NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 228-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__228_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 980

(voir 2e série, t. IX, p. 92);

PAR M. SANGUINÈDE,
Élève du lycée de Montpellier.

Une ellipse de grandeur constante est mobile autour de son centre, tandis qu'une droite passant par un point fixe demeure constamment parallèle au grand axe. Trouver le lieu des points d'intersection de la droite et *de l'ellipse. Déduire analytiquement cet énoncé de l'énoncé* 933. (A. GUÉBHARD.)

Soit O le point fixe et C le centre de la conique; je prends le point O pour pôle et OC pour axe polaire. Soit P le point où la parallèle au grand axe menée par O coupe le petit axe, et M le point correspondant du lieu. J'ai, en posant $OC = d$,

$$\rho = OP \pm PM, \quad OP = d\cos\omega, \quad PM = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - d^2\sin^2\omega};$$

d'où

$$\rho = d\cos\omega \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - d^2\sin^2\omega},$$

ou, en coordonnées rectilignes,

$$b^2(x^2 + y^2 - dx)^2 - a^2b^2(x^2 + y^2) + a^2d^2y^2 = 0.$$

On voit que le lieu obtenu ne diffère pas de celui de la question 933. En effet, il est facile de voir que les énoncés des deux problèmes reviennent l'un à l'autre.

Soit une position quelconque de l'ellipse considérée dans l'énoncé 980, et M l'un des deux points du lieu correspondant; je transporte l'ellipse parallèlement à elle-même, de manière que son centre C vienne en M. Dans cette position, elle passe par le point C, et son grand axe passe par le point O; elle satisfait donc aux conditions de l'énoncé 933, et le lieu des centres de cette nouvelle série d'ellipses est le même que le lieu considéré.

La construction de la courbe obtenue ayant été donnée dans les *Nouvelles Annales*, je n'y reviendrai pas. Je ferai seulement observer qu'on peut remplacer l'ellipse par une hyperbole (il suffit, dans les résultats obtenus, de changer b en $b\sqrt{-1}$) et qu'on peut mener par le point O des parallèles à l'un quelconque des deux axes. La construction des courbes n'offre pas de difficulté.

Note. — La même question a été résolue par M. F. Revel, élève du lycée de Douai.

Question 985

(voir 2e série, t. IX, p. 144);

PAR M. G. DUCUING,

Élève du lycée de Toulouse (classe de M. Forestier).

Soit K *la courbe d'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan de symétrie de la surface; désignons par* C *la projection orthogonale de* K *sur ce plan de symétrie, et par* C′ *le lieu des points où ce même plan est coupé par les normales élevées aux différents points de* K; C *et* C′ *sont deux coniques ayant leurs axes parallèles, et si l'on désigne respectivement par* a^2 *et* a'^2, b^2 *et* b'^2 *les carrés des axes parallèles, on a la relation*

$$a^2a'^2 = b^2b'^2.$$

(LAGUERRE.)

Soient

$$(1)\qquad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1$$

l'équation d'une surface du second degré rapportée à ses plans principaux, et

$$(2)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2$$

celle d'une sphère ayant pour centre un point du plan des xy par exemple.

Pour avoir l'équation de C, projection sur xoy de l'intersection de ces deux surfaces, il suffit d'éliminer z entre leurs équations. Multipliant la seconde par P et la retranchant de la première, cela donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(M-P)x^2 + (N-P)y^2 + 2P\alpha x + 2P\beta y \\ &\quad = P(\alpha^2+\beta^2-R^2)+1. \end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant l'équation de C'. Les équations de la normale en un point (x, y, z) de la surface sont

$$\frac{X - x}{Mx} = \frac{Y - y}{Ny} = \frac{Z - z}{Pz}.$$

Pour $Z = 0$, cela donne

$$X = \frac{P - M}{P} x,$$

$$Y = \frac{P - N}{P} y;$$

d'où

$$x = \frac{P}{P - M} X,$$

$$y = \frac{P}{P - N} Y.$$

Il suffit maintenant de porter ces valeurs de x et y dans les équations (1) et (2), et d'y éliminer z; ou, plus simplement, de porter x et y dans l'équation (3), qui est le résultat de l'élimination de z entre (1) et (2).

