NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE MOREL

Exposé d'une théorie géométrique élémentaire des sections coniques (suite et fin, voir 2e série, t. X, p. 305)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 537-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__537_1>

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DES SECTIONS CONIQUES

(suite et fin, voir 2e série, t. X, p. 305);

PAR M. AUGUSTE MOREL,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

CHAPITRE III. — LA PARABOLE.

88. La parabole est une courbe telle que les distances de chacun de ses points à un point fixe F et à une droite fixe DD' sont égales entre elles. Le point fixe s'appelle *foyer*, la droite fixe est la *directrice*. Cette définition nous donne deux moyens de construire la courbe.

89. Construire la courbe d'un mouvement continu.

90. Construire la courbe par points.

91. *Théorème.* — La parabole a pour axe de symétrie la droite abaissée du foyer perpendiculairement à la directrice.

92. *Théorème.* — Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est inférieure ou supérieure à sa distance à la directrice.

93. *Théorème.* — Si une corde rencontre la directrice en P, la courbe en M et N, la ligne FP est la bissec-

trice extérieure de l'angle des rayons vecteurs passant en M et N.

Démonstration analogue à celle de l'ellipse.

94. *Corollaire I.* — Une droite ne peut rencontrer une parabole en plus de deux points.

Corollaire II. — Toute droite parallèle à l'axe ne peut rencontrer la courbe qu'en un point.

Corollaire III. — La parabole n'a pas de centre.

Corollaire IV. — Si les points M et N se confondent, l'angle PFM est droit, et, par suite, la ligne qui joint le point F au point où la tangente rencontre la directrice est perpendiculaire au rayon vecteur passant au point de contact.

Corollaire V. — Si par les extrémités d'une corde focale on mène des tangentes à la parabole, ces lignes se couperont sur la directrice; et réciproquement, si d'un point de la directrice on mène des tangentes à la courbe, la ligne qui joint les points de contact passe par le foyer.

Corollaire VI. — La tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

95. *Théorème.* — La tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe passant par le point de contact.

En effet, si du point N de contact je mène la perpendiculaire Nn sur la directrice, et que je joigne le point F au point Q de rencontre de la tangente et de la directrice, les deux triangles rectangles NFQ, NnQ sont égaux, car ils ont le côté NQ commun et le côté Nn égal à NF. Ce que démontre le théorème.

96. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec la courbe, tous les autres points étant extérieurs.

Corollaire II. — La normale bissecte l'angle du rayon vecteur et de la parallèle à l'axe menée par son pied. Si, par suite, on suppose des rayons calorifiques ou lumineux parallèles à l'axe et venant se réfléchir sur la courbe, ils convergeront au point F. C'est de là que lui vient le nom de *foyer*.

97. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques du foyer par rapport aux tangentes est la directrice.

98. *Corollaire.* — Le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.

99. *Théorème.* — La sous-tangente, PR, est double de la distance du sommet, A, au pied R de l'ordonnée du point de contact, M.

En effet, le triangle FMP est isoscèle; la projection H du foyer F sur la tangente MP, est au milieu de MP, et sur la tangente au sommet; donc $PR = 2AR$.

C. Q. F. D.

100. *Théorème.* — La sous-normale à la parabole est constante.

Car les deux triangles rectangles AHF, MRN sont semblables et donnent

$$\frac{AF}{AH} = \frac{RN}{RM},$$

et comme $MR = 2AH$, il en résulte que $NR = 2AF = FD$.

101. *Théorème.* — Le carré de l'ordonnée est proportionnel à la distance du sommet au pied de l'ordonnée.

En effet, le triangle PMN étant rectangle et MR étant perpendiculaire sur l'hypoténuse, on a

$$MR^2 = RN \times RP = FD \times 2AR.$$

102. *Problème.* — Mener une tangente à la parabole par un point pris sur la courbe.

103. *Problème.* — Mener une tangente à la parabole par un point extérieur.

104. *Corollaire.* — La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle des tangentes soit droit est que le point donné soit sur la directrice.

105. *Théorème.* — Si l'on joint le foyer aux deux points de contact et au point M de rencontre de deux tangentes, et que du point M on mène une parallèle à l'axe : 1° la ligne FM est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact; 2° l'une des tangentes fait avec FM un angle égal à celui que fait l'autre avec la parallèle à l'axe.

