, le plus grand terme est

$$\frac{1.2.3\ldots15}{1.2.1.2.3.1.2.3.4.1.2.3.4.5.6}\,2^2 3^3 \left(\frac{14}{4}\right)^4 5^6.$$