Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 172-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__172_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 441

(voir 1re série, t. XVII, p. 187),

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Le produit de plusieurs nombres consécutifs ne peut être une puissance parfaite lorsqu'un de ces nombres est premier absolu. (MATHIEU.)

Cette propriété est une conséquence immédiate du postulatum de M. Bertrand.

Il résulte, en effet, de ce postulatum que, pour $a \geq 2$ il y a au moins un nombre premier entre a et $2a$.

Or, pour que le produit de plusieurs nombres consécutifs puisse être une puissance parfaite, il faut évidemment, si l'un d'eux est un nombre premier absolu p, que son double $2p$ s'y trouve aussi; mais, d'après ce qui a été dit plus haut, le nombre premier q immédiatement supérieur à p est toujours compris entre p et $2p$: il fait donc partie du produit; et, en continuant le même raisonnement, on voit que le produit considéré devrait contenir tous les nombres premiers supérieurs à p, ce qui est impossible puisqu'il est forcément limité. Donc, etc.

Question 953

(voir 2e série, t. VIII, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

1° *Trouver deux entiers n et p ($n < p$) tels, qu'on ait*

$$1 + 2 + \ldots + n = (n+1) + \ldots + p.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré augmenté de 1 *soit égal au double d'un carré ; ou*

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré.

2° *Trouver deux nombres entiers n et p tels, qu'on ait*

$$1 + 2 + \ldots + n = p^2.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré diminué de 1 *soit égal au double d'un carré ; ou*

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré augmenté de 1.

(LAISANT.)

1° Exprimant que la somme des deux membres de l'égalité est double du premier, on a

$$\frac{p(p+1)}{2} = n(n+1) \quad \text{ou} \quad p^2 + p = 2n^2 + 2n.$$

Multipliant cette dernière égalité successivement par 4 et par 2, et ajoutant 1, il vient

$$(2p+1)^2 = 2(2n+1)^2 - 1,$$
$$p^2 + (p+1)^2 = (2n+1)^2.$$

2°

$$n(n+1) = 2p^2 \quad \text{ou} \quad n^2 + n = 2p^2.$$

Les mêmes opérations donnent

$$(2n+1)^2 = 2(2p)^2 + 1,$$
$$n^2 + (n+1)^2 = 4p^2 + 1.$$

On reconnaît les divers énoncés des deux questions.

Revenons à la première, et considérons l'équation

$$2(2n+1)^2 - 1 = (2p+1)^2,$$

où, pour abréger, nous poserons $2n+1 = x$, $2p+1 = y$; ce qui donne

$$(1) \qquad 2x^2 - 1 = y^2,$$

où x et y devront être des nombres entiers impairs. On aperçoit immédiatement une solution, $x = 1$, $y = 1$.

Bien qu'elle soit étrangère à la question qui nous occupe (elle donne $n = 0$, $p = 0$), nous allons voir que toute solution de l'équation (1) en fait trouver une seconde, celle-ci une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

En effet, soit $x = h$, $y = k$ une solution de l'équation (1), en sorte que

$$2h^2 - 1 = k^2.$$

Retranchant cette égalité de (1), il vient

$$2(x^2 - h^2) = y^2 - k^2$$

ou

$$2(x+h)(x-h) = (y+k)(y-k).$$

Multiplions les deux membres par rs, r et s étant deux indéterminées; on a

$$2rs(x+h)(x-h) = rs(y+k)(y-k),$$

équation à laquelle on peut satisfaire en posant

$$2r(x-h)=s(y+k),$$
$$s(x+h)=r(y-k);$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{(2r^2+s^2)h+2rsk}{2r^2-s^2},\quad y=\frac{(2r^2+s^2)k+4rsh}{2r^2-s^2}.$$

Ces valeurs seront en général fractionnaires; mais, si l'on pose

$$\frac{2r^2+s^2}{2r^2-s^2}=u,\quad \frac{2rs}{2r^2-s^2}=v,$$

les valeurs de x et y deviendront

$$x=hu+kv,\quad y=2hv+ku;$$

u et v devant satisfaire seulement à la condition

(2) $$u^2-2v^2=1;$$

x et y seront des nombres entiers, si l'on prend pour u et v des entiers satisfaisant à l'équation (2). Or une solution s'aperçoit immédiatement

$$u=3,\quad v=2.$$

Remplaçant u et v par ces valeurs dans les expressions de x et y, on a

(3) $$x=3h+2k,\quad y=4h+3k.$$

Remplaçant h et k d'abord par 1, puis successivement par les dernières valeurs trouvées pour x et y, on obtient les séries de valeurs suivantes :

