Nouvelles annales de mathématiques

L. Painvin

Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 256-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__256_1>

NOTE SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

(suite et fin, voir 2e série, t. IX, p. 202);

PAR M. L. PAINVIN.

§ II. — *Propriétés principales de l'hypocycloïde.*

6. Donnons d'abord l'interprétation géométrique de l'équation (III *bis*), n° 2.

D'après la relation (3), n° 2, on a

$$X + Y + Z = \frac{9a}{2}.$$

On sait d'ailleurs que l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$YZ + ZX + XY = 0;$$

et, d'après les formules (2) du n° 2, on a l'identité

$$XY + YZ + ZX = -\frac{3}{4}(x^2 + y^2 - a^2).$$

Si l'on désigne par $\overline{MI}.\overline{MI}'$ le produit des distances. comptées sur le diamètre OM, d'un point quelconque M de l'hypocycloïde au cercle directeur, et que MP, MQ, MR soient les distances du même point M aux trois côtés du triangle équilatéral ABC, l'équation (III), n° 2, nous conduit à la relation

$$(MI.MI')^2 = 32a.\overline{MP}.\overline{MQ}.\overline{MR}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème V. — *Le carré de la puissance d'un point quelconque de la courbe par rapport au cercle directeur divisé par le produit des distances du même point aux côtés du triangle ayant pour sommets les trois points de rebroussement, est constant et égal à trente-deux fois le tiers du rayon du cercle directeur.*

7. L'équation tangentielle (IV), n° 3, nous conduit à une relation fort remarquable entre les distances des sommets du triangle de référence à une tangente quelconque.

Si l'on désigne par δ, δ_1, δ_2, δ_3 les distances des points O, A, B, C à la tangente (u, v, w), on a

$$\delta_1 = u, \quad \delta_2 = v, \quad \delta_3 = w, \quad \delta = \frac{u + v + w}{3};$$

cette dernière valeur résulte de ce que le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

D'après cela, l'équation (IV), n° 3, nous donne

$$\delta^3 = \delta_1 \delta_2 \delta_3;$$

d'où :

Théorème VI. — *Le cube de la distance du centre du cercle directeur à une tangente quelconque est égal au produit des distances, à cette même tangente, des trois points de rebroussement.*

8. L'équation (1) du n° 1, savoir :

$$\text{(T)} \qquad (7) \quad x \sin\frac{\alpha}{2} + y \cos\frac{\alpha}{2} = a \sin\frac{3\alpha}{2}$$

peut être considérée comme l'équation d'une tangente parallèle à une direction donnée, en regardant α comme connu; les coordonnées du point de contact de cette tangente seront toujours données par les formules

$$\text{(M)} \quad (7\ bis) \quad x = a(2\cos\alpha + \cos 2\alpha), \quad y = a(2\sin\alpha - \sin 2\alpha).$$

On voit par là qu'il n'y a qu'*une seule tangente*, à distance finie, *parallèle à une direction donnée.*

Considérons une seconde tangente

$$x \sin\frac{\beta}{2} + y \cos\frac{\beta}{2} = a \sin\frac{3\beta}{2};$$

cette seconde tangente sera perpendiculaire à la première si l'on suppose $\beta = \alpha + \pi$, et son équation deviendra alors

$$(8) \qquad x \cos\frac{\alpha}{2} - y \sin\frac{\alpha}{2} = -a \cos\frac{3\alpha}{2}.$$

Si, après avoir élevé au carré, on ajoute membre à membre les équations (7) et (8), on trouve

$$(\varphi) \qquad (9) \quad x^2 + y^2 = a^2;$$

c'est-à-dire que deux tangentes rectangulaires se coupent sur le cercle (φ) de rayon a.

9. Un point quelconque P du cercle (φ) ou (9) peut se définir par les égalités

(P) $\qquad$ (10) $\quad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi;$

du point P, on peut mener trois tangentes à l'hypocycloïde; pour avoir les paramètres relatifs aux points de contact de ces tangentes, il suffira de transporter dans l'équation (7) les valeurs (10) qui précèdent; on trouve ainsi

$$\sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{3\alpha}{2}.$$

On tire de là, pour α, les trois valeurs suivantes, qu sont les seules distinctes :

$$(11) \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_3 = \varphi.$$

Les trois tangentes menées du point P, ou (10), à l'hypocycloïde et leurs points de contact auront alors pour équations respectives

$$(12)\left\{\begin{array}{ll}
(T_1) & x\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{4}\right); \\
(T_2) & x\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) - y\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{4}\right); \\
(T_3) & x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = a\sin\frac{3\varphi}{2}; \\
(M_1) & \left\{\begin{array}{l} x_1 = a\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right), \\ y_1 = a\left(2\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right); \end{array}\right. \\
(M_2) & \left\{\begin{array}{l} x_2 = a\left(-2\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right), \\ y_2 = a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right); \end{array}\right. \\
(M_3) & \left\{\begin{array}{l} x_3 = a(2\cos\varphi + \cos 2\varphi), \\ y_3 = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi). \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

