Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 217-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__217_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre adressée à la rédaction.

Permettez-moi de vous adresser quelques réflexions au sujet de divers articles récemment publiés dans votre excellent recueil. J'espère que, trouvant dans ces observations une preuve de l'attention avec laquelle je lis les *Nouvelles Annales*, vous les accueillerez avec plaisir.

I. Mes premières remarques se rapportent à une analyse, fort intéressante, de l'ouvrage de M. Schlömilch : *Compendium der höheren Analysis* (*). Cet ouvrage est

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 385.

fort bien fait, et mérite les éloges de M. Houël; mais, pour cette raison même, j'aurais désiré que certains points défectueux fussent signalés à l'attention de l'auteur et du lecteur.

Ainsi, M. Schlömilch donne (t. I, § 15) une démonstration inexacte de l'équation bien connue

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{d^2f}{dy\,dx}.$$

Il fait remarquer d'abord que si l'on change x en $x+h$, on a

$$f(x+h, y) = f(x, y) + hf'_x(x+\theta h, y),$$

et il admet que, y restant constant dans cette opération, θ est indépendant de y (*aus demselben Grunde hängt θ nicht von y ab*). Cela posé, il démontre sans peine, en faisant varier y sans faire varier θ, que l'on arrive au résultat cherché. Or ce point admis sans démonstration en exigerait une, ou plutôt ce lemme est erroné, et θ, en général, est une quantité dépendante de y. Géométriquement, si l'on prend x, y pour coordonnées horizontales et $f(x, y)$ pour ordonnée verticale d'une surface, le postulat reviendrait à ceci : prenons deux sections de la surface parallèles au plan XZ, et, sur chacune d'elles, l'arc compris entre les plans x, $x+h$; les points de ces deux arcs où la tangente est parallèle à la corde qui joint les extrémités de l'arc répondent à une même valeur $x+\theta h$ de l'abscisse. Il est visible que ce théorème est inexact.

L'erreur a été signalée, au reste, récemment par M. Lindelöf, et admise par l'auteur d'un article du *Bulletin des sciences mathématiques* (*). Mais je ne saurais partager l'opinion de ce dernier sur la légitimité des

(*) T. I, p. 275.

démonstrations du même théorème qui sont fondées sur ce *lemme :* Si $F(x, \alpha)$ est infiniment petit en même temps que α, quel que soit x, il en sera de même de $D_x F(x, \alpha)$. « Cette proposition, dit-il, qui se vérifie sur toutes les fonctions continues que l'on rencontre, nous semble être une hypothèse que l'on doit admettre au même titre que l'on admet, pour toute fonction continue d'une seule variable, l'existence d'une dérivée, c'est-à-dire que l'on exclut d'avance les fonctions discontinues ou oscillantes qui ne jouiraient pas de cette propriété. » Il me semble qu'il y a entre les deux cas une différence assez sensible. L'existence de la dérivée d'une fonction continue $f(x)$ *en général,* c'est-à-dire abstraction faite de valeurs isolées et exceptionnelles de la variable, est une propriété qui découle de la continuité de la fonction et se démontre *à priori.* De même, je ne vois aucun inconvénient à admettre, dans une démonstration, la continuité de la dérivée $D_x f(x)$, *en général;* non plus qu'à admettre, pour la démonstration du théorème qui nous occupe, que la dérivée $D_x D_y f(x, y)$ est une fonction *généralement* continue de x et de y, parce que ces diverses propriétés résultent de la continuité des fonctions primitives, et ne cessent d'être vraies que pour des valeurs *particulières* des variables, qui ne peuvent se succéder sans intervalle. Mais il en est autrement du lemme indiqué ci-dessus, qui suppose en réalité la continuité de la fonction $D_x F(x, \alpha)$ dans le voisinage d'une valeur *particulière,* $\alpha = 0$, de la variable α. Aussi, bien loin qu'il se vérifie sur toutes les fonctions continues, peut-on citer un bon nombre de cas dans lesquels il est en défaut. Telle est la fonction $\alpha \sin \frac{x}{\alpha}$ qui est infiniment petite avec α, quel que soit x, tandis que sa dérivée $\cos \frac{x}{\alpha}$

ne tend alors vers aucune limite déterminée. Or, comme dans l'application que l'on fait d'ordinaire de ce lemme à la démonstration de l'équation