Pour le démontrer, je mène par les points de contact des perpendiculaires à la directrice et je joins les pieds de ces perpendiculaires au point M; il est facile de voir, d'après cette construction, que : 1° la ligne FM bissecte l'angle des rayons vecteurs des points de contact; 2° la tangente MN est perpendiculaire sur FP, et la parallèle à l'axe est perpendiculaire sur la directrice; donc l'angle NMQ que forment ces lignes est égal à l'angle que forme MF avec l'autre tangente. C. Q. F. D.

106. *Problème.* — Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.

Remarque. — La parabole n'a pas d'asymptote.

107. *Problème.* — Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une parabole.

108. *Théorème.* — Le milieu d'une corde de direction donnée est sur une droite parallèle à l'axe menée

par le point où la perpendiculaire abaissée du foyer sur la direction donnée rencontre la directrice.

En effet, si j'appelle α ce point, la ligne $F\alpha$ passant par les points F, φ symétriques par rapport à la sécante, le point α est le milieu de la tangente commune aux deux cercles ayant pour centres les points de rencontre de la parabole et de la droite donnée et passant par le foyer. Donc la parallèle à l'axe passant par le point α passe aussi par le milieu de la corde.

Cette parallèle à l'axe s'appelle le diamètre des cordes parallèles à la direction donnée.

109. Réciproquement, toute parallèle à l'axe est un diamètre. Pour cela, il me suffit de prouver que si je prends une corde ayant son milieu sur une parallèle αm à l'axe, cette corde est perpendiculaire à la ligne $F\alpha$ joignant le foyer au point α où la parallèle à l'axe coupe la directrice. Prenons le cercle dont le centre est en un des points communs aux deux lignes et passant par le foyer. Soient s le point où il touche la directrice et φ le point où il coupe αF; on a d'après un théorème connu $as^2 = \alpha\varphi \times \alpha F$. De même, le second cercle nous donnera

$$\alpha R^2 = \alpha\varphi' \times \alpha F.$$

Mais, comme par hypothèse on a $\alpha s = \alpha R$, on en déduit

$$\alpha\varphi' = \alpha\varphi,$$

et par suite les deux cercles se coupent sur αF, qui est ainsi la perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres.

110. Il n'y a pas lieu de chercher le diamètre conjugué d'un diamètre donné, puisque les droites parallèles à l'axe ne rencontrent la courbe qu'en un point. Du reste, la construction directe appliquée à ce cas nous apprendrait que ce diamètre n'existe pas.

111. *Théorème.* — La parabole peut être considérée comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont un foyer reste fixe, ainsi que le sommet voisin, pendant que l'autre sommet s'éloigne indéfiniment.

Chapitre IV. — Les coniques.

112. J'appelle *conique* une courbe plane telle que le rapport des distances de l'un quelconque de ses points à un point fixe F appelé *foyer* et à une droite fixe DD′ appelée *directrice* soit constant.

113. *Théorème.* — La section plane d'un cône droit à base circulaire est une conique telle que nous l'avons définie.

La section admet toujours un axe de symétrie qui est la ligne d'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire mené par l'axe, plan qui existe toujours et qui est unique lorsque l'axe n'est pas perpendiculaire au plan sécant.

Cela posé, je considère une sphère inscrite au cône et tangente au plan sécant (PP′). Cette sphère est coupée par le plan de symétrie pris comme plan de la figure suivant un grand cercle tangent aux génératrices et tangent à la droite PP′, qui est l'axe de symétrie. Il sera donc possible de construire une pareille sphère, cette construction se ramenant à celle d'un cercle inscrit dans un triangle.

Soit F le point de contact de la sphère et du plan sécant, et soit (AB) le cercle de contact avec le cône, cercle projeté sur la figure suivant son diamètre AB et dont le plan rencontre le plan (PP′) suivant une droite (D) perpendiculaire au plan de la figure et se projetant tout entière au point D. Enfin, considérons un point (M) de la courbe dont la projection sur PP' est m. Toutes les tangentes menées d'un point à la sphère étant égales, on a $(MC) = (MF)$, (MC) étant la portion de la génératrice comprise entre le point (M) et le cercle (AB). Mais toutes les portions de génératrices comprises entre des plans perpendiculaires à l'axe sont égales; et si je mène par le point m une parallèle mr à AB, j'aurai $(MC) = Ar$. De plus, la distance du point (M) à la droite (D) est égale à mD; on en conclut facilement que l'on a l'égalité

$$\frac{Ar}{mD} = \frac{AP}{PD}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

114. *Corollaire.* — On peut mener un cercle exinscrit au triangle formé par les génératrices et l'axe de symétrie; on en déduit qu'il existe un second foyer F' et une seconde directrice (D'). De plus, les deux foyers sont également distants des points où l'axe de symétrie rencontre la courbe; il en est de même pour les deux directrices.

