NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LEMOINE

Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle ABC

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 311-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__311_1>

NOTE SUR L'EXPRESSION DE LA DISTANCE ENTRE QUELQUES POINTS REMARQUABLES D'UN TRIANGLE ABC;

PAR M. E. LEMOINE,
Professeur.

---

a, b, c sont les longueurs des trois côtés BC, AC, AB;

R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits;

O, I, I_a, I_b, I_c les centres de ces mêmes cercles;

M, N, H le centre de gravité du triangle, le centre du cercle des neuf points, le point de concours des hauteurs.

Lemme I. — *Soit μ un point du plan du triangle* ABC; *soient* M_a, M_b, M_c *les milieux de ses côtés; si l'on mène respectivement par* M_a, M_b, M_c *des parallèles à* $A\mu$, $B\mu$, $C\mu$:

1° *Ces trois droites se couperont au point* ω;

2° ωM *et* μ *sont en ligne droite;*

3° $\dfrac{OM}{M\mu} = \frac{1}{2}$.

Cela résulte immédiatement de l'homothétie inverse des triangles ABC, $M_a M_b M_c$, avec M pour centre d'homothétie.

Lemme II. — *On a avec les mêmes notations*

$$4\overline{\mu\omega}^2 = 3(\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En effet, d'après le théorème qui donne la somme des carrés des distances d'un point μ à trois autres A, B, C en fonction des distances de ces points au centre de gravité M, on a

$$\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2 = 3\overline{\mu M}^2 + \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2.$$

Mais dans un triangle, on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

et, d'après le lemme I, on a

$$\mu M = \tfrac{2}{3}\,\mu\omega;$$

donc enfin

$$4\overline{\mu\omega}^2 = 3(\overline{\mu A}^2 + \overline{\mu B}^2 + \overline{\mu C}^2) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Lemme III. — *Si, dans un triangle* ABC, *on prend sur* BC *un point* S *tel que* $\frac{SC}{SB} = \frac{1}{2}$, *on aura*

$$\overline{AS}^2 = \frac{6b^2 + 3c^2 - 2a^2}{9}.$$

Théorème I. — *La distance du point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit a pour expression*

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En effet, prenons le point O pour point appelé μ dans les lemmes I et II, on aura

$$4\overline{O\omega}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

D'après le lemme I, on a

$$OM = \tfrac{2}{3}O\omega$$

Du reste, on sait que, dans un triangle, on a

$$OM = \tfrac{1}{3}OH;$$

donc

$$OH = 2O\omega,$$

et par suite

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Remarque. — Le point ω est ici le milieu de OH, c'est-à-dire le centre N du cercle des neuf points.

Théorème II. — *La distance du point de concours des hauteurs au centre du cercle inscrit est donnée par*

$$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Celle du point de concours des hauteurs au centre du *cercle exinscrit I_a par*

$$\overline{I_aH}^2 = 4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Dans le triangle IOH, la médiane IN est $\frac{R}{2} - r$, puisque le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit; mais on a

$$\overline{OI}^2 + \overline{IH}^2 = 2\overline{IN}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{2};$$

donc

$$R(R-2r) + \overline{IH}^2 = 2\left(\frac{R}{2} - r\right)^2 + \frac{9R^2}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{2};$$

d'où enfin

$$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

On établirait de même la formule relative au cercle exinscrit en considérant le triangle I_aOH.

Théorème III. — *La distance du centre du cercle inscrit au centre de gravité est donnée par la formule*

$$IM^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 6r(2R-r)\right];$$

celle du centre du cercle exinscrit de centre I_a par

$$\overline{I_aM}^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 6r_a(2R+r_a)\right].$$

Dans le triangle ION, on a

$$\frac{MN}{MO} = \frac{1}{2}.$$

On peut donc calculer MI par la formule du lemme III, et l'on aura

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \frac{6\left(\frac{\mathrm{R}-2r}{2}\right)^2 + 3(\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r) - \left[\frac{9\mathrm{R}^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\right]}{9};$$

d'où

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \tfrac{1}{9}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 6r(2\mathrm{R}-r)\right].$$

En considérant le triangle $\mathrm{I}_a\mathrm{ON}$, on aurait la formule relative au cercle exinscrit.

Remarque. — On a

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{R}(\mathrm{R}-2r),$$
$$\mathrm{IN} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{R}-2r);$$

d'où

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = 2\mathrm{R}.\mathrm{IN},$$

c'est-à-dire que :

La distance des centres des cercles circonscrit et inscrit est moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle des neuf points.

On a aussi

$$\overline{\mathrm{OI}_a}^2 = 2\mathrm{R}.\mathrm{I}_a\mathrm{N}, \ldots.$$

PROBLÈME D'EULER.

Euler s'est occupé de construire un triangle, connaissant les trois points que nous avons nommés I, M, H. Nous allons déduire de ce qui précède une solution de la plus grande simplicité.

En prolongeant HM de $\mathrm{MO} = \frac{\mathrm{HM}}{2}$, on aura O, centre du cercle circonscrit.

Le milieu N de OH sera le centre du cercle des neuf points. Donc, d'après la remarque du théorème III,

$$R = \frac{\overline{OI}^2}{2\,IN}.$$

Mais de $IN = \frac{R}{2} - r$, on tire

$$r = \frac{R}{2} - IN;$$

d'où

$$r = \frac{\overline{OI}^2 - 4\,\overline{IN}^2}{4\,IN}.$$

Cela posé, remarquons que : *Dans tout triangle il y a une conique inscrite qui a pour foyers les points* O *et* H, *et dont un axe est égal à* R. (Voir *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 240.)

Cette conique est ici déterminée; il suffira donc, pour trouver les côtés, de mener les tangentes communes à cette conique et au cercle inscrit : problème qu'on ne peut généralement résoudre avec la règle et le compas.

M. Vieille (voir *Nouvelles Annales*, mai 1855) a inséré une solution du problème d'Euler dans un cas où celui-ci est résoluble par la règle et le compas. Il suppose I, M, H en ligne droite. Le triangle cherché est alors isoscèle, et l'on voit ici la solution immédiate de la question.

Remarque. — Si, dans le problème précédent, I est remplacé par I_a, une marche absolument analogue en donne la solution.