Nouvelles annales de mathématiques

Joachimsthal

Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 481-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__481_0>

SUR LE NOMBRE DES NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE;

PAR JOACHIMSTHAL.

(Traduit de l'allemand. — Extrait du tome LIX du *Journal de Crelle*.)

I.

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'ellipsoïde, ξ, η, ζ les coordonnées du point donné.

Les coordonnées du pied d'une normale passant par le point (ξ, η, ζ) satisfont aux équations

$$(1)\qquad \frac{\xi - x}{\frac{x}{a}} = \frac{\eta - y}{\frac{y}{b}} = \frac{\zeta - z}{\frac{z}{c}}.$$

Désignons par $-u$ la valeur commune de ces trois rapports; on a

$$(2)\qquad x = \frac{a\xi}{a-u},\quad y = \frac{b\eta}{b-u},\quad z = \frac{c\zeta}{c-u},$$

et u doit satisfaire à l'équation du sixième degré

$$(3)\qquad \frac{a\xi^2}{(a-u)^2} + \frac{b\eta^2}{(b-u)^2} + \frac{c\zeta^2}{(c-u)^2} = 1.$$

On voit par l'équation (1) que u est le produit des distances de l'origine des coordonnées et du point (ξ, η, ζ) au plan qui touche l'ellipsoïde au point (x, y, z), ce produit étant pris positivement ou négativement, suivant que ces deux points sont situés d'un même côté du plan ou de côtés différents.

Pour résoudre le problème proposé, il convient d'introduire dans (3), au lieu de ξ, η et ζ, trois autres constantes.

L'équation (3) a nécessairement deux racines réelles; si nous supposons

$$a > b > c,$$

l'une est comprise entre $-\infty$ et c, l'autre entre a et $+\infty$.

Supposons connue l'une de ces racines; soient ν cette racine et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du pied de la normale correspondante.

On déduit de (2) les équations suivantes

$$(4)\qquad \xi = \frac{x_0(a-\nu)}{a}, \quad \eta = \frac{y_0(b-\nu)}{b}, \quad \zeta = \frac{z_0(c-\nu)}{c};$$

et comme le point (x_0, y_0, z_0) est sur l'ellipsoïde, on sait que l'on peut déterminer deux quantités α et β, dont la première soit comprise entre a et b et la deuxième entre b et c, en sorte que l'on ait

$$(4^*)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\\ y_0^2 &= \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)},\\ z_0^2 &= \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des équations (4) et (4*), l'équation (3) devient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\nu)^2}{(a-b)(a-c)(a-u)^2} + \frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\nu)^2}{(b-a)(b-c)(b-u)^2}\\ &\qquad + \frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\nu)^2}{(c-a)(c-b)(c-u)^2} = 1.\end{aligned}\right.$$

Au sujet des constantes α, β, ν, qui remplacent les constantes primitives ξ, η, ζ, je ferai remarquer que α et β

déterminent le pied d'une des normales passant par le point (ξ, η, ζ) et que ν fixe la position du point sur cette normale. En désignant par π le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent au point (α, β), on voit que $\frac{\nu}{\pi}$ est la distance du point (ξ, η, ζ) au pied de la normale, les longueurs prises sur la normale étant comptées comme positives lorsqu'elles sont dirigées vers l'intérieur de l'ellipsoïde. Les quantités α et β satisfont aux conditions

$$a > \alpha > b > \beta > c;$$

je suppose d'ailleurs qu'elles n'atteignent pas leurs valeurs limites, ce qui exclut le cas où la normale serait dans un plan principal, cas que j'examinerai plus tard en particulier. La quantité ν peut avoir une valeur arbitraire.

Pour débarrasser l'équation (5) de la racine $u = \nu$, je pose

$$a - \nu = a - u + u - \nu, \ldots;$$

il vient

$$\sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} + 2(u-\nu)\sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{a-u}$$
$$+ (u-\nu)^2 \sum \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{(a-u)^2} = 1.$$

La première somme est égale à 1, la deuxième à $\frac{(\alpha-u)(\beta-u)}{(a-u)(b-u)(c-u)}$; et, si l'on représente cette dernière expression par $f(u)$, la troisième somme est $f'(u)$.

L'équation précédente devient donc

$$(u-\nu)[2f(u) + (u-\nu)f'(u)] = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $(u - v)$,

$$(6) \quad \frac{2}{u-v} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} + \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}.$$

Cette équation du cinquième degré est le point de départ des recherches qui suivent.

