NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Extrait d'une lettre adressée à M. Bourget

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 254-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__254_1>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BOURGET;

Par M. LAGUERRE.

Permettez-moi d'ajouter aux beaux théorèmes de Steiner et de M. Cremona, démontrés par M. Painvin, quelques propositions nouvelles, et fondamentales dans la théorie de l'hypocycloïde; elles se déduisent très-facilement des théorèmes généraux que j'ai donnés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (*Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques*, janvier 1865), et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (*Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, février 1867); j'en ai déduit, du reste, les principales conséquences relatives à l'hypocycloïde, dans le cours que j'ai professé cet hiver à la salle Gerson.

Les deux propositions fondamentales auxquelles donne lieu cette courbe sont les suivantes :

Théorème I. — *Les trois tangentes que, par un même point, on peut mener à l'hypocycloïde font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

Théorème II. — *Si, par un point* P, *on mène trois tangentes à l'hypocycloïde, et si l'on désigne par* A, B, C *les trois points de contact; si, sur le prolongement* *d'une quelconque de ces trois tangentes* PA, *on prend un point* A' *tel, que* PA' *soit le double de* PA, *les quatre points* P, A', B, C *sont sur une même circonférence et partagent harmoniquement cette circonférence.*

Voici quelques conséquences de ces propositions.

Soit une droite touchant la courbe au point M, et la coupant en P et R. Si l'on désigne par δ l'inclinaison de cette droite sur une quelconque des tangentes de rebroussement, et par ϖ l'inclinaison, sur cette tangente, de la tangente en P, on aura, en vertu du théorème I,

$$\delta + 2\varpi = \text{multiple de } \pi;$$

en désignant de même par ρ l'inclinaison sur cette tangente de la tangente au point R, on aura

$$\delta + 2\rho = \text{multiple de } \pi;$$

on déduit de là

$$2(\varpi - \rho) = \text{multiple de } \pi.$$

D'où l'on voit que

$$\varpi - \rho = 0, \quad \text{ou bien} \quad = \frac{\pi}{2}.$$

Deux tangentes à l'hypocycloïde ne pouvant être parallèles, on a

$$\varpi - \rho = \frac{\pi}{2}.$$

Donc les tangentes aux points P et R sont perpendiculaires entre elles.

Considérons maintenant les trois tangentes PA, PB et PC issues d'un même point P, et supposons que deux d'entre elles, PB et PC, soient rectangulaires; si nous prolongeons AP d'une longueur double d'elle-même au delà du point P, l'extrémité A' du segment ainsi obtenu sera sur la circonférence passant par les points P, B, C, et sur cette circonférence sera le conjugué harmonique du point P; mais, d'après les propriétés bien connues de la division harmonique sur un cercle, l'angle $\widehat{BPC}$ étant droit, la ligne BC est perpendiculaire sur PA', c'est-à-dire sur PA.

Donc, si deux des tangentes issues d'un point P sont rectangulaires, la corde des contacts de ces deux tangentes est perpendiculaire à la troisième tangente issue du même point.

Vos lecteurs trouveront peut-être quelque intérêt à rapprocher ces démonstrations géométriques des démonstrations analytiques données par M. Painvin.

On peut ajouter ici la proposition suivante, remarquable par sa simplicité et son élégance :

Si d'un point A *de l'hypocycloïde, on mène à la courbe la tangente dont le point de contact ne coïncide pas avec* A; *en désignant par* T *le point de contact de cette tangente, si l'on prolonge* TA *d'une longueur égale à elle-même, le point* T', *extrémité de ce prolongement, est le foyer de la parabole qui surosculé en* A *l'hypocycloïde.*