115. Il est facile de déduire de là que :

1° Si l'axe de symétrie rencontre les deux génératrices sur une même nappe du cône, dans lequel cas le rapport $\frac{AP}{PD}$ est plus petit que 1, la somme des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante : la courbe est donc une ellipse ;

2° Lorsque le plan sécant est parallèle à une génératrice, le rapport $\frac{PA}{PD}$ est égal à l'unité, et nous avons par définition une parabole;

3° Enfin, le plan continuant à tourner rencontre les deux nappes du cône, et l'on verrait que la différence des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante : la courbe est donc une hyperbole.

Le rapport $\frac{PA}{PD}$, qui est ici plus grand que l'unité, ne peut dépasser une certaine limite qui s'obtient lorsque le plan sécant est parallèle à l'axe.

116. Ce rapport $\frac{PA}{PD}$ peut être exprimé au moyen de DD', de PP' et de FF'; il est précisément égal à ce que nous avons appelé précédemment l'excentricité.

117. *Théorème.* — Réciproquement, toute conique, telle que nous l'avons définie, peut être placée sur un cône de révolution.

Appelons θ l'angle que fait la génératrice avec l'axe. Dans le triangle ADP, nous connaissons DP distance de la directrice au sommet; AP, puisque nous connaissons $\frac{AP}{DP}$ et l'angle A, qui est égal au complément de θ. Ce triangle sera toujours possible si, en nommant K le rapport $\frac{PA}{PD}$, on a

$$K < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Lorsque K sera inférieur ou au plus égal à 1, cette inégalité aura toujours lieu. Donc :

On peut toujours placer une ellipse ou une parabole sur un cône de révolution donné.

Lorsque le rapport K est plus grand que 1, le problème ne sera pas toujours possible. Si, par le sommet, nous menons un plan parallèle au plan sécant, il coupera le cône suivant une génératrice qui fera, avec sa projection, un angle β, et nous trouverons facilement que l'on a

$$K = \frac{1}{\cos\beta}.$$

On en déduira, comme condition de possibilité,

$$\frac{1}{\cos\beta} < \frac{1}{\cos\theta},$$

ou, puisque les angles sont inférieurs à un droit,

$$\beta < \theta.$$

Mais l'angle β est précisément égal, comme le démontre la théorie de l'hyperbole, à l'angle que fait l'asymptote avec l'axe transverse. Donc :

Pour que l'on puisse placer une hyperbole sur un cône donné, il est nécessaire que l'angle de la génératrice du cône avec son axe soit au moins égal à l'angle de l'asymptote avec l'axe transverse, et, inversement, si cette condition est remplie, l'on peut placer l'hyperbole sur le cône.

118. Supposons que le sommet du cône s'éloigne indéfiniment, la base restant la même, le cône deviendra un cylindre, et, le plan sécant ne pouvant rencontrer qu'une seule nappe, on aura ce théorème que l'on pourrait démontrer directement de la même manière que les précédents : La section d'un cylindre de révolution par un plan oblique à l'axe est une ellipse dont le petit axe est égal au diamètre du cylindre, et, inversement, on peut toujours placer une ellipse sur un cylindre de révolution dont le diamètre est égal au petit axe de cette courbe.

119. Il en résulte qu'un cercle peut être considéré comme la projection orthogonale d'une ellipse dont le petit axe est égal au diamètre de ce cercle; inversement, une ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle dont le diamètre est égal au grand axe de cette ellipse.

120. Le cercle lui-même peut être considéré comme une section plane du cône, et par conséquent les propriétés générales des coniques quelconques peuvent être déduites des propriétés analogues du cercle par la méthode des projections cylindriques ou coniques. Ainsi, la projection d'une droite étant en général une droite, on peut déduire des propriétés du cercle qu'une droite ne peut rencontrer qu'en deux points une conique; que d'un point on ne peut mener que deux tangentes à une conique, etc., etc. Nous allons donner certaines propriétés des coniques déduites de celles du cercle, en les présentant d'une manière générale pour les trois courbes.

Pôles et polaires.

121. On sait que la position d'un point sur une ligne peut être déterminée par la distance de ce point à un point fixe pris sur la ligne, et par la direction du mouvement d'un mobile qui se déplacerait du point fixe vers le point considéré; on est alors amené à considérer deux directions opposées de ce mouvement, et on les désigne par les mots *direction positive* et *direction négative*, ou par les signes + ou —, et le sens du mouvement se déterminera immédiatement à l'inspection du signe, en partant de l'égalité fondamentale

$$AB = - BA.$$

Mais la position d'un point est aussi donnée lorsque l'on connaît, en grandeur et en signe, la valeur du rapport de ses distances à deux points fixes, A et B, pris sur la même ligne.

