

H.-G. DAY

**Démonstration géométrique d'un
théorème sur l'ellipse**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 136-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__136_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

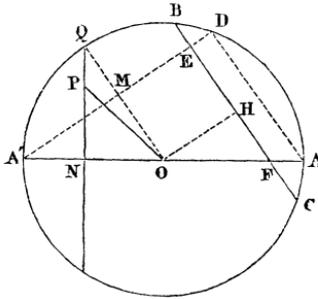
**DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME
SUR L'ELLIPSE ;**

PAR LE RÉV. H.-G. DAY.

(The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics; avril 1869.)

Si, d'un point P d'une ellipse, je mène une perpendiculaire sur le grand axe, et que je la prolonge jusqu'au point Q où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le diamètre qui passe par le point P sera égal à la corde menée dans le cercle par le point F parallèlement au rayon OQ.

Je mène AD parallèlement à OQ, et je joins le point D au point A'. Les deux triangles A'MO, QNO sont évidemment égaux.



Nous avons, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{BE \cdot FC}{OA^2},$$

ou

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{DE \cdot EA'}{A'M^2} = \frac{DE \cdot EA'}{QN^2}.$$

Donc

$$PN^2 = DE \cdot EA'.$$

Je mène OH parallèle à A'D, et j'ai

$$ON^2 = OM^2 = EH^2.$$

Donc

$$PN^2 + ON^2 = BE \cdot EC + EH^2,$$

ou

$$PN^2 + ON^2 = BH^2.$$

Donc enfin

$$OP = BH = \frac{1}{2}BC.$$

C. Q. F. D.

Note du traducteur. — On peut de là déduire une démonstration très-simple du théorème d'Apollonius, à savoir : que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

En effet, on sait que, si l'on prend le point Q' analogue au point Q et correspondant à l'extrémité P' du diamètre conjugué de OP, les deux lignes OQ, OQ' sont à angle droit; il en sera donc de même de leurs parallèles BFC, bF'c menées par le point F. Donc on aura

$$\begin{aligned} BC^2 + bc^2 &= (BF + FC)^2 + (bF + Fc)^2 \\ &= BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 + 2BF \cdot FC + 2bF \cdot Fc. \end{aligned}$$

Or on a, d'après une propriété connue,

$$BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 = 4a^2,$$

et

$$BF \cdot FC = bF \cdot Fc = b^2.$$

Donc enfin, on a

$$BC^2 + bc^2 = 4a^2 + 4b^2.$$

C. Q. F. D.