NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 129-141
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__129_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 57

(voir 1re série, t. I, p. 521);

PAR M. H. BROCARD,
Capitaine du Génie, à Biskra.

Étant données sur un plan les projections cylindriques ou coniques, ABC, A′B′C′, *des intersections d'un cône quelconque par deux plans, et la projection* O *du sommet du cône, menez un rayon vecteur quelconque* OBB′ *et les tangentes en* B, B′. *Ce rayon tournant autour de* O, *quel sera le lieu du point* X *d'intersection des tangentes?*

(FINCK.)

La construction du point X étant projective, le lieu de ce point peut être défini : la trace sur un plan quelconque de la tangente à une section plane quelconque. Or cette tangente se trouve toujours dans le plan de la section : sa trace est donc sur celle du plan sécant; en d'autres termes, le lieu du point X est une droite.

Question 139

(voir 1re série, t. V, p. 672);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

Connaissant le dividende, le diviseur et le résidu d'une division, comment trouve-t-on les chiffres du quotient de droite à gauche?

1. Cette question se ramène à la suivante : trouver, de droite à gauche, les chiffres du quotient de deux entiers divisibles l'un par l'autre.

2. Quatre cas se présentent; le diviseur est terminé :
1° par un chiffre pair significatif;
2° par un 5;
3° par un zéro;
4° par un chiffre impair autre que 5.

3. Le premier et le deuxième cas se ramènent au quatrième, en divisant les entiers donnés par la plus haute puissance, soit de 2, soit de 5, qui divise exactement le diviseur.

4. Le troisième cas se ramène à un des trois autres, en divisant les entiers par la plus haute puissance de 10 qui divise le diviseur.

5. On peut donc toujours supposer que le diviseur est terminé par un chiffre impair autre que 5.

6. Les produits des dix nombres d'un seul chiffre par un même chiffre impair autre que 5 sont terminés par des chiffres différents.

7. Les chiffres des unités d'un dividende et d'un diviseur divisibles l'un par l'autre suffisent pour déterminer le chiffre des unités du quotient, lorsque dans le diviseur ce chiffre est impair et autre que 5.

8. Si deux entiers sont divisibles l'un par l'autre, le chiffre des dizaines du quotient est le chiffre des unités du quotient d'une division ayant pour diviseur le diviseur donné et dont le dividende s'obtient en supprimant un zéro à la droite de la différence entre le dividende

donné et le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient correspondant.

Exemple.

Dividende.	Diviseur.	Chiffres du quotient.
470 790 806 200 000	6 637 587 500	»
4 707 908 062 000	66 375 875	»
37 663 264 496	531 007	8
37 659 016 44	»	2
37 648 396 3	»	9
37 170 490	»	0
37 170 49	»	7

Le quotient est 70928

Question 444

(voir 1re série, t. XVII, p. 262);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

On a n urnes renfermant chacune les m premiers numéros. On tire un numéro de chaque urne; quelle est la probabilité que la somme des nombres sortis 1° *soit égale à un nombre donné,* 2° *soit comprise entre deux nombres donnés.*

1° Il est clair que la probabilité p_k, que la somme des numéros sortis soit égale à un nombre donné k, sera égale au coefficient de t^k dans le développement de la fonction

$$\left(\frac{t+t^2+t^3+\ldots+t^m}{m}\right)^n = \frac{1}{m^n}t^n(1-t^m)^n(1-t)^{-n}.$$

Or, si l'on désigne en général par C_a^b le nombre des combinaisons de a objets b à b, on a

$$(1-t^m)^n = 1 - C_n^1 t^m + C_n^2 t^{2m} - C_n^3 t^{3m} + \ldots,$$

$$(1-t)^{-n} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \ldots + C_{k-1}^{k-n} t^{k-n} + \ldots.$$

On trouvera donc

$$p_k = \frac{1}{m^n}\left(C_{k-1}^{k-n} - C_n^1 C_{k-1-m}^{k-n-m} + C_n^2 C_{k-1-2m}^{k-n-2m} - \ldots\right);$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$p_k = \frac{1}{m^n}\left(C_{k-1}^{n-1} - C_n^1 C_{k-1-m}^{n-1} + C_n^2 C_{k-1-2m}^{n-1} - \ldots\right).$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on s'arrêtera, dans le calcul de ces formules, dès qu'on arrivera à un terme nul.