122. Nous rappellerons seulement la définition suivante : Lorsque deux points, C et D, situés sur une droite AB, sont tels que, en prenant les rapports de leurs distances aux deux points fixes A et B, on ait

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB},$$

ces points sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. On en déduit facilement que A et B sont *conjugués harmoniques* par rapport à C et D.

Si nous joignons un point quelconque O aux quatre points A, B, C, D, nous formons un *faisceau harmonique*, et l'on sait qu'un tel faisceau divise harmoniquement toutes les droites qu'il rencontre, et que, si une sécante est parallèle à l'un des rayons du faisceau, elle est divisée par les trois autres en deux parties égales. Il résulte de là, en particulier, que :

La projection conique d'une division harmonique est une autre division harmonique.

123. *Théorème.* — Si d'un point P on mène une sécante qui rencontre une conique en A et B, et par les points A et B des tangentes à cette conique, le lieu du point D de rencontre de ces tangentes, lorsque la sécante tourne autour du point P, est une ligne droite qui rencontre AB au point H, conjugué harmonique de P par rapport à A et B.

Le théorème est facile à démontrer pour un cercle, et par suite s'étendra facilement aux coniques quelconques.

Cette droite s'appelle la *polaire* du point P, et, réciproquement, le point P est le *pôle* de cette droite.

124. La polaire jouit des propriétés suivantes :

1° Si le pôle est extérieur, la polaire coïncide avec la corde de contact des tangentes issues de ce point à la courbe.

2° Quel que soit le point, si l'on mène un diamètre par ce point, les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles, et parallèles au diamètre conjugué de celui qui passe par le point; la polaire sera, par suite, conjuguée du diamètre passant par le pôle, puisqu'elle devra rencontrer l'une des tangentes précédentes à l'infini, c'est-à-dire lui être parallèle.

3° Le pôle d'une droite passant par un point est sur la polaire de ce point, et inversement.

125. Nous pouvons chercher la position relative d'un point et de sa polaire par rapport à une conique.

1° *Ellipse.* — Le point et sa polaire sont d'un même côté du centre. Si nous prenons le point où la polaire rencontre le diamètre passant par le pôle, nous pouvons facilement reconnaître que ce point et le pôle sont l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe, et que, si le pôle est sur la courbe, la polaire passe par le pôle, et n'est autre que la tangente.

2° *Parabole.* — Menons un diamètre de la courbe; ce diamètre est la perspective d'une corde du cercle passant par le point où ce cercle rencontre la génératrice parallèle au plan sécant. Nous voyons, dans ce cas, que la perspective de la division harmonique sera parallèle à l'un des rayons du faisceau, et, par suite, nous aurons le théorème suivant :

Si d'un point M pris sur la courbe on mène une tangente et une corde quelconque, la distance du point où la tangente rencontre le diamètre conjugué de la corde au milieu de cette corde sera double de la distance du point de rencontre de la courbe et du diamètre à ce même milieu.

3° *Hyperbole.* — Lorsque le pôle est à l'intérieur de la courbe, la polaire est à l'extérieur, et du même côté du centre. Si le pôle est sur la courbe, la polaire n'est autre chose que la tangente en ce point.

Si le pôle est à l'extérieur de la courbe, il peut occuper trois positions très-distinctes : il peut être sur un diamètre réel, sur un diamètre imaginaire, ou sur une asymptote.

Supposons-le d'abord sur une asymptote : dans ce cas, l'une des tangentes se confond avec l'asymptote elle-même, et son point de contact est à l'infini. Donc la polaire est parallèle à l'asymptote sur laquelle se trouve le pôle.

Si le point n'est pas sur l'asymptote, nous pouvons remarquer que les lignes qui joignent un foyer au pôle et au point commun à la directrice et à la polaire sont toujours rectangulaires. Il est facile de conclure de là que, si le pôle est sur un diamètre réel, la polaire est située du même côté du centre, et que, si le pôle est sur un diamètre imaginaire, le pôle et la polaire sont situés de part et d'autre du centre.

On en déduit un moyen de construire facilement le point de tangence de la courbe et des tangentes menées d'un point, et l'on peut remarquer que, si un point est compris dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe, les deux points de contact sont sur une même branche; dans le cas contraire, ils sont situés sur des branches différentes.