$x=1$	5	29	169	985	5741	33461	...;
$y=1$	7	41	239	1393	8119	47321	

d'où l'on tire pour n et pour p les séries de valeurs

$n=0$	2	14	84	492	2870	16730	....
$p=0$	3	20	119	696	4059	23660	

Remarque. — Chaque valeur de x ou de y, à partir de la troisième, est égale à 6 fois la précédente, moins l'antéprécédente. Cette loi, qu'on peut vérifier sur les valeurs précédentes, est facile à démontrer.

Soient x', x'', x''' trois valeurs consécutives de x; y', y'', y''' les valeurs correspondantes de y. On aura

$$x'' = 3x' + 2y', \quad y'' = 4x' + 3y',$$
$$x''' = 3x'' + 2y'', \quad y''' = 4x'' + 3y''.$$

Éliminant successivement entre ces quatre équations les y et les x, on trouve

$$x''' = 6x'' - x', \quad y''' = 6y'' - y'.$$

Résolvons maintenant l'équation

$$(2n+1)^2 = 2(2p)^2 + 1,$$

ou, en posant $2n + 1 = y$, $2p = x$,

$$y^2 = 2x^2 + 1.$$

Elle est identique à l'équation (2). On en connaît donc une solution

$$y = 3, \quad x = 2,$$

et la formule (3), qui est encore applicable à ce cas, permettra d'en déduire d'autres.

On trouve ainsi

$x = 2$	12	70	408	2378	13860	80782	...;
$y = 3$	17	99	577	3363	19601	114243	

d'où

$n = 1$	8	49	288	1681	9800	57121	....
$p = 1$	6	35	204	1189	6930	40391	

La loi de formation des valeurs de x et y est la même que dans le cas précédent.

Remarque. — La substitution d'un autre des systèmes précédents de valeurs de x, y au système 2 et 3 dans les valeurs attribuées à u et à v ne donne pas des valeurs différentes de celles que nous avons obtenues.

Question 975

(voir 2e série, t. VIII, p. 563);

PAR M. A. GUÉBHARD,
Étudiant en Médecine.

Étant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau de courbes conjuguées (c'est-à-dire telles que les tangentes à ces courbes en un point soient conjuguées relativement à l'indicatrice) se projetant sur le plan suivant un réseau orthogonal. (RIBAUCOUR.)

Si nous posons, d'après la notation habituelle,

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}$$

les cosinus des angles que font avec les axes coordonnés deux tangentes conjuguées sont proportionnels à

$$\begin{array}{lll} dx, & dy, & p\,dx + q\,dy, \\ dp, & -dq, & p\,dq - q\,dp. \end{array}$$

Par conséquent, si nous prenons pour plan des xy le plan donné, l'équation différentielle du réseau orthogonal, projection du réseau conjugué cherché, sera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dq},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{r - t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Soit la surface proposée

$$\begin{aligned}&Ax^2 + A'y^2 + A''z^2\\&+2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.\end{aligned}$$

Si ce n'est point une surface cylindrique, elle a pour contour apparent sur le plan donné une certaine conique réelle ou imaginaire dont nous pouvons prendre un foyer pour origine et l'axe focal pour axe des x. Les coefficients de l'équation de la surface vérifieront alors les relations

$$BB' - A''B'' = 0,$$
$$BC'' - C'A'' = 0,$$

$$(B'C'' - CA'')^2 + (C''^2 - A''D)[B^2 - A'A'' - (B'^2 - AA'')] = 0,$$

et, si l'on appelle Δ l'*invariant*

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'' \ (*),$$

qui se réduit ici à

$$\frac{(B^2 - A'A'')(B'^2 - AA'')}{A''},$$

et γ la quantité

$$\frac{(B^2 - A'A'')(A''C - B'C'')}{A''},$$

on trouve pour $\frac{r-t}{s}$ l'expression fort simple

$$\frac{(x^2 - y^2)\Delta - 2\gamma x}{xy\Delta - \gamma y}.$$

Si $\Delta = 0$, la surface donnée étant un paraboloïde, γ ne peut être nul, et l'équation différentielle (1) se réduit à

$$\frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0;$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 119

elle peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx,$$

et donne un système de paraboles

$$y^2=2\mathrm{P}x+\mathrm{P}^2,$$

toutes homofocales à celle du contour apparent, et qui sont à elles-mêmes leurs trajectoires orthogonales, lorsqu'on donne au paramètre des valeurs de signes contraires.

