E. LEMOINE

Note sur une question d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 368-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__368_1>

NOTE SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. LEMOINE,
Professeur.

Toute puissance entière μ d'un nombre entier l peut être obtenue en prenant la somme de l^k termes consé-

(*) Théorème connu de Timmermans et de Lenthéric. (Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. V, p. 316.)

cutifs de la suite des nombres impairs, μ, k, l *étant entiers et positifs, et* $\mu \geqq 2k$.

En effet la somme de l^k nombres consécutifs de cette suite est

$$(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(2n+2l^k-1)=2nl^k+l^k.l^k.$$

Il suffit donc de démontrer que l'on a toujours pour n une valeur entière et positive satisfaisant à l'équation

$$2nl^k+l^k.l^k=l^\mu;$$

d'où

$$n=\frac{l^{\mu-k}-l^k}{2}=\frac{l^k(l^{\mu-2k}-1)}{2},$$

ce qui est toujours possible, car l'un des nombres l^k, $l^{\mu-2k}-1$ est pair.

Dans le cas de $\mu=2k$, on trouve

$$n=0,$$

résultat facile à prévoir, puisqu'on sait que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

En faisant varier μ et k, on retrouve beaucoup de résultats connus et d'autres à volonté.

Je ferai remarquer seulement le suivant, qui correspond au cas de $\mu=5$, $k=2$:

Si l'on divise la suite des nombres impairs, à partir de 1, *en groupes tels que les* 1^{er}, $3^{ième}$, $5^{ième}$,..., $(2n-1)^{ième}$ *groupes aient respectivement* 1^2, 2^2, 3^2,..., n^2 *termes, et les* $2^{ième}$, $4^{ième}$, $6^{ième}$,..., $2n^{ième}$ *groupes respectivement* 1, 3, 6,..., $\frac{n(n+1)}{2}$ *termes (suite des nombres triangulaires),* n^5 *sera la somme des termes du* $(2n-1)^{ième}$ *groupe et* $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2(2n+1)$ *celle du* $2n^{ième}$ *groupe.*
