Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 289-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__289_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Élementi di Geometria, per Achille Sannia, professore nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri di Napoli, e Enrico d'Ovidio, professore nel R. Liceo Principe Umberto di Napoli. Seconda edizione, riveduta e corretta. Napoli, 1871. — 1 vol. petit in-8°, de x-571 p., avec 382 fig. dans le texte. Prix : 5 francs.

Ce traité, qui vient d'atteindre rapidement sa seconde édition, a été rédigé pour répondre au programme tracé par l'administration de l'Instruction publique en Italie, et en vertu duquel l'enseignement de la géométrie élémentaire (du moins pour la partie plane) doit se faire *d'après les Éléments d'Euclide.* L'objet capital que ce programme avait en vue, celui de ramener l'enseignement géométrique à la rigueur logique des anciens, nous semble complétement atteint par les auteurs de cet excellent ouvrage. En examinant, avec attention, la manière dont ils ont traité les points délicats sur lesquels on est presque sûr de rencontrer, dans la plupart des ouvrages élémentaires, les mêmes erreurs traditionnelles, nous avons partout trouvé l'exactitude à la place de l'*à peu près*, et l'Italie, qui possède déjà une traduction des *Éléments de Mathématiques* de M. Baltzer, vient de s'enrichir d'un nouveau livre, où l'on peut étudier scientifiquement la géométrie.

Si les *Éléments d'Euclide* sont restés pendant plus de deux mille ans le plus beau modèle de sévère logique, modèle rarement égalé, jamais surpassé, il n'en est pas moins vrai que le mode d'exposition de cet ouvrage ne répond plus à l'état actuel de la science, et que l'étude du texte pur d'Euclide est une tâche assez pénible pour les commençants. Il s'agissait donc d'introduire avec prudence, dans un cours de géométrie, les simplifications que comportent les méthodes modernes, sans diminuer en rien le caractère d'exactitude et d'évidence des démonstrations, et la profonde intelligence des principes qui distingue l'œuvre du géomètre grec.

C'est ce que MM. Sannia et d'Ovidio se sont efforcés de faire, et l'on peut dire qu'ils ont parfaitement réussi à conserver la rigueur de leur modèle. Mais peut-être sont-ils restés un peu en deçà du but, en suivant de trop près les anciennes méthodes, comme ils l'ont fait dans la théorie des proportions.

On s'est élevé avec raison contre la manière dont Legendre et son école ont introduit les considérations arithmétiques dans la géométrie, sans avoir préalablement expliqué comment on supplée à l'impossibilité de représenter généralement les grandeurs continues par des nombres. On y parvient en s'appuyant sur le principe des limites, en vertu duquel des relations, entre grandeurs continues, démontrées pour les valeurs indéfiniment approchées de ces grandeurs, sont rigoureusement vraies pour ces grandeurs elle-mêmes. En procédant ainsi, on justifie l'emploi des méthodes arithmétiques, plus courtes et plus familières aux commençants que les méthodes anciennes, et présentant l'avantage caractéristique de toute bonne méthode, de cotoyer toujours de près la pratique.

Si l'on tient absolument à ne pas mêler l'idée de nombre dans la théorie des proportions, on n'a qu'a définir les lignes proportionnelles comme celles qui peuvent être placées sur les deux côtés d'un angle, de manière que les lignes qui joignent les points de division soient parallèles. On en conclut facilement, par une démonstration purement géométrique, que deux rectangles qui ont leurs dimensions inversement proportionnelles sont équivalents, et réciproquement. En nommant alors *produit* de deux lignes la surface du rectangle construit sur ces deux lignes, on peut étendre immédiatement aux proportions des lignes les propositions arithmétiques relatives aux proportions des nombres. Ayant ainsi défini la *multiplication*, et par suite la *division géométrique*, rien n'empêche de traiter les relations géométriques par les règles de l'algèbre, qui ne sont pas, comme on se le figure si souvent, de simples généralisations de forme des règles de l'arithmétique, mais qui s'appliquent immédiatement aux grandeurs concrètes, dès qu'on a défini pour celles-ci les opérations fondamentales, analogues à celles de l'arithmétique.

MM. Sannia et d'Ovidio ont préféré revenir à la théorie des proportions d'Euclide, en la modifiant, d'après les indications de M. Duhamel (*), par la substitution des *équisousmultiples* aux *équimultiples*. Malgré cette simplification, l'exposé de la théorie n'en occupe pas moins quinze pages, et ne dispense pas les auteurs de reprendre plus tard cette même théorie au point de vue algébrique ou arithmétique, qui se prête beaucoup mieux aux applications. Personne n'admire plus que nous le cinquième livre d'Euclide, un des plus beaux chefs-d'œuvre scientifiques que nous a laissés l'antiquité, et nous pensons qu'un professeur ne peut se dispenser de l'avoir étudié au moins une fois avec attention. Mais nous en dispenserions très-volontiers les commençants, que la difficulté de cette étude pourrait bien décourager.

Il serait avantageux, sous le rapport de l'uniformité et

(*) *Éléments de Calcul infinitésimal*, liv. I, chap. I.

de la brièveté, de fonder les divers théorèmes de proportionnalité sur le principe suivant, qu'il est facile de revêtir d'une forme élémentaire : *Deux grandeurs x et $\varphi(x)$ sont proportionnelles, lorsque l'on a, pour des valeurs quelconques x_1, x_2 de la première, la relation*

$$(1) \qquad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

entre les valeurs correspondantes de la seconde. On déduirait très-simplement de cette relation le caractère des *équimultiples* d'Euclide, savoir : $m\varphi(x_1) \gtreqless n\varphi(x_2)$, suivant que $mx_1 \gtreqless nx_2$, et d'autre part l'existence de la relation (1) se vérifie immédiatement dans la plupart des cas.