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx},$$

la fonction $F(x, \alpha)$ n'est autre que

$$\frac{f(x+\alpha, y) - f(x, y)}{\alpha} - f'_x(x, y),$$

fonction qui nous est profondément inconnue dans sa nature intime, rien ne nous donne le droit de supposer que la dérivée de cette fonction par rapport à x, lorsque α tend vers la valeur *particulière* zéro, ne devient pas elle-même indéterminée.

La démonstration de l'équation

$$\lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$$

par M. Schlömilch (t. I, § 11) soulève des difficultés du même ordre.

Enfin signalons un passage (t. I, § 108) relatif aux solutions singulières des équations du premier ordre. D'après l'auteur, une telle équation ne peut renfermer de solution singulière, à moins qu'elle ne soit au moins du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$ (*die vorige Bemerkung zeigt nun augenblicklich dass eine singuläre Losung nur dann existiren kann, wenn die gegebene Gleichung wenigstens vom zweiten Grade ist*). Il n'en est rien, comme le montre immédiatement l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (y - x)^{\frac{1}{3}},$$

qui admet la solution singulière $y = x$. M. Schlömilch fonde cette conclusion sur ce que la solution singulière représente *toujours* l'enveloppe des intégrales particulières, auquel cas il faudrait, en effet, que celles-ci se coupassent généralement deux à deux. Mais la solution singulière peut être le lieu des *points de rebroussement* (c'est le cas dans l'exemple cité) ou des *points d'inflexion* des intégrales particulières, et alors le raisonnement tombe.

II. Dans le numéro d'octobre 1870 (2e série, t. IX, p. 457), M. Ruchonnet se propose de déterminer la distance δ d'un point M' d'une courbe gauche, à la sphère osculatrice correspondant à un point infiniment voisin M. Les considérations dont il fait usage sont assez compliquées : il arrive à ce résultat

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24R},$$

ε étant l'angle de contingence en M, η l'angle de torsion, ds l'élément de la courbe, dS celui de l'arête de rebroussement de la surface polaire au point correspondant, R le rayon de la sphère osculatrice. On peut écrire aussi, en désignant par r et T les rayons de première et de seconde courbure,

$$\delta = \frac{ds^3\, dS}{24rRT}.$$

Je possède des formules générales, très-commodes pour ce genre de recherches, qui me donnent, pour ainsi dire sans calcul,

$$\delta = \frac{ds^4}{24Rr^2} = \frac{\varepsilon^2 ds^2}{24R}.$$

L'un de ces résultats, évidemment, est inexact. J'ai quelque confiance dans mes formules, qui se vérifient de diverses manières et sont d'ailleurs d'une démonstration assez simple. J'incline donc à penser qu'une erreur se sera glissée dans les déductions un peu longues de M. Ruchonnet, mais il faut quelque temps et quelque attention pour la découvrir.

III. Le numéro des *Nouvelles Annales* de juillet 1871 renferme (2ᵉ série, t. X, p. 318) un article, signé *un Abonné*, qui a pour objet la détermination du *rayon de courbure en un point de rebroussement d'une courbe plane*, et dont les résultats ne sont pas exacts. Pour mettre cela en évidence, je vais ici exposer cette théorie telle que je la donne dans mes leçons, puis comparer les résultats que j'obtiendrai avec ceux de l'auteur de cet article.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane; (a, b) un point M de cette courbe, α l'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x. Du centre M avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons un cercle, et soit M′ un point où ce cercle est coupé par la courbe; θ l'angle que fait le rayon MM′ avec l'axe des x. Enfin, soient R le rayon de courbure en M et M′P une perpendiculaire abaissée du point M′ sur la tangente en M. On a, d'après une expression bien connue du rayon de courbure,

