NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KOEHLER

Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 21-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__21_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. KOEHLER.

Si l'on conçoit un faisceau de coniques passant par quatre points, un faisceau de droites pivotant autour d'un autre point du plan et lié anharmoniquement au premier, le lieu de leurs intersections est une courbe du troisième ordre. Ce théorème constitue la véritable définition géométrique de ces courbes, et permet d'établir toute leur théorie au moyen des seules ressources de la géométrie pure, en se servant des propriétés des lignes d'ordre inférieur. C'est ainsi que la théorie des coniques peut être déduite de leur génération par deux faisceaux homographiques de droites (*Traité des sections coniques* de M. Chasles).

En premier lieu, je rappellerai la méthode donnée par M. Chasles pour construire une cubique déterminée par neuf points a, b, c,..., i. Je prends arbitrairement quatre des points donnés a, b, c, d pour servir de *base* au faisceau des coniques génératrices; je circonscris au quadrilatère $efgh$ une conique C capable du rapport anharmonique des quatre coniques $abcde$, $abcdf$, $abcdg$, $abcdh$; puis au quadrilatère $efgi$ une conique C' capable du rapport ($abcde$, $abcdf$, $abcdg$, $abcdi$); C, C', qui ont déjà trois points communs efg, se coupent en un quatrième point P, toujours réel, qui sera un dixième point de la courbe demandée, et le *pivot* du faisceau de rayons. Il est clair, en effet, que le faisceau P(e, f, g, h, i) est homographique au faisceau des polaires d'un point quelconque par rapport aux coniques $abcd$(e, f, g, h, i).

Cette construction met en évidence la nécessité de se donner neuf points pour déterminer une cubique.

I. Toutes les cubiques passant par huit points donnés a, b, c, . . . , h passent par un même neuvième point.

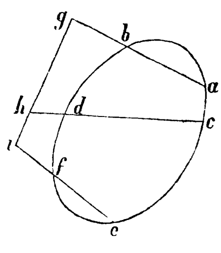
$abcd$ étant la base des coniques, soient P, P' les pivots correspondants aux deux cubiques $abc\ldots hi$, $abc\ldots hi'$. Ces deux points sont sur la conique C circonscrite à $efgh$ et capable du rapport anharmonique $abcd$(e, f, g, h). Il est évident que, si $abc\ldots hi$ et $abc\ldots hi'$ ont d'autres points communs, ils seront situés sur cette conique C;

car les rayons tels que Px, $P'x$ menés à l'un de ces points appartiendront aux faisceaux homographiques qui ont leurs sommets en P, P', et dont on a déjà quatre couples de rayons correspondants, savoir : $P(e, f, g, h)$, $P'(e, f, g, h)$. Prenons pour base $abce$; on verra de même que les points communs appartiennent à la conique C_1, circonscrite à $dfgh$ et capable du rapport anharmonique $abce(d, f, g, h)$. C et C_1 se coupent en un quatrième point k, toujours réel; k appartiendra aux deux cubiques, et, comme il ne dépend en aucune façon des neuvièmes points i et i', le théorème est démontré.

La construction du neuvième point d'intersection k conduit, ainsi que je le montrerai plus loin, à plusieurs propriétés fondamentales des cubiques, lorsqu'on donne aux huit premiers points des positions particulières.

II. Si, parmi les neuf intersections d'une cubique avec trois droites quelconques, six points appartiennent à une conique, les trois autres sont en ligne droite.

Fig. 1.



Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit points répartis, comme l'indique la *fig.* 1, sur trois droites quelconques, les six premiers appartenant à une même conique. Parmi les cubiques qui passent par ces huit points, il y en a deux qui passent en i, savoir : la cubique composée des trois droites *ab*, *cd*, *ef*, et celle qui se réduit à la conique donnée et à la droite *gh*. Toutes les autres passent donc en *i*. Le système des droites *ab*, *cd*, *ef* peut se concevoir comme engendré en prenant pour base *abcd*, et *i* pour pivot; il en est de même pour le système de la droite *gh* et de la conique. Dans le premier cas, à la conique (*ab*, *cd*) correspond le rayon *ihg*, à toutes les autres coniques du faisceau correspond le rayon unique *ife*; l'inverse a lieu dans le second cas.