Cela donne, pour l'équation de C',

$$(4) \quad \frac{x^2}{M-P} + \frac{y^2}{N-P} - \frac{2\alpha x}{M-P} - \frac{2\beta y}{N-P} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - R^2}{P} - \frac{1}{P^2} = 0.$$

On voit donc que C et C' sont des courbes du second ordre.

Elles ont leurs axes respectivement parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, et par suite parallèles entre eux.

Reste à montrer que, si l'on désigne respectivement par a^2 et a'^2, b^2 et b'^2, les carrés des axes parallèles dans C et C', on a la relation

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2.$$

En effet, si nous transportions les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la conique C, son équation prendrait la forme

$$(M - P)x^2 + (N - P)y^2 = k,$$

ce qui donne

$$a^2 = \frac{k}{M - P},$$

$$b^2 = \frac{k}{N - P}.$$

De même, si nous portions les axes au centre de la conique C′ parallèlement à eux-mêmes, son équation prendrait la forme

$$\frac{x^2}{M - P} + \frac{y^2}{N - P} = k';$$

d'où

$$a'^2 = k'(M - P),$$
$$b'^2 = k'(N - P).$$

Il en résulte

$$a^2 a'^2 = kk', \quad b^2 b'^2 = kk'.$$

Donc

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Fournier, sapeur du Génie, à Montpellier.

Question 987

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 14);

PAR M. H. RUMPEN,
Étudiant à Bonn.

Trouver la somme de la série

$$\cos^3 \varphi - \frac{1}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3\varphi + \ldots$$

(LAISANT.)

On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} 4\cos^3\varphi &= \cos 3\varphi + 3\cos\varphi, \\ 4\cos^3 3\varphi &= \cos 3^2\varphi + 3\cos 3\varphi, \\ 4\cos^3 3^2\varphi &= \cos 3^3\varphi + 3\cos 3^2\varphi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 4\cos^3 3^n\varphi &= \cos 3^{n+1}\varphi + 3\cos 3^n\varphi. \end{aligned}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 1, la seconde par $-\frac{1}{3}$, la troisième par $\frac{1}{3^2}, \ldots$, la $n^{ième}$ par $\frac{1}{(-3)^n}$, et j'ajoute; j'aurai alors, en désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série proposée,

$$4S_n = 3\cos\varphi + \frac{1}{(-3)^n}\cos 3^{n+1}\varphi.$$

Si l'on suppose maintenant qu'on fasse croître n indéfiniment, le second membre de l'égalité précédente aura pour limite $3\cos\varphi$; donc la série donnée est convergente, et a pour somme $\frac{3}{4}\cos\varphi$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Prosper Pein, H. Brocard et F. Viala.

M. Catalan a donné, même série, t. IX, p. 201, une solution de cette question, déduite d'une formule plus générale.

Question 1019

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 191);

Par M. L. DESMONS,
Professeur au lycée de Reims.

Trouver le maximum de l'angle sous lequel une ellipse donnée est coupée par le cercle de courbure.

(Witworth.)

Soit V l'angle formé par les tangentes à l'ellipse et au cercle au point ν où la corde commune au cercle de courbure et à l'ellipse rencontre l'ellipse (on ne considère que l'angle formé par les parties des tangentes situées au-dessus du grand axe); si φ et φ_1 désignent les angles de ces tangentes avec la partie positive du grand axe, on a

$$(1) \qquad V = \varphi - \varphi_1.$$

L'ellipse étant rapportée à ses axes, et α désignant le paramètre angulaire du point de contact M, la condition pour que quatre points dont les paramètres sont α, β, γ, δ, soient situés sur un même cercle est

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Cette condition devient, dans le cas actuel où α, β, γ sont égaux,

$$(2) \qquad \delta = -3\alpha,$$

δ désignant le paramètre angulaire du point N. Or le coefficient angulaire de la tangente en un point (α) est

$$-\frac{b}{a}\cot\alpha,$$

donc

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a\operatorname{tang}3\alpha}.$$

D'ailleurs la corde du cercle osculateur et la tangente au point de contact sont également inclinées sur le grand axe; en désignant par ω l'inclinaison de cette corde sur le grand axe, on voit facilement que

