NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BUCHONNET

Expression de la distance d'une courbe à sa sphère osculatrice

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 457-463

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__457_1>

EXPRESSION DE LA DISTANCE D'UNE COURBE A SA SPHÈRE OSCULATRICE;

PAR CH. BUCHONNET (de Lausanne).

M (*) et M′ étant deux points d'une courbe gauche infiniment voisins, nous désignerons par ds l'arc MM′, par ε l'angle de contingence, par η l'angle de torsion, par r le rayon de courbure et par R le rayon de la sphère osculatrice au point M, enfin par dS l'arc de l'arête de

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

rebroussement de la surface polaire correspondant au point M.

Rappelons d'abord quelques théorèmes dont nous aurons à faire usage.

I. La longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine d'un arc plan ou gauche infiniment petit sur la tangente en son extrémité est égale à la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence.

II. La limite de la direction de cette perpendiculaire coïncide avec la direction de la normale principale à l'origine de l'arc.

III. Le centre du cercle de courbure et celui de la sphère osculatrice sont situés sur la polaire, laquelle est perpendiculaire au plan osculateur. La surface polaire est le lieu des polaires. L'arête de rebroussement de la surface est le lieu des centres des sphères osculatrices. La polaire est tangente à cette arête; d'où il suit que l'angle de contingence de l'arc dS est égal à η. Les extrémités de cet arc, que nous désignerons par S et S', sont les centres des sphères osculatrices aux points M et M' de la courbe primitive.

IV. Par chaque point de la surface polaire il passe une développée de la courbe primitive.

V. Les normales principales en M à la courbe primitive et en S à l'arête de rebroussement de la surface polaire sont parallèles.

Nous avons désigné par S le centre de la sphère osculatrice au point M : soit P le point en lequel la droite menée de S au point M' infiniment voisin de M traverse cette sphère. Représentant par δ la distance de la courbe à la sphère osculatrice, on a

$$\delta = PM',$$

et c'est de cette grandeur qu'il s'agit de trouver l'expression.

Considérons à cet effet celle des développées qui passe par le point S; soit T le point de cette développée qui correspond à M'; SM et TM' sont tangents à la développée, le premier en S, le second en T. Soit Q le point en lequel TM' traverse la sphère : dans le triangle M'PQ, les angles en P et en Q sont droits à la limite, et par conséquent on a PM' = QM'; donc

$$\delta = \mathrm{QM'} = \mathrm{TM'} - \mathrm{TQ}.$$

On a, rigoureusement,

$$\mathrm{TM'} = \operatorname{arc} \mathrm{ST} + \mathrm{SM} = \operatorname{arc} \mathrm{ST} + \mathrm{SQ},$$

donc

$$\delta = \operatorname{arc} \mathrm{ST} + \mathrm{SQ} - \mathrm{TQ},$$

ou, appelant D le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur TQ,

$$(a) \qquad \delta = (\operatorname{arc} \mathrm{ST} - \mathrm{DT}) + (\mathrm{SQ} - \mathrm{DQ}).$$

La grandeur δ est ainsi mise sous la forme d'une somme de deux différences. Étudions d'abord la première.

Le point T est situé sur la polaire au point M', et cette polaire est tangente en S' à l'arête de rebroussement de la surface polaire. Dès lors, la perpendiculaire SE abaissée de S sur S'T a pour expression de sa longueur $\frac{1}{2}\eta d\mathrm{S}$ (I et III). Par suite, on obtiendra la valeur de l'arc ST en divisant cette expression par le cosinus de l'angle TSE. La limite de la direction ST n'est autre que celle du rayon SM ou R. Quant à SE, la limite de sa direction est celle de la normale principale en S à l'arête (2); et cette normale est parallèle à la normale principale en M à la courbe primitive (5), c'est-à-dire au rayon r. Il suit de là que l'angle en question n'est autre que celui des rayons R et r, et que son cosinus est par conséquent égal à $\frac{r}{R}\cdot$ On a donc

$$(b) \qquad \text{arc ST} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{R}\eta d\mathrm{S}}{r},$$

qnantité de second ordre infinitésimal, MM′ ou ds étant considéré comme du premier.

L'angle des droites SM et TM′, tangentes à l'arc ST en ses extrémités, est évidemment égal à $\frac{\text{MM}'}{\text{SM}}$ ou $\frac{ds}{R}$; on a donc

$$(c) \qquad \text{angle de contingence de l'arc ST} = \frac{ds}{\mathrm{R}},$$

quantité du premier ordre.

Ceci posé, pour évaluer la première des deux différences qui figurent dans l'égalité (a), rapportons l'arc ST à trois axes rectangulaires en prenant le point S pour origine. Choisissons pour plan des xy le plan osculateur à l'arc en ce point, et pour axe des x la tangente SM.