Si Δ n'est pas nul, nous pouvons appeler c l'excentricité $\frac{\gamma}{\Delta}$ de la conique du contour apparent, et l'équation à intégrer devient

$$\left[\frac{dy}{d(x-c)}\right]^2+\frac{(x-c)^2+y^2-c^2}{(x-c)y}\,\frac{dy}{d(x-c)}-1=0.$$

On y reconnaît immédiatement l'équation des trajectoires orthogonales d'un système de coniques homofocales à celle du contour apparent,

$$\frac{(x-c)^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-c^2}=1.$$

On sait que ces trajectoires sont elles-mêmes les coniques homofocales aux premières et d'espèce différente représentées par l'équation

$$\frac{(x-c)^2}{\rho^2}-\frac{y^2}{c^2-\rho^2}=1.$$

Dans le cas des surfaces coniques, $c=0$, et le réseau orthogonal se réduit à un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun, qui est la projection du sommet du cône : résultat facile à prévoir *a priori*, puisque, dans toute surface développable, la caractéristique rectiligne en un point est la conjuguée de toute tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface par ce point (*).

Mais tous les calculs qui précèdent deviennent illusoires si $A'' = 0$, c'est-à-dire si la surface donnée admet une direction asymptotique perpendiculaire au plan donné ; le contour apparent se réduit alors à deux points réels ou imaginaires situés sur une droite toujours réelle que l'on peut prendre pour l'un des axes coordonnés si elle est située à une distance finie, c'est-à-dire si B et B' ne sont pas nuls en même temps : on retrouve alors les mêmes systèmes orthogonaux que dans les cas précédents, ellipses et hyperboles homofocales si Δ n'est pas nul, paraboles homofocales si Δ est nul.

Si B et B' sont nuls en même temps que A'', le réseau se réduit à deux systèmes orthogonaux de droites parallèles, sauf le cas où la surface serait un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z, car alors $B'' = 0$, $A = A'$ et le réseau conjugué sur la surface se confond avec le système orthogonal des parallèles et des méridiens ou des lignes de courbures, et se projette sur le plan donné suivant un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun.

Il ne reste plus, pour compléter la question, qu'à examiner le cas d'une surface cylindrique. Si nous prenons le plan des zx parallèle à la direction des génératrices, nous trouvons $r = 0$, $s = 0$ et le réseau se réduit en projection à un double système orthogonal de droites parallèles ; résultat facile à prévoir sans calculs, car, d'après la définition même des tangentes conjuguées (**), la tangente à une courbe quelconque tracée par un point

(*) Voir J.-A. SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, § 677.
(**) Voir J.-A. SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, § 317.

de la surface du cylindre a toujours pour conjuguée la génératrice qui passe en ce point : les génératrices forment donc, sur la surface, l'un des systèmes du réseau conjugué; l'autre sera formé par les sections planes perpendiculaires à la projection de ces génératrices sur le plan donné.

Si le cylindre est perpendiculaire au plan donné, le réseau conjugué se confond à la limite avec le système orthogonal des génératrices et des sections droites; mais il n'y a plus alors, à proprement parler, de réseau en projection.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Question 976

(voir 2e série, t VIII, p. 563);

PAR M. O. CALLANDREAU.

Étant donnés sur un plan deux cercles et un point, mener par le point une sécante telle, que ses parties intérieures aux deux cercles soient entre elles dans un rapport donné. (*Construction géométrique de la sécante.*)

Soit O le point donné; soient C, C′ les centres des deux cercles donnés; soit enfin ABDE la sécante menée aux deux cercles par O : AB est la partie de la sécante intérieure à la circonférence C, DE la partie intérieure à la circonférence C′. On doit avoir, d'après l'énoncé, en supposant le problème résolu,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}.$$

