NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. DAY

Démonstration géométrique d'un théorème sur l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 136-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__136_0>

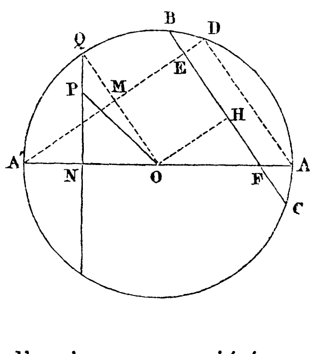
DÉMONSTRATION GÉOMETRIQUE D'UN THÉORÈME SUR L'ELLIPSE;

PAR LE RÉV. H.-G. DAY.

(*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics;* avril 1869.)

Si, d'un point P d'une ellipse, je mène une perpendiculaire sur le grand axe, et que je la prolonge jusqu'au point Q où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le diamètre qui passe par le point P sera égal à la corde menée dans le cercle par le point F parallèlement au rayon OQ.

Je mène AD parallèlement à OQ, et je joins le point D au point A'. Les deux triangles A'MO, QNO sont évidemment égaux.



Nous avons, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{BE.FC}{OA^2},$$

ou

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{DE.EA'}{A'M^2} = \frac{DE.EA'}{QN}.$$

Donc

$$PN^2 = DE.EA'.$$

Je mène OH parallèle à A'D, et j'ai

$$ON^2 = OM^2 = EH^2.$$

Donc

$$PN^2 + ON^2 = BE.EC + EH^2,$$

ou

$$PN^2 + ON^2 = BH^2.$$

Donc enfin

$$OP = BH = \tfrac{1}{2}BC.$$

C. Q. F. D.

Note du traducteur. — On peut de là déduire une démonstration très-simple du théorème d'Apollonius, à savoir : que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

En effet, on sait que, si l'on prend le point Q' analogue au point Q et correspondant à l'extrémité P' du diamètre conjugué de OP, les deux lignes OQ, OQ' sont à angle droit; il en sera donc de même de leurs parallèles BFC, bFc menées par le point F. Donc on aura

$$\begin{aligned} BC^2 + bc^2 &= (BF + FC)^2 + (bF + Fc)^2 \\ &= BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 + 2BF.FC + 2bF.Fc. \end{aligned}$$

Or on a, d'après une propriété connue,

$$BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 = 4a^2,$$

et

$$BF.FC = bF.Fc = b^2.$$

Donc enfin, on a

$$BC^2 + bc^2 = 4a^2 + 4b^2.$$

C. Q. F. D.