La droite qui joint les deux points M_1 et M_2 a pour équation

$$(13) \qquad x \cos \frac{\varphi}{2} - y \sin \frac{\varphi}{2} = - a \cos \frac{3\varphi}{2};$$

si l'on suppose $\varphi = \pi + \alpha$, on retrouve la forme de l'équation d'une tangente.

A l'aide de ces formules, on constate immédiatement que les tangentes T_1 et T_2 sont rectangulaires; que la troisième tangente T_3 est perpendiculaire à la droite $M_1 M_2$ qui joint les points de contact des deux premières; la droite $M_1 M_2$ est également une tangente de l'hypocycloïde et est parallèle au diamètre passant par les points où les tangentes T_1 et T_2 rencontrent le cercle de rayon a.

De là la proposition suivante :

Théorème VII. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde est le cercle de rayon a, concentrique au cercle directeur, et triplement tangent à la courbe.* Nommons φ ce cercle.

Si, d'un point quelconque du cercle φ, *on mène les trois tangentes à l'hypocycloïde, deux d'entre elles sont rectangulaires, et par suite coupent le cercle* φ *en deux points situés sur un même diamètre; la troisième tangente est perpendiculaire à ce diamètre et à la droite qui joint les points de contact des deux premières; cette dernière droite est également tangente à l'hypocycloïde.*

10. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Si l'on mène une tangente quelconque*, T_0, *à l'hypocycloïde, les tangentes* T_1 *et* T_2 *aux deux autres points d'intersection de* T_0 *avec la courbe se coupent sur le cercle* φ; *par suite,* T_1 *et* T_2 *se* *coupent à angle droit, et la troisième tangente,* T_3, *qu'on peut mener du point où elles se coupent, est perpendiculaire à la première tangente* T_0.

(Cremona, n^os 2, 3.)

Cette propriété, qui est une conséquence de celle qui précède, peut encore s'établir directement comme il suit.

Considérons une tangente quelconque T_0

$$(14)\qquad (T_0)\quad x\sin\frac{\alpha_0}{2}+y\cos\frac{\alpha_0}{2}=a\sin\frac{3\alpha_0}{2}.$$

Pour déterminer les points où la tangente T_0 rencontre encore la courbe, remplaçons dans l'équation (14) x et y par les valeurs (7 *bis*), n° 8; on trouve ainsi

$$2\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_0}{2}\right)=\sin\left(2\alpha-\frac{\alpha_0}{2}\right)+\sin\frac{3\alpha_0}{2};$$

d'où

$$\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha-\alpha_0}{2}=0,$$

et par suite

$$(15)\qquad \alpha_1=-\frac{\alpha_0}{2},\qquad \alpha_2=\pi-\frac{\alpha_0}{2}.$$

On aura immédiatement les équations des tangentes aux points qui correspondent aux valeurs précédentes du paramètre α, et de là on conclura la proposition énoncée.

11. L'équation (7), n° 8, nous conduit encore très-aisément à l'équation de la *podaire* du point O; il suffit, pour cela, d'éliminer $\frac{\alpha}{2}$ entre cette équation et l'équation suivante de la perpendiculaire menée du point O à cette tangente :

$$x\cos\frac{\alpha}{2}-y\sin\frac{\alpha}{2}=0.$$

On trouve, pour l'équation de cette podaire,

$$(16) \quad (x^2+y^2)^2 = a\,x(3y^2-x^2), \quad \text{ou} \quad \rho = -a\cos 3\omega.$$

Ainsi :

Théorème IX. — *La* podaire *du point* O, *par rapport à l'hypocycloïde, est une courbe du quatrième ordre; elle a, à l'origine, un point triple dont les tangentes sont parallèles aux côtés du triangle* A'B'C' (*fig.* 1) : *les droites* OA, OB, OC *sont des axes de symétrie; la courbe est de sixième classe; la droite de l'infini est également une tangente double. Cette courbe possède quatre tangentes doubles réelles et six points d'inflexion; elle est tangente à l'hypocycloïde aux trois points* A', B', C'. *Les branches de la podaire et les droites* OA, OB, OC *divisent en quatre parties égales les côtés du triangle* A'B'C'.

