Nouvelles annales de mathématiques

Compagnon

Note sur les éléments de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 268-278

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__268_1>

NOTE SUR LES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. COMPAGNON,
Professeur au collége Stanislas.

Sur les mesures de la pyramide, du tronc de pyramide et du tronc de prisme triangulaire.

Pour établir la mesure d'une pyramide triangulaire SABC, on construit ordinairement un prisme ABCDSE, ayant pour base ABC, et pour l'une de ses arêtes l'une des arêtes de la pyramide, BS par exemple, on mène le plan SDC, et il s'agit de démontrer que *la pyramide* SABC *est le tiers du prisme* (voir *fig.* 3 ci-après).

Les auteurs, à partir d'Euclide, ont donné de cette proposition des démonstrations plus ou moins longues et difficiles, et quelquefois des démonstrations dont la rigueur était loin d'être satisfaisante.

Aujourd'hui la marche, qui est assez généralement adoptée et qui est suffisamment simple, consiste à démontrer d'abord deux théorèmes qu'on peut regarder comme des lemmes, savoir :

LEMME I. — *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base,*

1° *Les arêtes et la hauteur de cette pyramide seront divisées par ce plan en parties proportionnelles ;*

2° *La section sera un polygone semblable à la base de la pyramide.*

LEMME II. — *Si deux pyramides de même hauteur ont leurs bases situées sur le même plan et qu'on les coupe par un plan parallèle au plan des bases, les sections seront entre elles comme les bases.*

Ensuite, se fondant sur le principe des limites ou employant une démonstration par la réduction à l'absurde, on fait voir que *deux pyramides triangulaires de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.* Enfin, on passe à la proposition principale que l'on a en vue.

Or cette marche est-elle la plus naturelle? Est-elle de la plus grande simplicité possible? — Je ne le pense pas.

Elle n'est pas la plus naturelle, en ce qu'elle n'est pas indiquée essentiellement par une analyse très-attentive de la question. Car, après avoir décomposé un prisme triangulaire en trois pyramides triangulaires, on voit que deux de ces pyramides forment ensemble une pyramide quadrangulaire ayant pour base un parallélogramme, et qu'en réunissant l'une de ces deux premières pyramides à la troisième, on obtient encore une pyramide dont la base est un parallélogramme. Alors on est conduit à démontrer que, *si par deux arêtes opposées d'une pyra-*

mide ayant pour base un parallélogramme on mène un plan, la pyramide quadrangulaire sera divisée en deux pyramides triangulaires équivalentes.

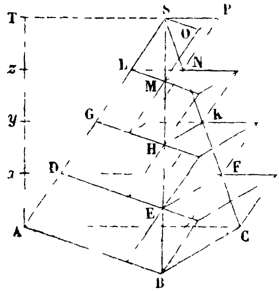
De cette manière, on évite les lemmes I et II ci-dessus, et, par conséquent, la marche suivie aujourd'hui n'est pas la plus simple.

A la vérité, ces lemmes servent aussi à passer de la mesure du tronc de pyramide triangulaire à la mesure du tronc de pyramide quelconque; mais on peut arriver autrement à cette dernière mesure.

Après ces réflexions sommaires, nous allons entrer dans les détails et exposer comment on arrive à la mesure de la pyramide triangulaire.

Lemme. — *Si l'on divise en parties égales la hauteur* AT *d'une pyramide triangulaire* SABC, *et qu'on mène, par les points de division x, y, z, des plans parallèles à la base* ABC, *puis que l'on construise des prismes* DEFA, GHKD, LMNG, *intérieurs à la pyramide, ayant*

Fig. 1.



chacun pour base l'une des sections et pour arête l'une des parties égales AD, DG, GL *de l'une des arêtes* SA, *par exemple, le volume de la pyramide est la limite vers laquelle tend la somme des prismes, lorsque le nombre des divisions de la hauteur augmente indéfiniment.*

En effet, si l'on construit les prismes ABCD, DEFG, GHKL, LMNS qui sont extérieurs à la pyramide, on voit d'abord que la pyramide SABC est plus grande que la somme des prismes intérieurs et plus petite que celle des prismes extérieurs.