2° Soit $p_{k,l}$ la probabilité que la somme des numéros sortis soit égale au moins à k et au plus à $k+l$, on aura

$$p_{k,l} = p_k + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l}.$$

Mais, pour faire cette addition, on peut remarquer que l'on a en général

$$C_a^b + C_{a+1}^b + C_{a+2}^b + \ldots + C_{a+c}^b = C_{a+c+1}^{b+1} + C_a^{b+1},$$

il viendra alors

$$p_{k,l} = \frac{1}{m^n}\left[\left(C_{k+l}^n - C_{k-1}^n\right) - C_n^1\left(C_{k+l-m}^n - C_{k-1-m}^n\right) + C_n^2\left(C_{k+l-2m}^n - C_{k-1-2m}^n\right) - \ldots\right].$$

Question 959

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 480);

PAR M. WILLIÈRE,

Professeur à Arlon.

Une ellipse de grandeur constante se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe HA *en un* D *point déterminé* A. *Dans chacune de ses positions on lui circonscrit un rectangle* HDCF *ayant sa base sur* HAD.

Trouver le lieu géométrique :

1° *Des foyers ;*

2° *Du centre ;*

3° *Des sommets* C, F *du rectangle circonscrit ;*

4° *Des points de contact* E, B, G *de ses côtés avec l'ellipse ;*

5° *La courbe enveloppe du grand axe.*

(Brocard.)

Supposons qu'une ellipse, d'abord rapportée à ses axes, tourne d'un angle φ, et que son centre soit transporté en un point (α, β), l'équation de la courbe deviendra

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &b^2[(x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi]^2 \\ &+ a^2[(y-\beta)\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi]^2 = a^2b^2. \end{aligned}\right.$$

Les points d'intersection avec l'axe des x sont déterminés par l'équation

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + 2c^2\beta(x-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi \\ + \beta^2(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi) - a^2b^2 = 0. \end{aligned}$$

Les deux valeurs de $x-\alpha$, et, par suite, celles de x seront égales si l'on a

$$(2)\qquad \beta^2 = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi,$$

et elles seront nulles, si de plus

$$\alpha(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) = \beta c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

ou bien

$$(3)\qquad \alpha = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}.$$

1° *Lieu des foyers.* — Après le double mouvement, on a, pour les coordonnées du foyer,

$$(4)\qquad x = \alpha + c\cos\varphi,$$

$$(5)\qquad y = \beta + c\sin\varphi.$$

En multipliant les équations (2) et (3), on a

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi\cos\varphi.$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$\alpha\beta = (x - c\cos\varphi)(y - c\sin\varphi);$$

d'où l'on déduit

$$(6)\qquad cx\sin\varphi + cy\cos\varphi = xy.$$

D'un autre côté, la valeur $\beta = y - c\sin\varphi$, substituée dans l'équation (2), fournit

$$y^2 - 2cy\sin\varphi = b^2,$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{y^2 - b^2}{2cy},$$

et, en vertu de l'équation (6),

$$\cos\varphi = \frac{x(y^2 + b^2)}{2cy^2}.$$

Donc l'équation du lieu est

$$\frac{(y^2 - b^2)^2}{4c^2y^2} + \frac{x^2(y^2 + b^2)^2}{4c^2y^4} = 1$$

ou

$$(x^2 + y^2)(y^2 + b^2)^2 = 4a^2y^4,$$

et en coordonnées polaires

$$\rho\sin^2\omega(2a - \rho) = b^2.$$

2° *Lieu du centre.* — Pour avoir le lieu du centre.

il suffit d'éliminer φ entre les équations (2) et (3). La première donne

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\beta^2 - b^2}}{c},$$

et, par suite, en vertu de l'équation

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

on a

$$\cos\varphi = \frac{\alpha\beta}{c\sqrt{\beta^2 - b^2}},$$

d'où

$$\frac{\beta^2 - b^2}{c^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{c^2(\beta^2 - b^2)} = 1.$$

