Nouvelles annales de mathématiques

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9 (1870), p. 86-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__86_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 838

(voir 2^e série, t. VII, p. 528);

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Soit q_0 le quotient par $1.2.3\ldots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-2a$, et ainsi de suite; en s'arrêtant dès qu'on trouvera un nombre nul ou négatif, on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots.$$

J.-J.-A. MATHIEU.

1. Soient a et p deux nombres entiers positifs quelconques; nous avons identiquement, pour toute valeur de x,

$$(x^a - 1)^p x^{-1} = x^{ap-1} - \frac{p}{1} x^{a(p-1)-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} x^{a(p-2)-1} - \ldots (-1)^p x^{-1}.$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres de cette identité, remplaçons x par 1, et divisons par $1.2.3\ldots p$; nous trouvons

$$a^p = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots + 1,$$

ou bien

$$(1) \qquad a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \ldots,$$

ce qui est la relation proposée.

2. Pour généraliser, considérons l'identité

$$(2)\quad \begin{cases} (x^a - 1)^p x^{-k} = x^{ap-k} - \dfrac{p}{1} x^{a(p-1)-k} \\ \qquad\qquad + \dfrac{p(p-1)}{1.2} x^{a(p-2)-k} - \ldots (-1)^p x^{-k}. \end{cases}$$

Prenons les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des deux membres, remplaçons x par 1, divisons par $1.2.3\ldots p$, et convenons de désigner par C_m^n le quotient par $1.2.3\ldots n$ du produit de n nombres entiers consécutifs décroissants à partir de m, nous trouvons

$$(3)\quad \begin{cases} a^p = C_{ap-k}^p - \dfrac{p}{1} C_{a(p-1)-k}^p \\ \qquad + \dfrac{p(p-1)}{1.2} C_{a(p-2)-k}^p - \ldots (-1)^p C_{-k}^p, \end{cases}$$

identité qui se réduit à la proposée pour $k = 1$.

3. On pourrait généraliser davantage en prenant les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux membres de l'identité (2). Quel que soit l'entier n, la dérivée $n^{\text{ième}}$ du second membre est toujours très-facile à calculer. La dérivée $n^{\text{ième}}$ du premier membre, pour $x = 1$, est nulle si n est inférieur à p; elle se réduit à $1.2.3\ldots p.a^p$ si n égale p; enfin, si n est supérieur à p, il suffit pour l'obtenir de savoir calculer les valeurs des dérivées de $(x^a - 1)^p$; or on voit facilement que, pour $x = 1$, la dérivée $(p+r)^{\text{ième}}$ de $(x^a - 1)^p$ est égale à $1.2.3\ldots(p+r)$, multiplié par le coefficient de y^r dans le développement de

$$\left[y^{a-1} + \frac{a}{1} y^{a-2} + \frac{a(a-1)}{1.2} y^{a-3} + \ldots + \frac{a(a-1)}{1.2} y + \frac{a}{1}\right]^p.$$

4. Il est évident que, p étant un nombre entier positif, l'identité (3) subsiste pour toutes les valeurs réelles de a

et de k. Donnons aux lettres a et k des valeurs entières quelconques (positives, nulles ou négatives) : tous les termes de (3) seront des nombres entiers. Supposons de plus que p soit premier : au second membre, à l'exception des deux extrêmes, tous les termes auront leurs coefficients divisibles par p. Si donc nous remplaçons l'expression $(-1)^p C^p_{-k}$ par C^p_{k+p-1}, qui lui est évidemment égale, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Quels que soient les entiers a et k, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{ap-k} + C^p_{k+p-1} - a^p$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier a, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{ap} - a^p$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quels que soient les entiers k et m, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{mp^2-k} + C^p_{k+p-1}$$

est divisible par p.

COROLLAIRE. — *Quel que soit l'entier m, si p est un nombre premier positif, l'expression*

$$C^p_{mp^2-1} + 1$$

est divisible par p.

Note. — Nous avons reçu deux autres bonnes solutions de la question 838 : l'une est de M. D. Thomas, de Margam ; l'autre de M. E. Pellet, élève de l'École Normale.

Question 951

(voir 2e série, t. VIII, p. 336);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots.$$

(LAISANT.)

M. Serret, dans sa *Trigonométrie* (p. 258, 4e édition), a démontré les deux formules suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} x &= 2^2(2^2 - 1)B_1\frac{x}{1.2} + \ldots \\ &\quad + 2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2.\ldots 2n} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \cot x = \frac{1}{x} - 2^2 B_1\frac{x}{1.2} - \ldots - 2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} - \ldots,$$

où

$$B_\mu = \frac{1.2.3\ldots 2\mu}{2^{2\mu-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \frac{1}{4^{2\mu}} + \ldots\right).$$

La seconde formule peut s'écrire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tang} x} = 2^2 B_1\frac{x}{1.2} + \ldots + 2^{2n}B_n\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} + \ldots.$$

En vertu de la première, le coefficient de $\dfrac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}$ dans la somme

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{x}{2^3} + \ldots$$

est

$$2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{6n}} + \ldots\right) = 2^{2n}B_n,$$

car la somme entre parenthèses égale

$$\frac{\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Les deux membres de l'égalité à démontrer s'expriment donc par deux séries identiques, ce qui démontre la formule.

Note. — M. Moret-Blanc nous a adressé des solutions des questions 931, 935, 943, peu différentes de celles qui ont déjà été publiées dans les *Nouvelles Annales* (t. VIII, p. 516, 520, 548).