Ensuite, le premier prisme intérieur DEFA et le second prisme extérieur DEFG sont équivalents, comme ayant même base et des hauteurs égales, et, par la même raison, les prismes GHKD, LMNG sont respectivement équivalents aux prismes GHKL, LMNS. Donc, la différence entre la somme des prismes extérieurs et celle des prismes intérieurs n'est autre que le premier prisme extérieur ABCD, qui a pour mesure

$$\mathrm{ABC} \times \mathrm{A}x \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABC} \times h,$$

en représentant Ax par h.

Maintenant supposons que le nombre des divisions de la hauteur AT augmente indéfiniment et qu'on répète successivement les mêmes constructions; en désignant toujours par h l'une des divisions de AT, on aura constamment, pour la différence des deux sommes de prismes,

$$\mathrm{ABC} \times h.$$

Or h peut devenir moindre que toute quantité donnée, et il en est de même de la différence ABC $\times h$; donc, la pyramide SABC est comprise entre deux sommes de prismes dont la différence peut devenir aussi petite qu'on voudra, et, par conséquent, elle est la limite vers laquelle tend la somme des prismes intérieurs, ainsi que la somme des prismes extérieurs, lorsque le nombre des divisions de la hauteur AT augmente indéfiniment.

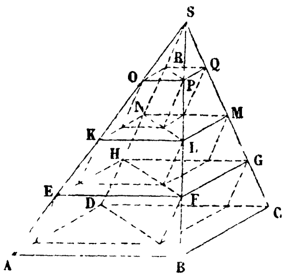
Ainsi le lemme est démontré.

Théorème I. — *Le plan, mené par deux arêtes opposées d'une pyramide ayant pour base un parallélo-*

gramme, divise cette pyramide en deux pyramides triangulaires équivalentes.

Soit la pyramide SABCD, dont la base ABCD est un parallélogramme, et par les arêtes opposées SD, SB menons un plan; je dis que les pyramides SABD, SBCD sont équivalentes.

Fig. 2.



Divisons l'arête SD en quatre parties égales, par exemple, et par les points de division menons des plans parallèles à la base ABCD, qui déterminent les sections EFGH, KLMN, OPQR. Ces sections seront des parallélogrammes; car les droites EF, HG sont parallèles comme étant respectivement parallèles aux côtés AB, DC, et de même EH est parallèle à FG, etc.; donc le plan SDB divise chacune de ces sections en deux triangles égaux.

Cela posé, dans la pyramide triangulaire SABD, construisons le prisme EFHD qui a pour base EFH et pour arête HD, ainsi que les prismes KLNH, OPRN, et construisons de même dans la pyramide SBCD les prismes FGHD, LMNH, PQRN. Alors les deux prismes EFHD, FGHD sont équivalents comme ayant des bases et des hauteurs égales; de même, les prismes KLNH, OPRN sont équivalents aux prismes LMNH, PQRN chacun à chacun; donc, en désignant par s la somme des prismes intérieurs à la pyramide SABD, et par s' celle des prismes intérieurs à la pyramide SBCD, on a

$$s = s'.$$

Maintenant supposons que le nombre des parties égales de SD augmente indéfiniment et que l'on répète les constructions précédentes; en représentant toujours par s et s' les deux sommes de prismes, on aura constamment $s = s'$, et, si l'on remplace dans cette égalité les quantités variables s et s' par leurs limites, il s'ensuit que les deux pyramides SABD, SBCD sont équivalentes.

Remarque. — On peut démontrer ce théorème sans se fonder sur le lemme précédent.