§ III. — *Propriétés des polaires d'une droite relatives à l'hypocycloïde.*

12. L'équation tangentielle de l'hypocycloïde

$$(1) \qquad (u+v+w)^3 = 27\,uvw$$

nous fait connaître des propriétés fort remarquables relatives aux polaires d'une droite.

On sait que la première polaire d'une droite (u_0, v_0, w_0) par rapport à la courbe

$$F(u, v, w) = 0$$

a pour équation (*Géométrie analytique*, n° 464)

$$u_0 \frac{dF}{du} + v_0 \frac{dF}{dv} + w_0 \frac{dF}{dw} = 0.$$

Dans le cas de l'hypocycloïde, nous trouvons, pour l'équation de la *première polaire* de la droite $D(u_0, v_0, w_0)$,

$$\text{(P)}\qquad (2)\qquad (u_0+v_0+w_0)(u+v+w)^2 = 9(u_0 vw + v_0 wu + w_0 uv).$$

On voit de suite que cette dernière courbe est une parabole, car elle est touchée par la droite de l'infini dont les coordonnées sont, dans le système actuel,

$$u = v = w.$$

13. Déterminons les foyers de la parabole (P). Les foyers d'une courbe sont les intersections des tangentes menées à cette courbe par les points circulaires à l'infini. Comme la droite de l'infini est tangente à la parabole, les deux foyers imaginaires coïncideront avec les points circulaires à l'infini; les deux foyers réels seront, l'un à distance finie, l'autre à l'infini, sur la direction de l'axe.

L'équation tangentielle des points circulaires à l'infini est

$$(3)\qquad u^2 + v^2 + w^2 - vw - wu - uv = 0;$$

et, après avoir posé

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} m+1 &= \frac{3u_0}{u_0+v_0+w_0},\\ n+1 &= \frac{3v_0}{u_0+v_0+w_0},\\ p+1 &= \frac{3w_0}{u_0+v_0+w_0},\end{aligned}\right.$$

d'où résulte la relation

$$(5)\qquad m+n+p=0,$$

l'équation générale des courbes de deuxième classe touchant les tangentes communes aux courbes (2) et (3), c'est-à-dire touchant les droites menées des points circulaires à l'infini tangentiellement à la parabole (P), sera

$$(6)\quad \begin{cases} (\lambda+1)u^2+(\lambda+1)v^2+(\lambda+1)w^2-(\lambda+1+3m)vw \\ \qquad -(\lambda+1+3n)wu-(\lambda+1+3p)uv=0. \end{cases}$$

Si l'on exprime que la courbe (6) se réduit à deux points, ces points seront les intersections des tangentes communes, c'est-à-dire les foyers de la parabole. Or, pour que l'équation (6) représente deux points, il faut que le premier membre soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, ce qui conduit à l'équation de condition

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\dfrac{\lambda+1+3p}{2} & -\dfrac{\lambda+1+3n}{2} \\ -\dfrac{\lambda+1+3p}{2} & \lambda+1 & -\dfrac{\lambda+1+3m}{2} \\ -\dfrac{\lambda+1+3n}{2} & -\dfrac{\lambda+1+3m}{2} & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (6) se réduisant à deux points qui doivent être les foyers, et, parmi ces foyers, deux devant coïncider avec les points circulaires à l'infini représentés par l'équation (3), il en résulte que l'équation en λ admettra deux racines infinies; les deux foyers réels correspondront à la valeur finie de λ; l'axe de la parabole sera la droite qui joint ces deux foyers.

L'équation (7) développée donne, eu égard à la relation (5),

$$\lambda+1=\frac{3mnp}{mn+np+pm};$$

et l'équation (6) devient

$$(8)\quad \begin{cases} u^2+v^2+w^2 \\ \quad +\dfrac{m^2-2np}{np}vw+\dfrac{n^2-2pm}{pm}wu+\dfrac{p^2-2mn}{mn}uv=0; \end{cases}$$

on constate très-aisément que cette dernière équation peut s'écrire

$$(mu + nv + pw)\left(\frac{u}{m} + \frac{v}{n} + \frac{w}{p}\right) = 0.$$

Il résulte de là que les deux foyers réels de la parabole sont

$$(9)\qquad \begin{cases} (\mathrm{F}) & \dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n} + \dfrac{w}{p} = 0, \\ (\mathrm{F}') & mu + nv + pw = 0; \end{cases}$$

on a toujours la relation

$$(9\ bis)\qquad m + n + p = 0.$$

Le second foyer F′ est à l'infini, car son équation est vérifiée par les coordonnées $u = v = w$ de la droite de l'infini.