II.

Il s'agit, pour chaque valeur de v, de déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (6). Il résulte de cette équation qu'à toute valeur réelle de u correspond une valeur réelle de v, puisque cette dernière quantité est donnée par une équation du premier degré. Si, lorsqu'on fait varier u depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, v acquiert n fois une valeur donnée v_0; réciproquement, en faisant dans (6) $v = v_0$, l'équation en u qui en résulte a n racines réelles. Il faut donc examiner la marche de v, lorsqu'on la considère comme une fonction de u définie par l'équation (6).

Le terme à droite de cette équation

$$\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-\alpha} + \frac{1}{u-b} - \frac{1}{u-\beta} + \frac{1}{u-c}$$

peut s'écrire

$$(7) \quad \frac{1}{u-a} - \frac{\alpha - b}{(u-\alpha)(u-b)} - \frac{\beta - c}{(u-\beta)(u-c)},$$

ou encore

$$(7^*) \quad \frac{a-\alpha}{(u-a)(u-\alpha)} + \frac{b-\beta}{(u-b)(u-\beta)} + \frac{1}{u-c}.$$

Comme on a les inégalités $a > \alpha > b > \beta$, on peut partager l'intervalle depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ en six intervalles, et faire varier u de $-\infty$ à c, de c à β, de β à b, de b à α, de α à a, de a à $+\infty$.

Pour le premier, le troisième et le cinquième intervalle, (7) présente une somme de termes négatifs; pour les trois autres, (7^*) présente une somme de termes positifs. Le terme à gauche de l'équation (6) ne s'évanouit jamais pour aucune valeur finie de u. On parvient au même résultat, en tirant de (6) la valeur de v :

$$(8)\quad v = u - 2\frac{(u-a)(u-\alpha)(u-b)(u-\beta)(u-c)}{W} = \frac{U}{W};$$

U est un polynôme du cinquième degré, le dénominateur W est du quatrième degré et reste toujours positif; ainsi v est une fonction continue de u.

Au moyen de l'équation (8), on peut dresser ce premier tableau indicateur de la marche de v :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lccccccccccc} u = & -\infty & c & {>c \atop <\beta} & \beta & {>\beta \atop <b} & b & {>b \atop <\alpha} & \alpha & {>\alpha \atop <a} & a & +\infty \\ v = & +\infty & c & <\beta & \beta & >\beta & b & <\alpha & \alpha & >\alpha & a & -\infty. \end{array}\right.$$

Pour étudier plus avant la question, il faut déterminer les maxima et les minima de v.

Il résulte de (8)

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\varphi(u)}{W^2},$$

expression qui est une fonction continue de u. Il en résulte que v ne peut devenir maximum ou minimum que pour les racines de l'équation $\varphi(u) = 0$; on a d'ailleurs

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{W\varphi'(u) - 2W'\varphi(u)}{W^2},$$

expression qui, pour les racines de l'équation $\varphi(u) = 0$, se réduit à

$$-\frac{\varphi'(u)}{W^2};$$

on conclut de là que les racines *simples* de $\varphi(u) = 0$ donnent seules les maxima et les minima de v.

En différentiant (6), on obtient

$$\frac{2}{(u-v)^2}\left(\frac{dv}{du}-1\right) = -\frac{1}{(u-a)^2}-\frac{1}{(u-b)^2}-\frac{1}{(u-c)^2} + \frac{1}{(u-\alpha)^2}+\frac{1}{(u-\beta)^2}.$$

Posons $\frac{dv}{du} = 0$ et éliminons v au moyen de l'équation (6), il viendra

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &2\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}\right] \\ &\quad -\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}\right)^2 = 0; \end{aligned}\right.$$

en chassant les dénominateurs de cette égalité, on obtiendra l'équation

$$\varphi(u) = 0.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le nombre et les limites des racines de cette équation du huitième degré.

III.

Lemme. — Soient $\varphi(u)$ une fonction entière de u et $\varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}$; soient, en outre, V et θ deux fonctions de la même variable liées à la première par la relation

$$(11)\qquad \varphi - V\varphi' + \theta = 0.$$

Cela posé, si u variant depuis A jusqu'à B (B étant plus grand que A), V et θ restent finis; si, de plus, θ ne s'évanouit jamais, et par conséquent garde toujours le même signe, l'équation $\varphi(u) = 0$ n'a dans cet intervalle aucune racine multiple, et le nombre des racines réelles comprises entre les limites données est égal au nombre des variations que perd la suite

$$\varphi \quad \varphi' \quad \theta,$$

lorsqu'on y fait successivement $u = \mathrm{A}$ et $u = \mathrm{B}$; ce nombre de racines est donc au plus égal à deux.

