NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sommation de certains développements

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 368-371

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__368_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOMMATION DE CERTAINS DÉVELOPPEMENTS;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Étant données deux suites de nombres*

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_n,$$
$$B_0, \quad B_1, \quad B_2, \ldots, \quad B_n,$$

telles que, dans la première, les termes équidistants des extrêmes soient égaux, et que, dans la seconde, les termes équidistants des extrêmes aient une somme constante $2G$; *si l'on désigne par* S *la somme des termes de la première suite, on aura*

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = GS.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n$$

et

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_n B_n + A_{n-1} B_{n-1} + A_{n-2} B_{n-2} + \ldots + A_0 A_0;$$

ajoutons ces égalités, membre à membre, en nous rappelant que, par hypothèse, $A_{n-k} = A_k$; nous trouvons

$$2\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_0(B_0 + B_n) + A_1(B_1 + B_{n-1}) + \ldots + A_n(B_n + B_0);$$

or, chaque parenthèse est égale à $2G$, d'après l'énoncé du théorème; donc

$$2\sum_{k=0}^{h=n} A_k B_k = 2G(A_0 + A_1 + \ldots + A_n),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = GS,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On établirait facilement un théorème analogue, mais plus général, en supposant que les nombres de la seconde suite satisfissent a l'égalité

$$pB_k + qB_{n-k} = r,$$

dans laquelle p, q, r désignent des constantes.

II.

1re *Application.* — Supposons

$$A_k = 1, \quad B_k = a + kd,$$

en appliquant le théorème précédent, nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{k=n} (a + kd) = \frac{(2a + nd)(n + 1)}{2},$$

formule qui donne la somme des $n + 1$ premiers termes d'une progression arithmétique ayant pour premier terme a et pour raison d.

2e *Application.* — Prenons pour première suite les coefficients du binôme, pour seconde suite les termes d'une progression arithmétique, ce qui revient à poser

$$A_k = C_n^k, \quad B_k = a + kd;$$

nous avons

$$S = 2^n, \quad 2G = 2a + nd,$$

et par suite

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (a + kd) = 2^{n-1}(2a + nd).$$

3e *Application.* — Appelons toujours C_n^k le coefficient de x^k, dans le développement de $(1 + n)^n$, et posons

$$A = C_n^k, \quad B_k = \sin k\alpha \cos(n - k)\alpha;$$

alors

$$S = 2^n, \quad 2G = \sin n\alpha,$$

et l'on trouve

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin k\alpha \cos(n-k)\alpha = 2^{n-1} \sin n\alpha.$$