14. Si l'on considère une droite $D'(u'_0, v'_0, w'_0)$ parallèle à la droite $D(u_0, v_0, w_0)$, les coordonnées de la première droite seront

$$u'_0 = u_0 + k,\quad v'_0 = v_0 + k,\quad w'_0 = w_0 + k;$$

et si l'on pose

$$m' + 1 = \frac{3u'_0}{u'_0 + v'_0 + w'_0},$$

$$n' + 1 = \frac{3v'_0}{u'_0 + v'_0 + w'_0},$$

$$p' + 1 = \frac{3w'_0}{u'_0 + v'_0 + w'_0},$$

on constate de suite que

$$(10)\qquad \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{u_0 + v_0 + w_0}{u_0 + v_0 + w_0 + 3k}.$$

On voit par là que, pour la parabole correspondant à la nouvelle droite D′, les foyers F et F′ ne changent pas; les premières polaires des droites parallèles ont donc les mêmes foyers.

15. L'axe de la parabole (P) est perpendiculaire à la droite D.

On voit, en effet, d'après les équations (9), que les coordonnées trilatères des foyers F et F′ sont données par les égalités

$$mX = nY = pZ, \quad \frac{X}{m} = \frac{Y}{n} = \frac{Z}{p};$$

l'équation de l'axe de la parabole sera, par conséquent,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ m & n & p \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{n} & \frac{1}{p} \end{vmatrix} = 0;$$

quant à l'équation ponctuelle de la droite D, elle est

$$u_0 X + v_0 Y + w_0 Z = 0,$$

ou

$$(m+1)X + (n+1)Y + (p+1)Z = 0.$$

Or la condition d'orthogonalité de deux droites (*Géométrie analytique*, n° 100) est satisfaite pour ces deux dernières droites; la vérification en est immédiate.

On a donc la proposition suivante :

Théorème X. — *La première polaire, par rapport à l'hypocycloïde, d'une droite quelconque* D *est une parabole* (P); *l'axe de la parabole* (P) *est perpendiculaire à la droite* D, *et les premières polaires des droites parallèles sont des paraboles homofocales.*

16. Lorsque la droite D (u_0, v_0, w_0) est tangente à l'hypocycloïde, on a

$$(u_0 + v_0 + w_0)^3 = 27\, u_0 v_0 w_0;$$

on voit alors que la parabole (2), n° **12**, est également touchée par cette droite; et si l'on se rappelle que le point de contact d'une tangente (u_0, v_0, w_0) à la courbe $F(u, v, w) = 0$ est donné par l'équation

$$u\frac{dF}{du_0} + v\frac{dF}{dv_0} + w\frac{dF}{dw_0} = 0,$$

on constate que la droite D touche l'hypocycloïde (1) et la parabole (2) au même point; comme l'axe de la parabole est perpendiculaire à la droite D, il s'ensuit que ce point de contact commun est le sommet de la parabole. Donc :

THÉORÈME XI. — *La première polaire d'une tangente à l'hypocycloïde est une parabole ayant cette droite pour tangente au sommet, et pour sommet le point de contact de cette droite avec l'hypocycloïde. Le lieu des sommets des premières polaires des tangentes à l'hypocycloïde est donc l'hypocycloïde même; l'axe de la première polaire est une normale à la courbe, l'enveloppe de cet axe est donc la développée de l'hypocycloïde.*

17. Les coordonnées trilatères du foyer à distance finie sont, d'après la première des équations (9),

$$mX = nY = pZ;$$

le lieu de ces foyers s'obtiendra en éliminant m, n, p, entre ces équations et la relation

$$m + n + p = 0;$$

on trouve ainsi le cercle circonscrit au triangle ABC

$$YZ + ZX + XY = 0.$$

Donc:

Théorème XII. — *Le lieu des foyers des premières polaires d'une droite quelconque est le cercle directeur de l'hypocycloïde.*