Soient R et h le rayon de C et la perpendiculaire abaissée de C sur la sécante, R′ et h' le rayon de C′ et la perpendiculaire abaissée de C′ sur la sécante, on doit aussi avoir

$$\frac{R^2 - h^2}{R'^2 - h'^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$n^2 h^2 - m^2 h'^2 = n^2 R^2 - m^2 R'^2.$$

Désignons, pour abréger, $n^2 R^2 - m^2 R'^2$ par K^2,

$$n^2 h^2 - m^2 h'^2 = K^2,$$

$$(nh + mh')(nh - mh') = K^2.$$

Si, à partir de C, dans un sens contraire à CO, on porte $(n-1)$ fois CO, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette ligne sur ABDE sera égale à nh; de même, si l'on porte, à partir de C', dans un sens contraire à C'O, $(m-1)$ fois la longueur C'O, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette ligne sur la sécante sera égale à mh'. Cela aura lieu quelle que soit la position de la sécante.

Comme les extrémités des lignes peuvent être déterminées par les données, on voit que le problème est ramené au suivant :

Par un point donné O, *mener une sécante telle, que le produit de la somme par la différence des perpendiculaires* h_1, h_2, *abaissées de points donnés* O_1, O_2 *sur la sécante, soit égal à une quantité donnee.*

Ce problème, si je ne me trompe, a déjà été résolu par Lamé dans son ouvrage : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Ainsi le problème proposé serait à la rigueur résolu; mais, pour compléter la démonstration, je vais reproduire à peu près la solution que Lamé donne du problème auquel j'ai ramené le proposé.

Si, à partir de O_1 et dans le sens de OO_2, on mène une longueur O_1O_3 égale à OO_2, la perpendiculaire abaissée de O_3 sur la sécante représentera $h_1 + h_2$ si les perpendiculaires sont d'un même côté de la sécante, $h_1 - h_2$ si elles sont de côtés différents.

Si, à partir de O_1 et dans un sens contraire à OO_2, on porte une longueur O_1O_4 égale à OO_2, la perpendiculaire abaissée de O_4 sur la sécante représentera $h_1 - h_2$ ou $h_1 + h_2$, suivant que les perpendiculaires seront ou ne seront pas d'un même côté de la sécante.

Mais, dans tous les cas, le produit des perpendiculaires abaissées de O_3 et de O_4 (points déterminés) sur la sécante est égal à $(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)$ ou à K^2.

On pourrait répéter le même raisonnement en prenant pour point de départ O_2.

La question est donc de résoudre ce nouveau problème:

Par un point donné O, *mener une sécante telle, que le produit des perpendiculaires abaissées sur elles de deux points donnés* O_3, O_4 *soit égale à une quantité donnée* K^2.

Or ce problème, comme il est facile de le voir, revient à mener par le point O des tangentes à l'ellipse ayant pour foyers O_3, O_4, et pour petit axe K.

Ce problème étant un de ceux qu'on sait résoudre, le problème primitif est résolu.

Il admet deux solutions ou n'en admet aucune, suivant que le point O est extérieur ou intérieur à l'ellipse.

Dans le cas très-particulier où le point O serait sur l'ellipse, il n'y aurait qu'une solution.

Sur la question 990

(voir même tome, p. 86);

PAR M. H. D'OVIDIO,

Professeur à Naples.

Dans une Note publiée dans le *Giornale di Matematiche* de Naples (*), j'ai donné des formules qui permet-

(*) Vol. VIII, p. 241, *Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee.*

tent de démontrer et même de généraliser la question 990.

Soient $A_1, \dots, A_4$ *les sommets d'un tétraèdre;* $a_1, \dots, a_4$ *les faces;* V *le volume;* $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_4}$ *les distances d'un point arbitraire* A_α *aux faces;* $D_{\alpha\beta}$ (*ou* $D_{\beta\alpha}$) *la direction positive de la droite qui joint les points* A_α, A_β; $\delta_{\alpha\beta}$ ($= - \delta_{\beta\alpha}$) *la distance des points* A_α, A_β. *La question peut alors s'exprimer par l'équation*

$$(1) \qquad \sum_{rs} x_{\alpha r} x_{\alpha s} a_r a_s \delta_{\alpha r} \delta_{\alpha s} \cos(D_{\alpha r}, D_{\alpha s}) = 0,$$

rs désignant un arrangement binaire des indices 1, 2, 3, 4, *et la somme s'étendant à tous les arrangements avec répétition.*

Mais on a, plus généralement, pour deux points A_α, A_β :

$$(2) \qquad \sum_{rs} x_{\alpha r} x_{\beta s} a_r a_s \delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(D_{\alpha r}, D_{\beta s}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2\ bis) \qquad \sum_{rs} \overline{A_\alpha A_r}\, \overline{A_\beta A_s} \cos(\overline{A_\alpha A_r}, \overline{A_\beta A_s}) V_{\alpha r} V_{\beta s} = 0,$$

appelant $V_{\alpha_1}, \dots$ les volumes des tétraèdres $A_\alpha A_2 A_3 A_4, \dots$, avec des signes convenables.

