Nouvelles annales de mathématiques

B. Niewenglowski

# Étude sur la sphère

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 9 (1870), p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__26_1>

# ÉTUDE SUR LA SPHÈRE;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI,
Agrégé, Professeur à Mont-de-Marsan.

## I.

Soit un arc de grand cercle OX (*) passant par un point fixe O, pris comme pôle; un point M, sur la sphère, est déterminé par l'angle MOX, et l'arc de grand cercle OM. Quand ce dernier est supérieur à $\pi$, M aura pour coordonnées $\omega = \text{MOX}$ et $\rho = -(2\pi - \text{OM})$.

## II.

Considérons une courbe sphérique donnée par l'équation $\rho = f(\omega)$. Pour déterminer la tangente sphérique en un quelconque, M, de ses points, nous chercherons la tangente trigonométrique de l'angle V, qu'elle fait avec

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

le rayon vecteur correspondant, cet angle étant compté comme on le fait en géométrie analytique, avec les coordonnées polaires.

Soit M' un point de la courbe, infiniment voisin de M, et prenons sur OM', OP = OM. Le triangle sphérique MPM', rectangle en P, nous donne

$$\begin{aligned} \sin M' &= \sin MM' \sin MP, \\ \sin M &= \sin MM' \sin M'P, \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \lim. \frac{\sin MP}{\sin M'P} = \lim. \frac{MP}{M'P}.$$

Or, l'arc de petit cercle de rayon sphérique OM, et de pôle O, est égal à

$$\sin \rho . \Delta\omega \quad (R = 1).$$

Donc

$$\operatorname{tang} V = \lim. \frac{\sin \rho . \Delta\omega}{\Delta\rho} \times \lim. \frac{MP}{\sin \rho . \Delta\omega} = \frac{\sin \rho}{\rho'}.$$

Si nous posons

$$\operatorname{tang} \frac{\rho}{2} = u,$$

on peut écrire

$$\operatorname{tang} V = \frac{u}{u'}.$$

Il résulte de là, que si l'on trace la courbe plane $u = f(\omega)$, on pourra regarder comme correspondants deux points pris, l'un sur cette courbe, l'autre sur la courbe sphérique $\rho = f(\omega)$, et pour lesquels $\omega$ sera le même. En deux points correspondants, V a la même valeur.

## III.

Soient maintenant $\rho = f(\omega)$, $\rho_1 = f_1(\omega)$ deux courbes sphériques. Les deux courbes planes correspondantes seront $u = f(\omega)$, $u_1 = f_1(\omega)$. Si l'on a $uu_1 = \text{const.}$, les deux courbes planes sont réciproques, $\tang V + \tang V_1 = 0$. On peut dire que les deux courbes sphériques sont réciproques ou inverses.

On peut arriver directement au même résultat. De $uu_1 = \text{const.}$ on tire

$$\frac{u'}{u} + \frac{u'_1}{u_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u'} = -\frac{u'}{u'_1}, \quad \operatorname{tang} V + \operatorname{tang} V_1 = 0,$$

et *vice versâ*.

On voit facilement que sur la sphère, l'angle de deux lignes est égal à celui de leurs inverses.

## IV.

La figure sphérique inverse d'un cercle est un cercle.

Soient, en effet, deux petits cercles de pôles P, $P_1$, et O un de leurs centres de similitude. Tout grand cercle mené par ce dernier point coupe les cercles P et $P_1$ sous le même angle, et l'on a

$$\operatorname{tang} V + \operatorname{tang} V_1 = 0 \quad \text{ou} \quad uu_1 = \text{const.}$$

Donc ces deux cercles sont réciproques.

*Remarque.* — Si l'on prend pour pôle un point d'un petit cercle, on obtient pour figure inverse un petit cercle, et jamais un grand cercle. Mais avec un pôle non situé sur le petit cercle on peut déterminer la constante de manière à obtenir un grand cercle. Enfin la figure inverse d'un grand cercle est un petit cercle.

## V.

Dans un triangle sphérique, les trois arcs hauteurs, ou les trois arcs bissecteurs sont concourants. Transformons, et nous trouverons les mêmes propriétés dans un triangle formé par les arcs de petits cercles.

Si dans un triangle sphérique de base constante, la différence entre la somme des deux angles adjacents à la base et le troisième est constante, le lieu du troisième sommet est un petit cercle qui passe par les deux sommets fixes.

Le théorème subsiste avec un triangle circulaire.

Le lieu des points de contact des petits cercles tangents entre eux et à deux grands cercles qui se coupent est un grand cercle qui passe par les points d'intersection des deux premiers.

En transformant, on trouve que le lieu des points de contact de deux petits cercles tangents entre eux et à deux petits cercles qui se coupent est un petit cercle qui passe par les points d'intersection des deux petits cercles donnés.

## VI.

Les résultats précédents ont été obtenus par une transformation opérée sur la sphère. On peut y arriver autrement.

Remarquons d'abord que la courbe plane $u = f(\omega)$ n'est autre chose que la projection stéréographique de la courbe sphérique $\rho = f(\omega)$, en prenant pour point de vue le point diamétralement opposé au pôle, et pour tableau le plan du grand cercle perpendiculaire au rayon qui va au pôle.

Cela posé, prenons par exemple un triangle sphérique ABC de base AB constante, et dans lequel

$$A + B - C = \text{const.};$$

le lieu de C est un petit cercle qui passe par A et B. La projection stéréographique donne un triangle circulaire plan $a$, $b$, $c$ dans lequel

$$a + b - c = \text{const.}$$

$a$ et $b$ sont fixes. Le lieu de $c$ est un cercle qui passe par $a$ et $b$. Transformons par rayons vecteurs réciproques. La figure $a$, $b$, $c$ obtenue est la projection stéréographique d'une figure sphérique A, B, C formée par des arcs de petits cercles, etc.

Ainsi la transformation étudiée revient à trois transformations successives par rayons vecteurs réciproques.