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a\operatorname{tang}\alpha}, \quad \varphi_1 = 3\omega.$$

Soient φ' et φ'_1 les dérivées de φ et φ_1, on devra avoir

$$\varphi' - \varphi'_1 = 0.$$

Or la relation (3) détermine φ' :

$$\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{-b}{a\,\text{tang}^2 3\alpha}\,\frac{3}{\cos^2 3\alpha} = \frac{-3b}{a\sin^2 3\alpha},$$

ou

$$(5)\quad \varphi' = \frac{-3b}{a}\,\frac{a^2\sin^2 3\alpha}{a^2\sin^2 3\alpha + b^2\cos^2 3a} = \frac{-3ab}{a^2\sin^2 3a + b^2\cos^2 3\alpha}.$$

Les relations (4) déterminent de même φ'_1 :

$$\varphi'_1 = 3\omega', \quad \frac{\omega'}{\cos^2\omega} = \frac{-b}{a\sin^2\alpha},$$

$$(6)\qquad \varphi'_1 = \frac{-3ab}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}:$$

de sorte que la condition $\varphi' = \varphi'_1$ équivaut à

$$(7)\qquad a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2 3\alpha + b^2\cos^2 3\alpha,$$

ce qui signifie que les diamètres conjugués des deux rayons OM, ON doivent être égaux. En développant la condition (7), on obtient

$$\sin^2\alpha = \sin^2 3\alpha,$$

ou

$$(8)\qquad \sin\alpha = \sin 3\alpha,$$

$$(9)\qquad \sin\alpha = -\sin 3\alpha.$$

Les relations (8) et (9) donnent

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4},$$

$$\alpha = \pi, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}, \qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

La deuxième série de valeurs correspond au maximum, car $\varphi' - \varphi'_1$ est de la forme

$$\varphi' - \varphi'_1 = K^2(\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha),$$

et si $\alpha < \frac{\pi}{4}$, le deuxième membre est > 0; il est au contraire < 0, si $\alpha > \frac{\pi}{4}$. La première série de valeurs correspond au minimum de V (en ne considérant que la valeur absolue de $\varphi - \varphi_1$).

Les deux extrémités de la corde commune doivent donc coïncider avec les extrémités de l'un des diamètres conjugués égaux.

Pour obtenir l'expression de la tangente de l'angle maximum, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi_1}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1}, \quad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^3\omega}{1 - 3\operatorname{tang}^2\omega} = \frac{b(3a^2 - b^2)}{a(a^2 - 3b^2)};$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{-4abc^2}{c^4 - 4a^2 b^2}.$$

Cet angle est aigu si $a < b(\sqrt{2}+1)$, obtus si $a > b(\sqrt{2}+1)$. Il a une relation simple avec l'angle maximum θ de deux diamètres conjugués; cette relation est

$$V + \pi = 2\theta.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Question 1025

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. E. KRUSCHWITZ,

Étudiant à Berlin.

Trois cercles quelconques passent par un même point. On mène les cordes d'intersection des cercles pris deux à deux, et on les prolonge de manière qu'elles *coupent chaque fois le troisième cercle. En joignant les points d'intersection des cercles à ces points nouveaux, on forme un hexagone. Démontrer que le produit des côtés de rang impair est égal au produit des côtés de rang pair* (*). (CALLANDREAU.)

Soit O le point commun aux trois cercles, et B_3 le second point d'intersection des cercles C_1 et C_2, B_1 celui de C_2 et C_3, B_2 celui de C_3 et C_1. Les trois autres sommets de l'hexagone sont A_1 sur le cercle C_1, A_2 sur le cercle C_2, et A_3 sur le cercle C_3; de telle sorte que les sommets se présentent dans l'ordre suivant : $A_1\,B_3\,A_2\,B_1\,A_3\,B_2$.