Pour démontrer l'équation (2), je supposerai connue la relation suivante (*) :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 81 V^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} \cos(D_{\alpha\beta}, D_{\lambda\mu}) \\ & \quad = \sum_{ik,mn} x_{\alpha i} x_{\beta k} x_{\lambda m} x_{\mu n} a_i a_k a_m a_n \delta_{ik} \delta_{mn} \cos(D_{ik}, D_{mn}), \end{aligned} \right.$$

où *ik*, *mn* sont deux arrangements binaires, égaux ou

(*) *Loco citato*, équation (164).

différents, des indices 1, 2, 3, 4. Si l'on change β, λ, μ en r, β, s, et si l'on remarque que

$$a_k x_{rk} = \begin{matrix} 3\mathrm{V} \text{ pour } k = r \\ 0 \text{ pour } k \gtrless r \end{matrix}, \quad a_n x_{sn} = \begin{matrix} 3\mathrm{V} \text{ pour } n = s \\ 0 \text{ pour } n \gtrless s \end{matrix},$$

cette relation devient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 9\mathrm{V}^2 \delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s}) \\ & = \sum_{im} x_{\alpha i} x_{\beta m} a_i a_m \delta_{ir} \delta_{ms} \cos(\mathrm{D}_{ir}, \mathrm{D}_{ms}). \end{aligned} \right.$$

Et si l'on substitue la valeur de $\delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s})$, donnée par l'équation (4), dans la somme (2), celle-ci se réduit à

$$\frac{1}{9\mathrm{V}^2} \sum_{ir, ms} x_{\alpha i} x_{\alpha r} x_{\beta m} x_{\beta s} a_i a_r a_m a_s \delta_{ir} \delta_{ms} \cos(\mathrm{D}_{ir}, \mathrm{D}_{ms}).$$

Or, d'après l'équation (3), cette expression équivaut à

$$9\mathrm{V}^2 \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} \cos(\mathrm{D}_{\alpha\alpha}, \mathrm{D}_{\beta\beta}),$$

qui est nulle, car $\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{\beta\beta} = 0$. Ainsi l'équation (2) est démontrée.

Voici une autre relation, qui a de l'analogie avec la relation (2). En désignant par $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_4$ les plans des faces $a_1, \ldots, a_4$; par X_α, X_β deux plans quelconques; par $\mathrm{D}_{\alpha\beta}, \mathrm{D}_{\alpha_1}, \ldots$ les droites $\mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_1, \ldots$; par $\xi_{\alpha_1}, \ldots$ les distances des sommets $\mathrm{A}_1, \ldots$ au plan X_α, etc.; on a

$$(5) \quad \sum_{rs} \xi_{\alpha r} \xi_{\beta s} a_r a_s \sin(\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_r) \sin(\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_s) \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s}) = 0.$$

On déduit cette nouvelle équation de la suivante (*) :

$$\begin{aligned} & 81\mathrm{V}^4 \sin(\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta) \sin(\mathrm{X}_\lambda, \mathrm{X}_\mu) \cos(\mathrm{D}_{\alpha\beta}, \mathrm{D}_{\lambda\mu}) \\ & = \sum_{ik, mn} \xi_{\alpha i} \xi_{\beta k} \xi_{\lambda m} \xi_{\mu n} a_i a_k a_m a_n \sin(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k) \sin(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_n) \cos(\mathrm{D}_{ik}, \mathrm{D}_{mn}). \end{aligned}$$

(*) *Loco citato*, equation (165)

On peut établir l'équation (2 *bis*) d'une autre manière. Si $P_1, \ldots, P_n$ désignent des forces appliquées à un point O, R leur résultante, $P'_1, \ldots, P'_n$ des forces appliquées à un autre point O', et R' leur résultante, on a

$$(6) \qquad \sum_{rs} P_r P'_s \cos(P_r, P'_s) = RR' \cos(R, R'),$$

rs étant un arrangement binaire des indices 1, 2,...,*n*.