Mettant x et y à la place de α et β, l'équation devient

$$x^2y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

3° *Lieu des sommets* C, F. — D'abord, il est clair que l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des x est

$$(7) \qquad y = 2\beta.$$

D'autre part, pour qu'une droite $x = k$ soit tangente à l'ellipse, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} &c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi (k - \alpha)^2 \\ &\quad = (b^2 \sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)(k-\alpha)^2 \\ &\qquad\qquad - a^2b^2(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi) = 0, \end{aligned}$$

ou

$$k = \alpha \pm \sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}.$$

Donc l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des y est

$$(8) \qquad x - \alpha = \sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}.$$

Éliminant β entre les équations (2) et (7), il vient

$$\frac{y^2}{4} = b^2 + c^2 \sin^2\varphi,$$

ou

$$\sin^2\varphi = \frac{y^2 - 4b^2}{4c^2},$$

d'où

$$\cos^2\varphi = \frac{4a^2 - y^2}{4c^2}.$$

De même, éliminant α entre les équations (3) et (8), et remplaçant $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ par leurs valeurs, il vient

$$y\left[2x - \sqrt{4(a^2 + b^2) - y^2}\right] = 4c^2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

D'où, en élevant au carré et remplaçant encore $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ par leurs valeurs, on a

$$x^2y^2 + 4a^2b^2 = xy^2\sqrt{4(a^2 + b^2) - y^2},$$

et l'équation du lieu est

$$(x^2y^2 + 4a^2b^2)^2 = x^2y^4[4(a^2 + b^2) - y^2],$$

ou

$$x^2y^4(x^2 + y^2 - 4a^2 - 4b^2) + 8a^2b^2x^2y^2 + 16a^4b^4 = 0.$$

4° *Lieu des points de contact.* — Je commence par chercher le lieu du point de contact de la tangente parallèle à l'axe des x.

Il est clair qu'il faut éliminer α, β, φ entre les équations (1), (2), (3) et (7).

Pour cela, il suffit de prendre les valeurs de α et β dans les équations (2) et (3), les substituer dans l'équation (1), puis remplacer $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ respectivement par

$$\frac{y^2 - 4b^2}{4c^2} \quad \text{et} \quad \frac{4a^2 - y^2}{4c^2},$$

ce qui conduit très-facilement à l'équation du lieu

$$x^2y^2+y^4-4y^2(a^2+b^2)+16a^2b^2=0$$

ou

$$y^2(x^2+y^2-4a^2-4b^2)+16a^2b^2=0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, il faut éliminer α, β, φ entre les équations (1), (2), (3) et (8).

Si d'abord on élimine $x-\alpha$ entre l'équation (8) et l'équation (1), on trouve

$$(9)\qquad y-\beta=\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}},$$

équation qui peut remplacer l'équation (1).

En ajoutant l'équation (8) à l'équation (2), on trouve

$$(10)\qquad (x-\alpha)^2+\beta^2=a^2+b^2.$$

D'autre part, si l'on multiplie l'équation (9) par l'équation (8), puis l'équation (2) par l'équation (3), il vient

$$(x-\alpha)(y-\beta)=c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\alpha\beta=c^2\sin\varphi\cos\varphi;$$

d'où

$$(11)\qquad xy-\alpha y-\beta x=0.$$

On tire immédiatement des équations (10) et (11)

$$(12)\qquad \begin{cases} x-\alpha=x\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{x^2+y^2}}, \\ \beta=y\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Mais si nous éliminons φ entre les deux équations

$$\beta^2=b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi$$

et

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

nous trouvons

$$\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2) + a^2 b^2 = 0,$$

ou, en vertu de l'équation (10)

$$x\beta^2(2\alpha - x) + a^2 b^2 = 0.$$

Enfin, si nous substituons dans cette dernière les valeurs de α et de β tirées des relations (12), nous avons pour l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2)\left[x^2 y^2 (a^2 + b^2) + a^2 b^2 + (x^2 + y^2)\right]^2 = 4x^4 y^4 (a^2 + a^2)^3.$$

5° *Enveloppe du grand axe.* — L'équation du grand axe est

$$y - \beta = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(x - \alpha),$$

ou, en remplaçant α et β par leurs valeurs tirées des équations (2) et (3),

$$y \cos\varphi - x \sin\varphi = \frac{b^2 \cos\varphi}{\sqrt{b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi}}.$$

Il faut donc éliminer φ entre cette dernière équation et l'équation dérivée

$$y \sin\varphi + x \cos\varphi = \frac{a^2 b^2 \sin\varphi}{\left(\sqrt{b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi}\right)^3}.$$