Disons, en passant, qu'il nous eût semblé préférable de désigner l'égalité de deux rapports par le signe ordinaire (=), et de renoncer aux quatre points (::) des anciens arithméticiens, qui commencent à tomber en désuétude.

Un autre reproche que nous adressons aux auteurs de ce traité, c'est de n'avoir pas cherché, dans la disposition des matières, à grouper ensemble les diverses théories qui, différentes en apparence, ne constituent en réalité que des points de vue différents sous lesquels on peut envisager un même ensemble de vérités. Telles sont, par exemple, la théorie des triangles plans et celle des cordes dans le cercle, la théorie des angles polyèdres et celle des polygones sphériques. L'utilité de semblables rapprochements est évidente. On évite par là les doubles emplois dans les démonstrations ; on accoutume les élèves à reconnaître sous des noms différents des objets identiques ; on leur fait mieux comprendre la fécondité des théorèmes les plus simples en leur faisant voir à la fois les divers aspects, dont chacun correspond à un ordre d'applications différent.

Par exemple, ce théorème que, *dans tout triangle* *isoscèle, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe par le sommet,* peut s'énoncer immédiatement sous d'autres formes, en disant que *tout point équidistant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite*, ou que *deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire*, ou que *la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde d'un cercle passe par le centre.* Cette diversité d'énoncés d'une même proposition ne peut que mettre sur la voie des différents problèmes qu'elle peut servir à résoudre.

Joignons à ces considérations l'avantage qui résulte de ce qu'un tel groupement, adopté par Euclide lui-même, permet à l'élève d'exécuter toutes les constructions indiquées pour la démonstration des théorèmes, et de s'exercer lui-même, dès le début, à des constructions graphiques, excellente préparation à l'étude de la géométrie théorique, que les gymnases allemands n'ont garde de négliger, mais dont nos constructeurs de programmes français ne se doutent pas, tant est profond le manque d'organisation et d'enchaînement dans toutes les branches d'étude de nos lycées! Il va sans dire qu'en Allemagne le dessin géométrique est enseigné par les mêmes maîtres que la géomètrie théorique, dont il n'est que le préambule.

L'ouvrage de MM. Sannia et d'Ovidio est divisé en huit Livres, dont les quatre premiers sont consacrés à la géométrie des figures planes, les quatre autres à celle des figures dans l'espace.

Les deux premiers Livres correspondent à peu près par leur contenu aux deux Livres de Legendre. Les propositions sur les angles formés autour d'un point, qui forment le début du premier Livre, auraient été abrégées et simplifiées, si l'on eût considéré comme point de départ la notion d'un *tour* entier, qui est l'unité angulaire naturelle, en faisant remarquer que ce tour, de même qu'un segment rectiligne, ne peut être divisé que d'une seule manière en deux ou en quatre parties égales.

L'étude des positions relatives de deux cercles est traitée, dans le second Livre, avec beaucoup de soin et de clarté.

Le Livre III contient la théorie euclidienne des proportions, la similitude des figures planes, les systèmes harmoniques de points et de droites, les premières notions sur les pôles et polaires.

Dans le Livre IV, les auteurs donnent les propositions relatives à l'équivalence des aires planes, au rapport des aires des figures semblables, à la division de la circonférence en parties égales. Ils exposent le principe des limites, à la suite duquel ils placent la définition de la longueur d'un arc de cercle. Viennent ensuite la théorie algébrique des rapports entre grandeurs incommensurables, le calcul de la mesure des aires planes, la mesure des angles par le rapport de l'arc au rayon, la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, etc.

Le Livre V renferme les matières traitées dans les Livres V et VI de Legendre, moins tout ce qui se rapporte à la mesure des volumes, à la symétrie et à la similitude.

Le Livre VI a pour objet l'étude des surfaces de révolution : cylindre, cône et sphère ; plans tangents et sécants ; pôles ; positions relatives de deux sphères ; polygones et cercles sphériques. Il se termine par la théorie des figures symétriques.

Le Livre VII est consacré à la théorie de la similitude dans l'espace. Systèmes harmoniques de plans ; pôle et plan polaire ; systèmes harmoniques sur la sphère ; figures polaires réciproques.

Enfin le Livre VIII traite de la mesure des volumes et des surfaces des polyèdres, du cylindre, du cône et de la sphère. Rapport des aires et des volumes des figures semblables. Conséquences du théorème d'*Euler* sur les polyèdres. Mesure des angles dièdres et polyèdres par des portions de surface sphérique.

Chacun des huit Livres est suivi d'un recueil d'exercices très-bien choisis : théorèmes à démontrer, lieux géométriques à trouver, problèmes à résoudre.

Nous regrettons que l'étendue de cet article ne nous permette pas d'entrer dans plus de détails sur la richesse des matériaux que contient cet ouvrage, dont les auteurs ont prouvé qu'ils étaient au courant de tous les progrès de la géométrie, et qu'ils savaient en même temps se maintenir dans les limites d'un cours élémentaire. En étudiant ce livre, on y trouvera ce qu'il faut pour apprendre à fond les éléments de la géométrie, et pour se préparer à la connaissance des parties plus élevées de cette science. Ce qui est plus précieux encore, on y trouvera un guide sûr et des idées saines.

J. Houël.