Un arc infiniment petit est égal à sa projection sur la tangente en son origine; conséquemment, dans le système d'axes que nous venons d'adopter, l'arc ST est égal à l'x du point T. L'angle des tangentes extrêmes d'un arc infiniment petit est égal à l'angle des tangentes extrêmes de sa projection sur le plan osculateur en son origine; donc, dans notre système d'axes, l'angle des tangentes en S et en T est égal au $\frac{dy}{dx}$ du point T. Dès lors, puisqu'en vertu des relations (b) et (c) l'ordre infinitésimal de l'arc ST est double de celui de l'angle de ses tangentes extrêmes, l'équation de la projection de cet arc sur le plan xy sera, en désignant par A une constante,

$$y = \mathrm{A}x^{\frac{3}{2}} + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{3}{2};$$

en effet, l'axe des x est tangent à l'origine à la courbe que représente cette équation, et comme elle donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\,\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}+\text{ des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{1}{2},$$

on voit que l'ordre de x, supposé infiniment petit, est double de celui de $\frac{dy}{dx}$.

Quant à l'équation de la projection de l'arc sur le plan xz, si, désignant par B une constante, on la met sous la forme

$$z=\mathrm{B}x^{p}+\text{ des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } p,$$

p sera plus grand que $\frac{3}{2}$, puisque le plan xy est osculateur à l'arc en son origine.

On a, en désignant par ξ l'x du point T,

$$\text{arc ST}=\int_0^{\xi} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Nous négligeons les quantités d'ordres supérieurs à celui de ξ^2. On trouve alors, en effectuant,

$$\text{arc ST}=\xi+\frac{9}{16}\,\mathrm{A}^2\xi^2.$$

Passons au calcul de TD; on a

$$\text{TD}=\text{corde ST}\cos\text{STD}.$$

La corde ST a pour expression $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, η et ζ étant l'y et le z du point T. Désignons ce radical par H, et par a, b, c, α, β, γ les cosinus des angles que la corde ST et la tangente au point T font avec les axes; on aura

$$\text{TD}=\mathrm{H}(a\alpha+b\beta+c\gamma).$$

On a

$$a = \frac{\xi}{H}, \quad b = \frac{\eta}{H}, \quad c = \frac{\zeta}{H},$$

et en représentant par K le radical $\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}$, où $\frac{d\eta}{d\xi}$ et $\frac{d\zeta}{d\xi}$ désignent les valeurs que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ prennent au point T, on a

$$\alpha = \frac{1}{K}, \quad \beta = \frac{1}{K}\frac{d\eta}{d\xi}, \quad \gamma = \frac{1}{K}\frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Donc

$$TD = \frac{\xi}{K} + \frac{\eta}{K}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\zeta}{K}\frac{d\zeta}{d\xi}.$$

Comme nous négligeons les quantités d'ordres supérieurs à celui de ξ^2, il faut, dans l'évaluation du facteur $\frac{1}{K}$, négliger celles d'ordres supérieurs à l'ordre de ξ; on trouve

$$K = 1 + \frac{9}{8}A^2\xi;$$

d'où

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{9}{8}A^2\xi;$$

d'où

$$\frac{\xi}{K} = \xi - \frac{9}{8}A^2\xi^2, \quad \frac{\eta}{K}\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}A^2\xi^2, \quad \frac{\zeta}{K}\frac{d\zeta}{d\xi} = 0;$$

d'où

$$TD = \xi + \frac{3}{8}A^2\xi^2;$$

d'où

$$\text{arc } ST - TD = \frac{3}{16}A^2\xi^2.$$

A cause de $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}A\xi^{\frac{1}{2}}$, cette dernière expression peut être mise sous la forme $\frac{\xi}{12}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$. Or ξ et $\frac{d\eta}{d\xi}$ sont, en tant qu'infiniment petits, respectivement égaux à l'arc ST et à son angle de contingence, dont les valeurs sont données aux équations (b) et (c). Substituant ces valeurs, il vient

$$\text{arc ST} - \text{TD} = \frac{\eta\, ds^2 dS}{24 r R},$$

quantité du quatrième ordre infinitésimal.

Passons à la seconde différence. SD étant perpendiculaire à DQ, SQ — DQ est de l'ordre du carré de SD, par conséquent d'un ordre supérieur au quatrième, puisque, l'angle STD tendant vers zéro, SD est infiniment petit par rapport à l'arc ST qui est du second ordre. Cette seconde différence doit donc être négligée devant la première, et la valeur de δ est donnée par celle-ci. Remplaçant dans son expression r par $\frac{ds}{\varepsilon}$, il vient

$$\delta = \frac{\varepsilon \eta\, ds\, dS}{24 R}.$$