Or si l'on pose, en conservant la notation employée par M. Padova,

$$P_1 = OA_1 \frac{x_1}{x'}, \ldots, \quad P_4 = OA_4 \frac{t_1}{t'}, \quad V_1 = \text{tétr.}\, OA_2 A_3 A_4, \ldots,$$

$$P'_1 = O'A_1 \frac{x_2}{x'}, \ldots, \quad P'_4 = O'A_4 \frac{t_2}{t'}, \quad V'_1 = \text{tétr.}\, O'A_2 A_3 A_4, \ldots,$$

on aura, comme il a été démontré par M. Padova,

$$R = 0, \quad R' = 0;$$

par conséquent la relation (6) deviendra

$$\sum_{rs} \overline{OA_r}\, \overline{O'A_s} \cos(\overline{OA_r}, \overline{O'A_s}) V_r V'_s = 0,$$

qui équivaut à l'équation (2 *bis*).

Un procédé semblable nous conduit à une nouvelle démonstration de l'équation (5).

Remarquons d'abord que la formule (6) subsiste pour des systèmes de forces agissant dans un même plan, mais non appliquées à un même point. Or si, suivant les droites $D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_4}$, on fait agir des forces proportionnelles aux produits

$$(7) \qquad a_1 \xi_{\alpha_1} \sin(X_\alpha, X_1), \ldots, \quad a_4 \xi_{\alpha_4} \sin(X_\alpha, X_4),$$

on trouve aisément que la somme des moments de ces forces par rapport au pied de la perpendiculaire $\xi_{\alpha i} (i = 1, 2, 3, 4)$ est $\sum_r a_r \xi_{\alpha r} x_r^{(i)}$, $x_r^{(i)}$ indiquant la distance de ce pied au plan X_r. Et comme on sait que cette somme est nulle, on conclut que les forces (7) se font équilibre.

Cela posé, si l'on applique l'équation (6) au système (7) et au système

$$a_1 \xi_{\beta_1} \sin(X_\beta, X_1), \ldots, \quad a_4 \xi_{\beta_4} \sin(X_\beta, X_4),$$

qui est aussi en équilibre, on retombe sur l'équation (5).

Question 1023

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Le triangle ABC *et le triangle* A′B′C′, *formé en joignant les pieds des hauteurs de* ABC, *ont leur axe d'homologie perpendiculaire à la ligne qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.* (LEMOINE.)

Soient α, β, γ les points de concours des côtés (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′),

I le centre d'homologie,

M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB;

on sait que les trois points α, β, γ sont situés sur l'axe d'homologie des triangles ABC, A′B′C.

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que la droite $\alpha\beta\gamma$ est l'axe radical des circonférences circonscrites aux deux triangles, car on sait que le cercle circonscrit à A′B′C′ (cercle des neuf points) a son centre au milieu de OI.

Considérons le point α par exemple. Je dis que

$$\alpha B . \alpha C = \alpha M \ \alpha A'.$$

En effet, le faisceau (C', $BA'C\alpha$) étant harmonique, on a, abstraction faite du signe des segments,

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\alpha B}{\alpha C}; \quad \text{d'où} \quad A'B . \alpha C = A'C . \alpha B;$$

mais

$$A'B = \alpha B - \alpha A' \quad \text{et} \quad A'C = \alpha A' - \alpha C;$$

donc, en substituant, effectuant les calculs et transposant,

$$2 \alpha B \ \alpha C = (\alpha B + \alpha C) . \alpha A',$$

puis

$$\alpha B . \alpha C = \frac{(\alpha B + \alpha C)}{2} . \alpha A' = \alpha M . \alpha A'.$$

Le point α est donc d'égale puissance par rapport aux deux cercles.

On répéterait la même démonstration pour le point β, par exemple.

Donc $\alpha\beta\gamma$ est l'axe radical des deux cercles.

C. Q. F. D.

Note — La meme question a ete resolue par MM Moret Blanc, professeur au lycee du Havre, A Pellissier, capitaine d artillerie a Douai, O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique, et H. Lez, à Lorrez.