En joignant B_1, B_2, B_3, nous obtenons les trois triangles semblables :

$$A_1B_3B_2,\quad B_1B_3A_2,\quad B_1A_3B_2,$$

car on a les égalités d'angles suivantes :

$$\begin{aligned} A_1B_3B_2 &= A_1OB_2 = A_2OB_1 = A_2B_3B_1 \\ &= OB_2B_1 + OB_1B_2 = OA_3B_1 + OA_3B_2 = B_1A_3B_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_2A_1B_3 = OB_2B_3 + OB_3B_2 = B_3OA_2 &= B_3B_1A_2 \\ = B_2OA_3 &= B_2B_1A_3. \end{aligned}$$

De la similitude des triangles, il résulte

$$A_1B_3\,.\,A_2B_1 = B_1B_3\,.\,B_2A_1$$
$$B_1B_3\,.\,B_2A_3 = B_3A_2\,.\,B_1A_3,$$

d'où

$$A_1B_3\,.\,A_2B_1\,.\,A_3B_2 = B_3A_2\,.\,B_1A_3\,.\,B_2A_1.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier, capitaine d'Artillerie à Douai, et H. Lez, à Lorrez.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 1041

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 479);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

On donne deux surfaces fixes du second ordre qui se raccordent suivant une droite unique AB.

1° *Les pôles d'un même plan* P, *par rapport aux deux surfaces, sont sur une droite* Δ *qui rencontre la ligne* AB.

2° *Lorsque la droite* Δ *décrit un plan fixe passant par* AB, *le plan* P *tourne autour d'un point fixe également situé sur* AB.

3° *Lorsque le plan* P *tourne autour d'une droite fixe, la droite* Δ *décrit une surface du second ordre passant par la ligne* AB. (L. PAINVIN.)

1° La droite Δ rencontre AB, car ces deux droites sont situées dans le plan qui touche les deux surfaces au point d'intersection du plan P avec AB.

2° Soit Q le plan fixe passant par AB. Un point se mouvant dans ce plan, son plan polaire par rapport à l'une des surfaces doit passer par le point où le plan Q touche cette surface. Tel est donc le point fixe de AB, autour duquel tourne le plan P.

3° Soit D la droite fixe. Elle a deux conjuguées par rapport aux deux surfaces. La droite Δ s'appuie sur ces deux conjuguées et sur AB; elle engendre donc une surface du second ordre passant par AB.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycee du Havre.

Question 1065

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. E. DEWULF.

On donne une conique et deux points A *et* B *dans l'espace. Par ces deux points, on mène un plan qui rencontre la conique en deux points* A′ *et* B′. *Trouver le lieu du point* M *d'intersection des couples de droites* (AA′, BB′) *et* (AB′, BA′). *Cas particuliers.*

(H. BROCARD.)

Le lieu des points M appartient à l'intersection des cônes qui ont pour sommets les points A et B et la conique donnée C pour base commune. Or ces cônes se coupent suivant une première courbe plane, la conique C; ils se coupent donc suivant une seconde courbe plane, une conique qui est le lieu des points M. Les cas particuliers sont ceux de l'intersection d'un cône du second degré par un plan.

De ce théorème, on peut déduire de nombreuses conséquences; j'en citerai quelques-unes.

1° Projetons les points A et B parallèlement à une droite donnée K sur le plan de la conique C en a et b. Soient S le point où la droite AB rencontre ce plan, m la projection de M. Le sommet m du triangle A′B′m, dont les trois côtés passent par des points fixes a, b et S en ligne droite, tandis que les sommets A′, B′ glissent sur une conique donnée, décrit une conique C_1.

2° Les points a et b restant fixes, si le point S parcourt la droite ab, le lieu des centres des coniques C_1 qui correspondent à chacune des positions de S est une ligne droite L.

3° Si les points a et b se déplacent, la conique C restant fixe, à chaque position de la droite ab il correspond une droite L, toutes les droites L se coupent en un même point.

Ces deux derniers théorèmes peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Si les sommets A et B des cônes qui ont pour base commune la conique C parcourent chacun une droite parallèle à la droite K, à chacune de leurs positions correspond une conique Σ lieu des points M, toutes les coniques Σ se projettent parallèlement à K sur le plan aC, suivant des coniques dont les centres sont sur une même droite L.

Si les droites A et B se déplacent parallèlement à K, à chacune de leurs positions correspond une droite L, toutes ces droites concourent en un même point.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne, et Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.