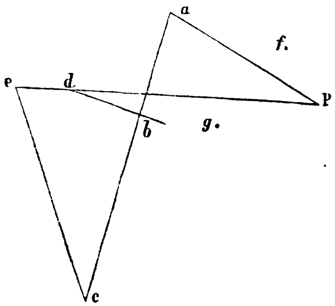
Autrement. — Supposons une cubique définie par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur une conique, et par trois points quelconques *l*, *m*, *n*. Soit *abcd* la base. La conique C circonscrite au quadrilatère *lmne* et capable du rapport *abcd*(*l*, *m*, *n*, *e*), la conique C′ circonscrite à *lmnf* et capable du rapport *abcd*(*l*, *m*, *n*, *f*) donnent le pivot *i* par leur quatrième intersection; mais les deux rapports anharmoniques sont égaux, puisque les deux coniques *abcde*, *abcdf* coïncident; on en conclut que la quatrième intersection *i* est sur la droite *ef*. Considérons la conique du faisceau réduite au système (*ab*, *cd*); le rayon correspondant issu de *i* la rencontrera en deux points *g*, *h*, qui appartiendront, ainsi que *i*, à la cubique.

Le théorème général qui précède conduit, comme on sait, à divers corollaires dont la démonstration directe est d'ailleurs très-simple :

1° Les tangentes menées à une cubique en trois points pris en ligne droite coupent la courbe en trois points également en ligne droite.

Si l'on prend, pour déterminer une cubique, trois points en ligne droite *a*, *b*, *c* (*fig.* 2), les tangentes en *b*, *c*, les points *d*, *e* où elles coupent la courbe, enfin deux autres *f*, *g* pris d'une manière quelconque, on voit facilement qu'en prenant pour coniques génératrices celles qui ont un double contact suivant *bc*, le pivot sera sur la droite *de*; soit P ce pivot. Au rayon P*a* correspond la conique réduite à la droite double *bc*; P*a* est donc tangente à la cubique en *a*.

Fig. 2.



2° La droite qui joint deux points d'inflexion coupe la courbe en un troisième point d'inflexion.

Soient *at*, *bt'* deux tangentes d'inflexion, *c*, *d*, *e* trois points quelconques qui achèvent de déterminer la cubique. Si l'on prend pour base deux des trois points infiniment voisins confondus en *a*, et deux des points infiniment voisins confondus en *b*, le pivot sera sur la droite *ab*. Pour mener la tangente en ce point, il suffit de chercher le rayon correspondant à la droite double *ab* (conique passant au pivot); quel que soit ce rayon, les trois points de la courbe qui lui appartiennent, savoir : le pivot lui-même et les deux points d'intersection avec la conique *ab*, seront confondus en un seul.

On démontrerait, d'une manière analogue, que les trois asymptotes d'une cubique coupent la courbe en trois points en ligne droite; que si, par un point d'inflexion, on mène trois droites quelconques, les six points d'intersection appartiennent à une conique.

3° Supposons que les points d, e de la *fig.* 2 coïncident; le pivot P sera sur la tangente en d, la droite Pa sera toujours tangente en a, et l'on aura ce théorème de Maclaurin :

Si, d'un point d'une cubique, on mène deux tangentes, la corde de contact coupe la courbe en un troisième point, et les tangentes menées au point donné et en ce dernier point se coupent sur la courbe.

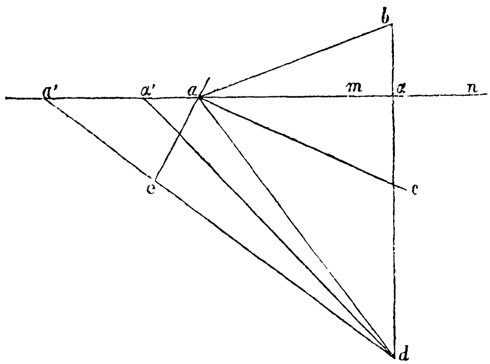
4° Si le point (d, e) est un point d'inflexion, le pivot P vient se confondre avec lui, et l'on en conclut que, si par un point d'inflexion on mène trois tangentes, les trois points de contact sont en ligne droite.