18. *Remarque.* — Les propriétés que je viens d'indiquer se trouvent énoncées dans le Mémoire de M. Cremona, nos 24, 25,... La parabole (P) que je considère ici, se rattache à la théorie générale des polaires d'une droite; cette parabole est la même que celle qui s'est présentée à M. Cremona, et qu'il définit par la condition de toucher les tangentes à l'hypocycloïde aux quatre points où cette courbe est rencontrée par la droite D. L'identité est manifeste, d'après cette propriété fondamentale que j'ai établie dans la théorie des polaires d'une droite : « Les tangentes aux points où une droite rencontre une » courbe sont en même temps tangentes à la première » polaire de cette droite. »

19. Cherchons maintenant l'enveloppe des axes des paraboles P.

Il suffit pour cela d'éliminer m, n, p entre les équations (9) et (9 *bis*), n° 13; on trouve ainsi

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} u^3 + v^3 + w^3 \\ \qquad - (u^2 v + u^2 w + v^2 u + v^2 w + w^2 u + w^2 v) + 3uvw = 0. \end{array}\right.$$

J'ai montré, dans la théorie générale des polaires d'une droite, que la courbe

$$H = \begin{vmatrix} \frac{d^2F}{du^2} & \frac{d^2F}{du\,dv} & \frac{d^2F}{du\,dw} \\ \frac{d^2F}{dv\,du} & \frac{d^2F}{dv^2} & \frac{d^2F}{dv\,dw} \\ \frac{d^2F}{dw\,du} & \frac{d^2F}{dw\,dv} & \frac{d^2F}{dw^2} \end{vmatrix} = 0$$

est l'enveloppe des droites pour lesquelles les polaires de deuxième classe relatives à la courbe $F(u, v, w) = 0$ se réduisent à deux points. Or on trouve pour l'hypocycloïde que l'équation (11) est précisément celle de la courbe H. Ainsi :

THÉORÈME XIII. — *L'enveloppe des axes des premières polaires d'une droite quelconque relatives à l'hypocycloïde est la développée de l'hypocycloïde, et cette développée est identique avec la courbe* H, *enveloppe des droites dont les premières polaires se réduisent à deux points.*

20. Étudions de plus près la nature de cette enveloppe; son équation est

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^3 + v^3 + w^3 \\ \qquad - (u^2 v + u^2 w + v^2 u + v^2 w + w^2 u + w^2 v) + 3 uvw = 0. \end{array} \right.$$

Rapportons la courbe (11) au triangle équilatéral $A_1 B_1 C_1$, inscrit dans le cercle de rayon $9a$, et homothétique inverse du triangle ABC.

Les coordonnées cartésiennes du point A_1 sont

$$y = 0, \quad x = -9a;$$

et, d'après les formules (2), n° 2, ses coordonnées trilatères relatives au triangle ABC seront

$$X_0 = -\frac{15a}{2}, \quad Y_0 = 6a, \quad Z_0 = 6a;$$

l'équation tangentielle du point A_1 sera, par conséquent,

$$X_0 u + Y_0 v + Z_0 w = 0,$$

c'est-à-dire

$$-5u + 4v + 4w = 0.$$

Si nous considérons une droite quelconque (u, v, w), la distance du point A_1 à cette droite sera

$$\frac{-5u+4v+4w}{3}.$$

D'après cela, si nous désignons par U, V, W les distances des points A_1, B_1, C_1 à la droite (u, v, w), on aura les formules de transformation

$$(12)\qquad \begin{cases} 3U = -5u+4v+4w, \\ 3V = 4u-5v+4w, \\ 3W = 4u+4v-5w; \end{cases}$$

d'où

$$(12\ bis)\qquad \begin{cases} 9u = U+4V+4W, \\ 9v = 4U+V+4W, \\ 9w = 4U+4V+W. \end{cases}$$

Si l'on substitue, dans l'équation (11), les valeurs (12 *bis*) de u, v, w, on aura l'équation de la courbe (H) rapportée au triangle $A_1B_1C_1$; on trouvera ainsi

$$(13)\qquad (U+V+W)^3 = 27UVW.$$

De là cette proposition :

Théorème XIV. — *La courbe* (H), *ou la développée de l'hypocycloïde, est une hypocycloïde inversement homothétique de la première; le rapport d'homothétie est $\frac{1}{3}$. La développée touche le cercle directeur aux points de rebroussement de l'hypocycloïde primitive.*

21. Je ne ferai qu'énoncer le théorème suivant :

Théorème XV. — *Les premières polaires des axes des paraboles* (P) *se réduisent à deux points, dont un est à l'infini; le lieu du second point* (f), *à distance finie, est encore le cercle directeur de l'hypocycloïde; les points* (F) *et* (f) *sont diamétralement opposés,* (F) *étant le foyer, à distance finie, de la parabole* (P).