Problème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__323_1>

PROBLÈME D'ALGÈBRE.

Trouver les valeurs entières générales de x, y, z telles, que les quantités $xy - 1$, $yz - 1$, $zx - 1$ soient simultanément des carrés. (A. Martin.)

SOLUTION DE M. S. BILLS.

Soit

$$xy - 1 = p^2,$$

alors

$$x = \frac{p^2 + 1}{y};$$

et si nous posons

$$z = x + y \pm 2p,$$

nous aurons, en remplaçant z par cette valeur,

$$xz - 1 = x^2 + xy \pm 2px - 1 = x^2 + p^2 \pm 2px = (x \pm p)^2,$$

$$yz - 1 = yx + y^2 \pm 2py - 1 = y^2 + p^2 \pm 2py = (y \pm p)^2.$$

Ces valeurs satisfont donc aux conditions proposées.

Pour trouver des valeurs entières, il suffit de prendre pour y un diviseur de $p^2 + 1$; chaque valeur que l'on donne à p donne deux valeurs pour z.

Exemples :

$$p = 1,\quad y = 1,\quad x = 2,\quad z = 5 \text{ ou } 1,$$

$$p = 2,\quad y = 1,\quad x = 5,\quad z = 2 \text{ ou } 10,$$

$$p = 3,\quad y = 2,\quad x = 5,\quad z = 1 \text{ ou } 13,$$

$$p = 4,\quad y = 5,\quad x = 10,\quad z = 1 \text{ ou } 29.$$

(Extrait de *The Educational Times*.)