Posant

$$\sqrt{b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi} = R,$$

la question revient à éliminer R entre les deux équations

$$R^4(x^2 + y^2) - R^3 b^2 y - R a^2 b^2 y + a^2 b^4 = 0,$$

$$R^4(x^2 + y^2) - 2R^3 b^2 y$$
$$+ R^2(b^4 - a^2 y^2 - b^2 x^2) + 2R a^2 b^2 y - a^2 b^4 = 0,$$

dont on déduit facilement

$$R^3 b^2 y - R^2(b^4 - a^2 y^2 - b^2 x^2) - 3 R a^2 b^2 y + 2 a^2 b^4 = 0,$$
$$2R^3(x^2+y^2) - 3R^2 b^2 y + R(b^4 - a^2 y^2 - b^2 x^2) + a^2 b^2 y = 0;$$

ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} 2U^4Z^2 - 3b^4y^2 & -b^2y(U^4+6a^2Z^2) & b^2(y^2-4Z^2) \\ b^2y(U^4+6a^2Z^2) & 8a^2b^4y^2+4a^2b^4Z^2+U^8 & y(6b^4-U^4) \\ a^2b^2(y^2-4Z^2) & -a^2y(6b^4-U^4) & -(3a^2y^2+2U^4) \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$x^2 + y^2 = Z^2$$

et

$$b^4 - a^2 y^2 - b^2 x^2 = U^4.$$

C'est une équation du dixième degré.

Note. — Nous avons reçu deux autres solutions de la question 959 : l'une de M. Guébhard, étudiant en médecine, à Paris; l'autre de M. R. Blondlot, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Question 996

(voir 2e série, t. IX, p. 288);

PAR M. GENTY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Sidi-bel-abbès.

On donne une surface du second degré et un tétraèdre abcd; si l'on désigne par A, B, C, D *les faces de ce tétraèdre opposées aux sommets a, b, c, d, et par* A′, B′, C′, D′ *les plans polaires de ces sommets, la somme*

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{(a, A)\,(o, A')},$$

dans laquelle o est le centre de la surface, est constante, quel que soit le tétraèdre abcd. Donner la valeur de la *constante.* (*On désigne par* (a, A) *la distance du point* a *au plan* A, *etc.*) (H. Faure.)

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point a; x_2, y_2, z_2 celles du point b; . . ., et

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

l'équation de la surface du 2^e degré.

Désignons par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y^2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

qui représente six fois le volume du tétraèdre $abcd$; par (M_{x1}) le mineur obtenu en supprimant dans ce déterminant la ligne et la colonne qui contiennent x_1; etc.

L'équation du plan A sera

$$x(M_{x1}) + y(M_{y1}) + z(M_{z1}) + \ldots = 0,$$

et celle du plan A'

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 + d = 0;$$

donc on aura

$$\cos(A, A') = \frac{ax_1(M_{x1}) + by_1(M_{y1}) + cz_1(M_{z1})}{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2}\sqrt{(M_{x1})^2 + (M_{y1})^2 + (M_{z1})^2}}.$$

On a d'ailleurs

$$(a, A) = \frac{\Delta}{\sqrt{(M_{x1})^2 + (M_{y1})^2 + (M_{z1})^2}},$$

$$(o, A') = \frac{d}{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2}};$$

donc

$$\frac{\cos(A, A')}{(a, A)(o, A')} = \frac{ax_1(M_{x1}) + by_1(M_{y1}) + cz_1(M_{z1})}{d\Delta}.$$

En ajoutant à cette expression les trois résultats analogues obtenus en considérant successivement les autres sommets et les autres faces du tétraèdre, on voit que le coefficient de a, dans la somme, sera

$$\frac{x_1(\mathrm{M}_{x1}) + x_2(\mathrm{M}_{x2}) + x_3(\mathrm{M}_{x3}) + x_4(\mathrm{M}_{x4})}{d\Delta} = \frac{1}{d}.$$

Donc on a

$$\sum \frac{\cos(\mathrm{A}, \mathrm{A}')}{(a, \mathrm{A})(o, \mathrm{A}')} = \frac{a+b+c}{d}.$$

Le second membre représente la somme des inverses des carrés des axes de la surface donnée.

Note. — M. Genty nous a envoyé également une solution de la question 990.