$$R = \lim \frac{\overline{MM'}^2}{2M'P} = \lim \frac{\rho^2}{2\rho \sin(\theta - \alpha)},$$

ou encore

$$(1) \qquad R = \lim \frac{\rho}{2(\theta - \alpha)},$$

puisque, évidemment, $\sin(\theta - \alpha)$ est infiniment petit en même temps que ρ. C'est par la formule (1) que nous déterminerons le rayon de courbure dans les différents cas.

Si l'on pose

$$H = \pm\sqrt{\left(\frac{dF}{da}\right)^2 + \left(\frac{dF}{db}\right)^2},$$

on démontre facilement (*) que, pour les points de la courbe situés sur le cercle, ρ et θ satisfont à l'équation

$$(2)\quad H\sin(\theta - \alpha) + \rho f(\theta) + \rho^2 f_1(\theta) + \rho^3[f_2(\theta) + \omega] = 0,$$

$f(\theta), f_1(\theta), \ldots$ étant des fonctions entières de $\sin\theta$, $\cos\theta$, que l'on forme très-facilement, soit en développant $F(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)$ par la formule de Taylor; soit, ce qui est plus simple lorsque l'équation $F(x, y) = 0$ est algébrique, en remplaçant dans cette équation x et y par $a + \rho\cos\theta$, $b + \rho\sin\theta$, réduisant par $F(a, b) = 0$, et ordonnant les termes suivant les puissances de ρ.

On tire de l'équation (2)

$$\frac{\rho}{\sin(\theta - \alpha)} = -\frac{H}{f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \ldots},$$

d'où, ρ tendant vers zéro et θ vers α,

$$\lim \frac{\rho}{\theta - \alpha} = -\frac{H}{f(\alpha)}, \quad R = -\frac{H}{2f(\alpha)}.$$

Telle sera la valeur du rayon de courbure en un point *quelconque* de la courbe. Remplaçant H et $f(\alpha)$ par leurs valeurs, on aura la formule connue

$$R = \mp \frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{da}\right)^2 + \left(\frac{dF}{db}\right)^2}}{\frac{d^2F}{da^2}\cos^2\alpha + 2\frac{d^2F}{da\,db}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{d^2F}{db^2}\sin^2\alpha}.$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un point sin-

(*) *Voir* mon *Cours d'Analyse infinitésimale*, p. 180 et suiv.

gulier. On sait qu'un tel point est caractérisé par les équations

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0,$$

et, par suite, $H = 0$. Mais comme, dans ce cas, les valeurs de α qui déterminent les directions des tangentes au point singulier sont les racines de l'équation $f(\alpha) = 0$, le rayon de courbure se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et il faut chercher sa valeur autrement. L'équation (2) se réduit ici à

$$(3) \qquad f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \rho^2[f_2(\theta) + \omega] = 0;$$

d'autre part, on a

$$f(\theta) = f(\alpha) + (\theta - \alpha)[f'(\alpha) + \varepsilon],$$

ε tendant vers zéro en même temps que ρ. Donc

$$(\theta - \alpha)[f'(\alpha) + \varepsilon] + \rho f_1(\theta) + \rho^2[f_2(\theta) + \omega] = 0,$$

d'où

$$\frac{\rho}{\theta - \alpha} = -\frac{f'(\alpha) + \varepsilon}{f_1(\theta) + \rho[f_2(\theta) + \omega]},$$

et enfin

$$(4) \qquad R = -\frac{f'(\alpha)}{2f_1(\alpha)}.$$

Cette formule donnera les rayons de courbure des deux branches qui se croisent en un point double, en y substituant successivement les valeurs de α qui répondent aux deux branches. Ainsi, pour la courbe