La première partie de cette proposition est évidente; la deuxième se démontre par la méthode de Sturm.

Appliquons maintenant ce lemme à l'équation (10). En posant

$$(u-a)(u-b)(u-c) = \mathrm{D},$$

$$(u-\alpha)(u-\beta) = \Delta, \quad \frac{\mathrm{D}}{\Delta} = z,$$

on a

$$(u) = \mathrm{D}^2\Delta^2 \left\{ 2\left[\frac{1}{(u-a)^2} + \frac{1}{(u-b)^2} + \frac{1}{(u-c)^2} - \frac{1}{(u-\alpha)^2} - \frac{1}{(u-\beta)^2}\right] - \left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}\right)^2 \right\}$$

et

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta};$$

d'où

$$\varphi(u) = \mathrm{D}^2\Delta^2\left[\frac{2(z'^2 - zz'')}{z^2} - \frac{z'^2}{z^2}\right] = \Delta^4(z'^2 - 2zz''),$$

d'où encore

$$\varphi'(u) = 4\Delta^3\Delta'(z'^2 - 2zz'') - 2\Delta^4 zz'''$$

et

$$(12) \qquad 4\Delta'\varphi(u) - \Delta\varphi'(u) = 2\Delta^4 \mathrm{D} z'''.$$

On a maintenant

$$z = \frac{\mathrm{D}}{\Delta} = u + \lambda + \frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{u-\alpha} + \frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}\,\frac{1}{u-\beta},$$

λ étant indépendant de u; par suite,

$$\Delta^4 z''' = -6\left[\frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}(u-\beta)^4 + \frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}(u-\alpha)^4\right] = -6f(u);$$

les coefficients de $(u-\beta)^4$ et de $(u-\alpha)^4$, dans la parenthèse, étant essentiellement négatifs, il en est de même de $f(u)$.

En remplaçant dans (12) Δ', Δ, D et $\Delta^4 z'''$ par leurs valeurs, il vient

$$(13)\quad \varphi(u) - \frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{4(2u-\alpha-\beta)}\varphi'(u) + \frac{3(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta}f(u) = 0.$$

Pour appliquer le lemme précédent, on peut prendre simplement

$$\theta = -\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta},$$

attendu que, d'après ce qui précède, $f(u)$ est toujours négatif.

θ change de signe quand u passe par l'une des valeurs a, b, c et $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Cette dernière quantité est $< a$ et $> c$; mais elle peut être $>$ ou $< b$; il faut donc distinguer chacun de ces deux cas.

Comme le premier terme de $\varphi(u)$ est $+u^8$, nous avons

$$(15)\left\{\begin{array}{l}
\varphi(-\infty) = +,\quad \varphi(+\infty) = +; \\
\quad \text{on trouve ensuite immédiatement} \\
\varphi(c) = (c-a)^2(c-b)^2(c-\alpha)^2(c-\beta)^2 = +, \\
\quad \text{de même pour } \varphi(b) \text{ et } \varphi(c); \\
\varphi(\beta) = -3(\beta-a)^2(\beta-b)^2(\beta-c)^2(\beta-\alpha)^2 = -, \\
\quad \text{de même pour } \varphi(\alpha).
\end{array}\right.$$

On a, de plus,

$$\varphi'(-\infty) = -, \quad \varphi'(+\infty) = +,$$

et l'on déduit de (13)

$$\varphi'(a) = \frac{4(2a-\alpha-\beta)}{(a-\alpha)(a-\beta)}\varphi(a) = +;$$

$$\varphi'(b) = \frac{4(2b-\alpha-\beta)}{(b-\alpha)(b-\beta)}\varphi(b),$$

par conséquent

$$= +, \quad \text{si} \quad b > \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

et

$$= -, \quad \text{si} \quad b < \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

$$\varphi'(c) = \frac{4(2c-\alpha-\beta)}{(c-\alpha)(c-\beta)} = -;$$

$$\varphi'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\frac{48}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-a\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-b\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-c\right)f\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right),$$

par conséquent

$$= +, \quad \text{si} \quad b > \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

et

$$= -, \quad \text{si} \quad b < \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

(*La suite prochainement.*)