En effet, supposons que les deux pyramides SABD, SBCD ne soient pas équivalentes et que SBCD soit la plus grande; alors, après avoir fait les mêmes constructions que ci-dessus, imaginons en outre les prismes BCDH, FGHN, LMNR, PQRS extérieurs à la pyramide SBCD et désignons par s'' la somme de ces prismes, par s la somme des prismes intérieurs à la pyramide SABD, on aura

$$s'' > \text{SBCD} > \text{SABD} > s.$$

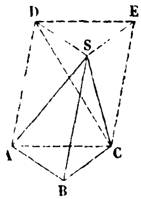
Mais on verra facilement que la différence entre s'' et s n'est autre que le premier prisme extérieur BCDH, qui a pour mesure $\text{BCD} \times h$, en représentant par h la hauteur de ce prisme. D'ailleurs, en supposant que le nombre des parties égales de SD augmente indéfiniment, le produit $\text{ABC} \times h$ peut devenir moindre que toute quantité donnée; donc les pyramides SBCD, SABD, comprises entre s'' et s, sont nécessairement équivalentes.

Théorème II. — *Une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit la pyramide triangulaire SABC. Je construis le prisme triangulaire ABCDSE, ayant pour base ABC et pour arête l'une des arêtes BS de la pyramide, et par les droites SC, SD, je mène un plan qui coupe la face ADEC suivant DC.

Le prisme est ainsi décomposé en trois pyramides triangulaires SABC, SACD, SDEC, que nous désignerons par P, P′, P″; or P et P′ forment ensemble la pyramide quadrangulaire CABSD qui a pour base le parallélogramme ABSD; donc les pyramides P et P′ sont équivalentes. De même, P′ et P″ forment ensemble la pyramide SADEC, dont la base ADEC est un parallélogramme; donc les pyramides P′ et P″ sont équivalentes.

Fig. 3.



Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABCDSE, et, par conséquent, elle a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Si une pyramide P a pour base un polygone quelconque, on peut décomposer ce polygone en triangles et la pyramide P en pyramides triangulaires, ayant pour bases ces différents triangles et pour sommet commun celui de la pyramide proposée; d'où il résulte que *la pyramide* P *a aussi pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Corollaire I. — *Deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes comme ayant même mesure.*

Deux pyramides de même hauteur sont entre elles *comme leurs bases, et deux pyramides qui ont des bases équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Corollaire II. — *Le plan, mené par deux arêtes opposées d'une pyramide ayant pour base un trapèze, divise cette pyramide en deux pyramides triangulaires, qui sont entre elles comme les bases du trapèze qui leur correspondent.* Car ces pyramides triangulaires, ayant même hauteur, sont entre elles comme les triangles qui leur servent de bases, et ces triangles sont entre eux comme les bases du trapèze.

Remarque. — Comme on peut le prévoir, après avoir groupé les pyramides qui composent un prisme triangulaire pour en former des pyramides quadrangulaires, j'ai cherché s'il ne serait pas utile de grouper aussi les pyramides qui composent, soit un tronc de pyramide triangulaire, soit un tronc de prisme triangulaire. De là le corollaire II qui précède et qui va servir à démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème III. — *Un tronc de pyramide a pour mesure le tiers de sa hauteur, multiplié par la somme de ses bases et d'une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

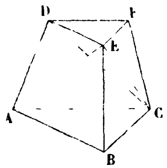
1° Soit le tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, et menons les deux plans EAC, EDC.

Le tronc est ainsi décomposé en trois pyramides triangulaires EABC, EADC, EDFC, que nous désignerons par P, P', P'', et représentons par B, b les bases ABC, DEF du tronc, et par h sa hauteur. La première et la troisième de ces pyramides ont pour bases ABC, DEF, et pour hauteur celle du tronc; donc

$$P = \tfrac{1}{3}B \times h \quad \text{et} \quad P'' = \tfrac{1}{3}b \times h.$$

D'ailleurs, P et P' forment ensemble la pyramide quadrangulaire CABED, qui a pour base le trapèze ABED, car les droites AB, DE sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième; de même,

Fig. 4.