La cubique définie par un point d'inflexion I, la direction de la tangente, les contacts a, b, c situés en ligne droite, enfin par un dixième point quelconque, est engendrée par un faisceau de coniques tangentes en b, c aux droites Ib, Ic, et par un faisceau de droites issues de I. La corde de contact est la polaire du pivot I par rapport à toutes les coniques génératrices; relativement à la courbe et au point d'inflexion, elle jouit des mêmes propriétés que les polaires des coniques. Ainsi toute sécante menée par le point I est divisée harmoniquement par ce point et par la corde de contact; si l'on mène deux sécantes quelconques Imn, I$m'n'$, les droites mm', nn' et mn', $m'n$ se coupent sur cette corde.

III. Soient ab, ac deux tangentes à une cubique menées d'un point a de la courbe, ae la tangente en a, d le troisième point d'intersection de la courbe et de la droite bc (*fig.* 3).

D'après un des théorèmes précédents, ed est tangente en d; en d'autres termes, le système des neuf points formé par les quatre contacts a, b, c, d et par le point e constitue un groupe *pivotable* pour une infinité de cubiques. Quel que soit le dixième point m choisi pour déterminer une de ces courbes, si l'on prend pour coniques génératrices celles qui ont un double contact suivant bc, le

Fig. 3.



pivot des rayons sera en e. Concevons que le point m se déplace sur une transversale $a\alpha$; à chaque position de m correspondra une position de n, troisième intersection de la cubique et de la transversale, et réciproquement; on aura ainsi des segments en involution mn, $m'n'$,.... Lorsque m coïncide avec α, la cubique se réduit à la droite ea et à la droite double bc, le segment mn devient le point α, qui est donc un des points doubles de l'involution. Lorsque m vient en a', intersection de $a\alpha$ et de de, la cubique devient le système des droites $\alpha'a$, ab, ac, de sorte que $a'a$ est un segment de l'involution; le second point double est α', conjugué harmonique de α par rapport à aa'. On peut donc énoncer ce théorème :

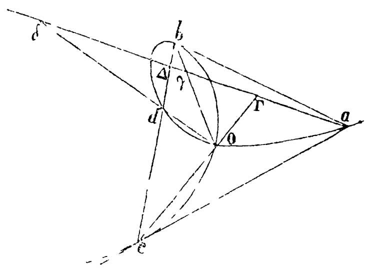
Si, par le point d, on mène une droite $d\alpha'$ telle que le faisceau $d(\alpha, a, \alpha', a')$ soit harmonique, toute trans-

versale issue du point a est coupée harmoniquement par les droites $d\alpha$, $d\alpha'$ et par la cubique en m, n.

C'est la douzième proposition du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre.

IV. On donne une cubique à point double, deux tangentes ab, ac menées d'un point a de la courbe; toute transversale passant en a est divisée harmoniquement par la courbe, par la corde de contact bc et par la droite qui joint le point double O au point d où cette corde rencontre la courbe (*fig.* 4).

Fig. 4.



Toutes les fois qu'un des points de la base des coniques coïncide avec le pivot des rayons, il est un point double de la cubique engendrée; lorsqu'un point double entre dans les données, il suffit de six autres points pour achever de déterminer la cubique; on peut prendre alors arbitrairement trois des six points pour compléter la base (*).

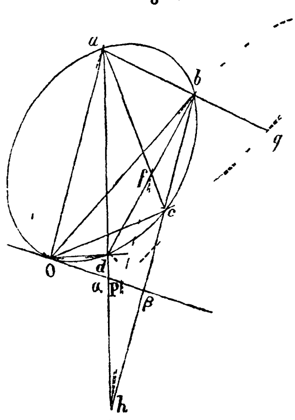
D'après cela, soit Oabc la base, O étant le pivot. A la conique O$abcb$, c'est-à-dire (ab, Oc), correspond le

(*) M. de Jonquières, dans ses *Mélanges de Géométrie* et dans son Mémoire sur la génération des courbes, a étudié avec détails la construction des courbes du troisième, du quatrième ordre et même des ordres supérieurs à points multiples, dans divers cas particuliers.

rayon Ob; de même le rayon Oc correspond à l'ensemble des droites ac, Ob, et le rayon Od à l'ensemble des droites Oa, bc. Menons par le point a une transversale quelconque; on aura les segments $a\Gamma$, $a\gamma$, $a\Delta$, auxquels correspondent respectivement les rayons $O\gamma b$, $O\Gamma$, $Od\delta$. On voit que les points Γ, γ, Δ d'une part, γ, Γ, δ de l'autre, déterminent deux divisions homographiques dont les points doubles sont les intersections de la courbe et de la transversale. Comme Γ et γ sont en correspondance réciproque, les segments formés par les couples de points homologues sont en involution; $\Delta\delta$ est un de ces segments : il est donc divisé harmoniquement par les points doubles, ce qui démontre le théorème.