126. Comme dernière application de la propriété générale des coniques considérées comme perspective d'un cercle, nous énoncerons les deux théorèmes suivants, faciles à démontrer dans le cas du cercle :

Si un hexagone est inscrit dans une conique, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Si un hexagone est circonscrit à une conique, les diagonales joignant les sommets opposés passent par un même point.

Les coniques polaires réciproques d'un cercle.

127. Étant donné, dans le plan d'un cercle, un système de droites et de points, si l'on prend les pôles de toutes ces droites et les polaires de tous ces points, on obtient une seconde figure formée de points et de droites, et telle qu'en opérant de la même manière sur cette seconde figure, on retrouvera la première. Ces deux figures s'appellent, pour cela, *polaires réciproques* par rapport au cercle.

De même, si nous prenons une courbe et ses diverses tangentes, et que nous considérions la suite des pôles de ces tangentes, nous obtiendrons une nouvelle courbe, dont les tangentes seront les polaires des points de la première. L'une des courbes étant définie par ses points, l'autre le sera par ses tangentes, dont elle sera l'*enveloppe*. On verrait facilement que, si l'on opérait de la même manière par rapport à la seconde courbe, on retrouverait précisément la première. Donc ces deux lignes sont des lignes *polaires réciproques*.

128. *Théorème.* — Le rapport de la distance de deux points au centre d'un cercle est égal au rapport des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre par rapport à ce cercle.

129. *Théorème.*— La polaire réciproque d'un cercle C par rapport à un cercle O, appelé *cercle directeur*, est une conique ayant pour foyer le centre O et pour directrice la polaire du centre C du cercle considéré par rapport au cercle directeur.

En effet, prenons une tangente MR au cercle C; soient P le pôle de cette tangente, DD′ la polaire de C. On aura, d'après le théorème précédent, en menant du point P une perpendiculaire PN sur DD′,

$$\frac{OP}{OC}=\frac{PN}{CM}, \quad \text{ou} \quad \frac{OP}{PN}=\frac{OC}{CM}=\text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si le point O est extérieur au cercle C, la courbe sera une hyperbole; s'il est sur la circonférence C, on aura une parabole; s'il est intérieur, on aura une ellipse.

On peut donc déduire l'étude de certaines propriétés des coniques de l'étude des cercles, principalement au moyen des deux théorèmes suivants :

L'angle compris entre deux droites est égal à l'angle que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux points correspondants.

Les distances de l'origine à un point et à la droite correspondante sont inversement proportionnelles.

Nous allons prendre quelques théorèmes généraux pour montrer l'usage que l'on peut faire de cette théorie pour l'étude des coniques. Nous présenterons parallèlement les propriétés du cercle et celles des coniques.

130. Si d'un point pris dans l'intérieur d'un cercle on mène une sécante, et par ses extrémités des tangentes, la somme des inverses des distances de ce point aux deux tangentes est constante.

Si l'on joint le foyer d'une ellipse aux deux points de contact des tangentes parallèles, la somme de ces rayons vecteurs est constante.

Les angles des deux tangentes avec leur corde de contact sont égaux.

Les angles des tangentes parallèles avec les rayons vecteurs des points de contact sont égaux.

131. Lorsqu'un polygone régulier est circon-

Si l'on suppose une rose des vents ayant son centre scrit à une circonférence, la somme des distances d'un point intérieur aux différents côtés est constante pour un même nombre de côtés du polygone.

au foyer d'une ellipse, la somme des inverses des rayons vecteurs comptée sur ces droites est constante pour un même nombre de rayons de la rose.

132. Dans le cas particulier d'une parabole, c'est-à-dire dans le cas où le point O serait sur le cercle C, il serait facile de prouver que la ligne d'intersection des deux cercles n'est autre chose que la tangente au sommet de la parabole, et d'en déduire :

1° Que cette ligne est le lieu des projections du foyer sur les tangentes;

2° Que la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et une parallèle à l'axe menée par le point de contact.

133. Nous pouvons enfin déduire le théorème de Pascal et le théorème de Brianchon l'un de l'autre de la manière suivante :

Un hexagone étant inscrit à un *cercle*, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Un hexagone étant circonscrit à une *conique*, les lignes qui joignent ses sommets opposés passent par un même point.

Un hexagone étant circonscrit à un *cercle*, les diagonales qui joignent ses sommets opposés passent par un même point.

Un hexagone étant inscrit à une *conique*, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Le théorème de Brianchon, dans le cas du cercle, se déduit du reste de celui de Pascal par polaires réciproques, en supposant que les deux cercles coïncident.