P′ et P″ forment ensemble la pyramide EADFC, dont la base ADFC est un trapèze; donc on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{DE} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{P''} = \frac{AC}{DF}.$$

Mais les triangles ABC, DEF sont semblables, comme ayant leurs côtés parallèles; donc $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, et, par suite,

$$\frac{P}{P'} = \frac{P'}{P''} \quad \text{d'où} \quad P' = \sqrt{P \times P''} = \tfrac{1}{3} h \sqrt{B \times b}.$$

Donc, en désignant par V le volume du tronc de pyramide proposé, on aura

$$V = \tfrac{1}{3} h \left(B + b + \sqrt{B \times b}\right),$$

C. Q. F. D.

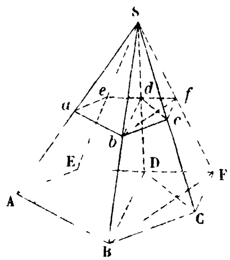
2° Soit le tronc de pyramide quelconque

ABCDE$abcde$;

menons CF parallèle à la diagonale BD jusqu'à la rencontre en F du côté ED prolongé, et joignons BF. Les triangles BDC, BDF seront équivalents.

Ensuite, la droite SF rencontrera le prolongement de *ed* en *f*, et si l'on joint ce point aux sommets *c*, *b*, puis que l'on mène la diagonale *bd*, les droites *cf*, *bd* seront parallèles comme étant respectivement parallèles

Fig. 5.



aux droites CF, BD et les triangles *bdc*, *bdf* seront aussi équivalents. Ainsi, les deux troncs de pyramides triangulaires BDC*bdc*, BDF*bdf* ont même hauteur et des bases équivalentes; donc ils sont équivalents.

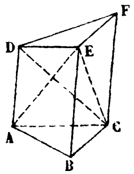
Donc le tronc de pyramide proposé et le tronc de pyramide ABFE*abfe* sont équivalents, et, de plus, les bases du premier sont respectivement équivalentes à celles du second.

Maintenant, si l'on répète successivement la même construction, on pourra transformer le tronc de pyramide quelconque en un tronc de pyramide triangulaire ayant même hauteur que le premier et des bases équivalentes. Donc le tronc de pyramide ABCDE*abcde* a aussi pour mesure le tiers de sa hauteur, multiplié par la somme de ses bases et d'une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Théorème IV. — *Un tronc de prisme triangulaire* ABCDEF *a pour mesure le tiers de sa base* ABC, *multiplié par la somme des perpendiculaires* h, h', h'' *abaissées sur cette base des sommets* E, D, F *de la section* DEF.

Menons les plans EAC, EDC. Le tronc de prisme sera décomposé en trois pyramides EABC, EADC, EDFC, que nous désignerons par P, P′, P″.

Fig. 6.



La première a pour base ABC, et pour sommet le point E; donc on a

$$P = \tfrac{1}{3} ABC \times h.$$

Maintenant, si l'on désigne par e, d, f les pieds des perpendiculaires h, h', h'', les trois triangles rectangles EBe, DAd, FCf seront semblables, et l'on aura

$$\frac{EB}{DA} = \frac{h}{h'} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{FC} = \frac{h'}{h''}.$$

D'ailleurs, P et P′ forment ensemble une pyramide quadrangulaire CABED, qui a pour base le trapèze ABED; de même, P′ et P″ forment ensemble la pyramide EADFC dont la base ADEF est un trapèze; donc on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{EB}{DA} = \frac{h}{h'}, \quad \text{d'où} \quad P' = \frac{P \times h'}{h} = \frac{1}{3} ABC \times h',$$

et

$$\frac{P'}{P''} = \frac{DA}{FC} = \frac{h'}{h''}, \quad \text{d'où} \quad P'' = \frac{P' \times h''}{h'} = \frac{1}{3} ABC \times h''.$$

Donc, en représentant par V le volume du tronc de prisme, on aura

$$V = \tfrac{1}{3} ABC(h + h' + h''),$$

C. Q. F. D