V. Si, par un point d'une cubique, on mène quatre tangentes, les lignes qui joignent deux à deux les points de contact se coupent sur la courbe (*fig.* 5)

Fig 5



Soient Oa, Ob, Oc, Od quatre droites convergentes;

il est évident qu'on peut déterminer une cubique par les conditions de passer en O et de toucher en a, b, c, d les quatre droites.

Je prends $abcd$ pour base; pour trouver le pivot, il faut circonscrire au quadrilatère $ab\mathrm{O}c$ une conique C capable du rapport anharmonique des quatre coniques $\bar{a}bcd$, $a\bar{b}cd$, $abcd\mathrm{O}$, $ab\bar{c}d$, et au quadrilatère $ab\mathrm{O}d$ une conique C′ capable du rapport $\bar{a}bcd$, $a\bar{b}cd$, $abcd\mathrm{O}$, $abc\bar{d}$ (la notation $a\bar{b}cd$ désigne la conique tangente en b à la droite Ob). Or, toutes les coniques du faisceau déterminent sur la tangente en O à $abcd\mathrm{O}$ une involution dont O est un des points doubles. Le second point double P n'est autre chose que le point de concours de toutes les polaires de O, puisque c'est le conjugué harmonique de O par rapport à tous les segments. Pour les cinq coniques considérées, $abcd(a, b, c, d, \mathrm{O})$, les polaires sont les droites Pa, Pb, Pc, Pd, PO, et elles forment un faisceau homographique à celui des coniques. P est donc le pivot, et on l'obtient en prenant le conjugué harmonique du point O par rapport à un segment quelconque de l'involution, par exemple $\alpha\beta$ intercepté sur la tangente par la conique (ac, bd). On voit qu'à chaque conique du faisceau correspond un rayon qui est la polaire du point O. En particuler, si l'on considère le couple de droites ac, bd, le rayon correspondant sera Pf; f est donc un point de la cubique. Il en est de même des points g, h.

Corollaires. — 1° Les rayons Pf, Pg, Ph sont tangents à la cubique en f, g, h; on a donc immédiatement les quatre tangentes issues de P, la quatrième étant PO. Enfin, la tangente en P sera la tangente à la conique POfgh, ou, ce qui revient au même, le rayon correspondant à la conique $abcd$P; ces conséquences sont évidentes. De plus, les points de concours des côtés opposés et le point de concours des diagonales du quadrilatère $Ofgh$ seront trois nouveaux points de la courbe. Soit p le point où la tangente en P à la conique $POfgh$ rencontre la conique $abcdP$; il suffira de joindre p aux trois points dont il s'agit pour avoir les tangentes en ces points.

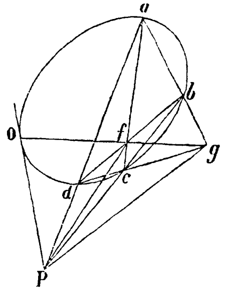
2° Toute transversale menée par le point O est divisée harmoniquement par la courbe et par deux des cordes de contact.

Cette propriété résulte immédiatement de ce que les polaires du point O par rapport aux coniques du faisceau $abcd$ sont précisément les rayons homologues du faisceau de droites; car les points de la courbe situés sur la transversale sont les points doubles de l'involution déterminée par les coniques sur cette droite; ils divisent harmoniquement tous les segments, en particulier ceux qu'interceptent les couples de cordes (ac, bd), (ab, cd), (ad, bc).

La transversale est aussi divisée harmoniquement par la cubique et par la conique $abcdO$, qui est la première polaire du point O.

3° Supposons que le point P coïncide avec un des

Fig. 6.