$$(y^2 - x^2)^2 - x^4 \sin x = 0,$$

qui a un point double $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = 0\right)$, on a

$$\tan g\alpha = \pm \frac{\pi}{4},$$

et les deux branches ont même rayon de courbure

$$R = \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si le point (a, b) est un rebroussement, les racines de l'équation $f(\alpha)$ sont, comme on sait, égales; $f'(\alpha)$ est donc nul, et, par conséquent, si $f_1(\alpha)$ est différent de zéro, auquel cas le rebroussement est de première espèce (*), $R = 0$. *Le rayon de courbure est donc nul, en général, en un point de rebroussement de première espèce.*

Si, au contraire, il s'agit d'un rebroussement de seconde espèce, $f_1(\alpha) = 0$; R prend de nouveau la forme $\frac{0}{0}$, et il faut recourir à l'équation (3). Comme $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$ sont ici nuls, on a

$$f(\theta) = \frac{(\theta - \alpha)^2}{1.2}[f''(\alpha) + \varepsilon], \quad f_1(\theta) = (\theta - \alpha)[f_1'(\alpha) + \varepsilon'],$$

ε et ε' tendant vers zéro avec ρ, et l'équation (3) devient, après substitution et division par $(\theta - \alpha)^2$,

$$\tfrac{1}{2}f''(\alpha) + \frac{\rho}{\theta - \alpha}f_1'(\alpha) + \frac{\rho^2}{(\theta - \alpha)^2}f_2(\theta) + \omega_1 = 0,$$

ω_1 désignant une quantité infiniment petite en même temps que ρ. Passant à la limite et remplaçant $\frac{\rho}{\theta - \alpha}$ par $2R$, on obtient l'équation

$$(5) \qquad R^2 + \frac{f_1'(\alpha)}{2f_2(\alpha)}R + \frac{f''(\alpha)}{8f_2(\alpha)} = 0,$$

équation du second degré qui détermine les rayons de courbure des deux branches au point de rebroussement.

(*) Ouvrage cité, p. 186.

Ainsi, en général, *ces rayons de courbure sont inégaux* (*).

Il est facile maintenant de se rendre compte de l'erreur que renferme l'article cité. Représentant par $u=0$ l'équation de la courbe, et admettant que l'on ait pris le point singulier pour origine et la tangente commune aux deux branches pour axe des x, ce qui entraîne les relations

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0=0,\quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0=0,$$

si le rebroussement est de seconde espèce, l'auteur arrive à une équation que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{2}{3}\mathrm{R}\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)_0+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0=0;$$

elle est donc du premier degré seulement. Mais cela tient à ce que, dans le développement de $u(h,k)$ suivant les puissances de h et de k par la formule de Taylor, l'auteur a négligé certains termes du quatrième ordre, négligeables en effet dans les cas précédents, mais non dans celui-ci, où l'on divise l'équation par k^2. Rétablissant ces termes et corrigeant une petite erreur de calcul (à laquelle est due la présence du dénominateur 3 dans l'équation précédente), on trouvera, d'après les notations de l'auteur,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0+\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right)_0\mathrm{R}+\frac{1}{24}\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 4\mathrm{R}^2=0,$$

équation identique avec notre équation (5) quand on fait dans celle-ci $\alpha=0$, après avoir remplacé $f''(\alpha)$, $f_1'(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ par leurs valeurs développées.

J'observerai, en terminant, que M. Painvin s'est oc-

(*) La formule (5) est indiquée, comme exercice, dans mon *Cours d'Analyse*, p. 215.

cupé de la courbure en un point de rebroussement : je ne connais de son travail que les indications qui se trouvent dans les *Comptes rendus* (séance du 18 janvier 1869).

Louvain, le 22 mars 1872.

PH. GILBERT.