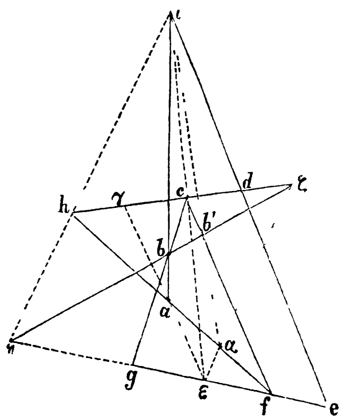


points f, g, h, avec h par exemple. Alors la droite fg (*fig.* 6) passera en O; pour avoir la tangente en P à la cubique, il faudra mener le rayon correspondant à la conique *abcd*P. Comme cette conique se réduit à deux droites, on voit que la courbe a trois points confondus en P; P est un point d'inflexion, O*fg* est la corde de contact, la tangente d'inflexion est la polaire de O par rapport aux droites *ad*, *bc*.

On peut présenter ces résultats sous la forme suivante. Soient P un point d'inflexion, PO, P*f*, P*g* les tangentes issues de ce point, O*a*, O*b*, O*c*, O*d* les tangentes issues du point O; les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère *abcd* et de ses diagonales sont en P, *f*, *g*. Cette propriété des cubiques fait l'objet de la question 896 des *Nouvelles Annales*, proposée par M. Sylvester, et dont une solution analytique a paru dans le numéro d'avril 1871.

VI. Lorsqu'une cubique passe par les six sommets d'un hexagone *abcdef* et par deux des points de con-

Fig. 7.



cours g, h des côtés opposés, elle passe nécessairement par le troisième point de concours i (*fig.* 7).

On peut toujours faire passer une cubique par les neuf points a, b, c, ..., i; mais je vais prouver que la question est indéterminée ou que les neufs points forment un groupe pivotable.

Soient $abde$ la base, $cfghx$, $cfgiy$ les deux coniques qui doivent donner le pivot; la première est capable du rapport $abde(c, f, g, h)$, la seconde du rapport $abde(c, f, g, i)$. Si φ et γ sont les points où les coniques $abdef$, $abdeg$ coupent la droite dch, le premier des deux rapports anharmoniques ci-dessus est celui des quatre points c, φ, γ, h. Pour trouver φ, il suffit de joindre le point b au point η où ih rencontre fg, en vertu du théorème de Pascal appliqué à l'hexagone inscrit $ab\varphi def$. Pour trouver γ, il faut joindre le point a au point ε où ic rencontre fg (même théorème appliqué à l'hexagone $abged\gamma$). Cette construction des points φ et γ fait voir que le rapport (c, φ, γ, h) est égal à celui du faisceau de droites $i(c, f, g, h)$. Donc la conique $cfghx$ passe en i; on verrait de même que la conique $cfgiy$ passe en h, et que, par conséquent, elle se confond avec la première, c'est-à dire que le pivot est indéterminé.

En général, pour faire passer une cubique par neuf points satisfaisant aux conditions de l'énoncé, on peut prendre quatre des points pour base, et placer le pivot en un point quelconque de la conique passant par les cinq autres.

Remarque. — J'ai dit que le rapport anharmonique (c, φ, γ, h) était égal à celui des faisceaux $i(c, f, g, h)$.

Soient, en effet (même figure), $ih\eta$, $ie\varepsilon$ deux transversales issues d'un point i; prenons sur hc, $\eta\varepsilon$ deux points quelconques φ, f. Si l'on joint cf, $\varepsilon\varphi$, les points a', b' où ces droites rencontrent hf, $\eta\varphi$ sont en ligne droite avec i, en vertu du théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $hfc\varepsilon\varphi\eta$ inscrit dans le couple de droites *hc*, $\eta\varepsilon$. Menons des transversales telles que *iab*; à chaque position de *iab* correspondent des points *g*, γ obtenus en joignant *cb*, εa; *g* et γ décriront deux divisions homographiques dont on a trois couples de points correspondants, savoir (f, φ), (ε, c), (η, h). Donc, etc.

Corollaire. — Soient *ab*, *ac* deux tangentes issues d'un point *a* d'une cubique, *d* un autre point de la courbe; *e*, *f* les troisièmes intersections des droites *db*, *dc*. Si l'on joint *bf*, *ce*, ces droites se coupent en un point *g* appartenant à la cubique.

Il suffit, pour le reconnaître, d'appliquer le théorème précédent à l'hexagone *fccebb* dont deux côtés sont infiniment petits. C'est la seizième proposition du Traité de Maclaurin. On en déduit facilement diverses conséquences curieuses sur lesquelles je n'insisterai pas.

(*La suite prochainement.*)