Nouvelles annales de mathématiques

H. Resal

Méthode directe pour déterminer l'influence de la rotation de la terre sur la chute des graves

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 348-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__348_0>

MÉTHODE DIRECTE

pour déterminer l'influence de la rotation de la Terre sur la chute des graves;

Par M. H. RESAL.

A l'époque où les expériences de Foucault sur le pendule et le gyroscope fixèrent d'une manière spéciale l'attention des géomètres sur la dynamique des mouvements relatifs, Poncelet me proposa de prouver géométriquement, sans passer par le théorème de Coriolis, les formules se rapportant à la déviation des graves, tombant sans vitesse initiale d'une certaine hauteur, due à la rotation de la Terre. Je lui adressai, à ce sujet, un travail que j'avais complétement perdu de vue, lorsque, retrouvé dans ses papiers, il me fut remis chargé de notes de sa main. C'est la substance de ce travail que je vais reproduire dans ce qui suit.

Soient (*fig.* 1) :

PP′ l'axe de rotation de la Terre supposée sphérique, P étant censé le pôle nord;

C son centre;

n sa vitesse angulaire de rotation, dirigée de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant PC et ayant les pieds en C;

$R = PC$ son rayon;

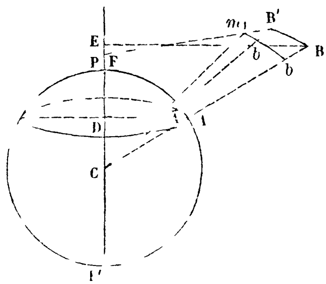
B la position initiale du mobile m, dont la verticale BC rencontre le méridien terrestre correspondant en A;

$BA = h$ la hauteur de la chute;

$\lambda = 90° - \widehat{PCA}$ la latitude du lieu;

$AD = R \cos\lambda$ la perpendiculaire abaissée du point A sur PP′, ou le rayon du parallèle passant par ce point;

$BE = (R + h) \cos\lambda$ la distance de B à PP′.



Au bout du temps t compté à partir de l'instant de la chute, le point A a parcouru sur son parallèle l'arc $AA' = AD . nt = nR \cos\lambda . t$, et le point B est venu en B′; mais, en appelant θ l'angle BCB′, on a aussi $AA' = R\theta$, d'où

$$\theta = n \cos\lambda . t.$$

Soient, au bout du temps t, m_1 la projection du mobile sur le plan BCB′; b', b les intersections avec CB′, CB du cercle décrit du point C comme centre avec le rayon Cm_1; F le pied de la perpendiculaire abaissée de m_1 sur PP′.

Les distances telles que h, que nous pouvons atteindre en hauteur ou en profondeur, étant très-petites par rapport à R, l'angle décrit par le rayon CA pendant le temps t est lui-même très-petit; on peut donc, sans inconvénient, supposer $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$, et considérer b' et b comme les projections de m_1 sur CB′ et CB, et de même $m_1 b'$, bb' comme des arcs de cercle appartenant au parallèle du point m_1 de rayon $Fm_1 = Cm_1 \cos\lambda$.

Il est clair que l'écartement $m_1 b'$, par rapport à CB', est dû à ce que la vitesse de B, qui est la vitesse initiale absolue du mobile, est supérieure à celles des autres points de ce rayon; de sorte que l'écart ci-dessus est de même ordre de grandeur que la différence des chemins parcourus en vertu des vitesses de B' et A', c'est-à-dire de $n(\mathrm{BE}-\mathrm{AD})\,t = nh\cos\lambda.t$. L'angle $\mathrm{B'C}m_1$ étant, par rapport à $\widehat{\mathrm{BCB'}} = \theta$, de l'ordre $\frac{h}{\mathrm{R}}$, peut être négligé relativement à ce dernier, et l'on peut, par conséquent, supposer que la direction de la pesanteur en m ou m_1 est parallèle à CB'.

La distance $m_1 b$, dont le mobile s'est éloigné dans le temps t de la droite CB considérée comme fixe dans l'espace, est due à la vitesse initiale $n.\mathrm{BE} = n.\mathrm{BC}\cos\lambda$ de ce mobile, et à une accélération variable d'une direction opposée due à la pesanteur, et qui est, pour m_1,

$$g\sin\theta = g\theta = ng\cos\lambda.t.$$

La vitesse due à cette accélération au bout du temps t étant $\int_0^t ng\cos\lambda.t\,dt = ng\cos\lambda.\frac{t^2}{2}$, et le chemin parcouru correspondant $\int_0^t ng\cos\lambda.\frac{t^2}{2}\,dt = ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}$, on a

$$m_1 b = n.\mathrm{BC}\cos\lambda - ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}.$$

D'un autre côté,

$$bb' = n.b\mathrm{C}.\cos\lambda.t.$$

Si donc on pose $y = m_1 b'$, il vient

$$(1)\qquad y = m_1 b - b'b = n\cos\lambda.\mathrm{B}b.t - ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}.$$

Or l'espace $\mathrm{B}b = \mathrm{B'}b'$, que nous représenterons par x, parcouru par le mobile parallèlement à AB, étant dû à la composante $g\cos\theta$ ou g, on a

$$(2)\qquad x = \frac{gt^2}{2}.$$

Les longueurs x, y représentent les coordonnées de la trajectoire apparente du point m_1 rapportée à la verticale mobile B′C et à la tangente au parallèle de B. L'élimination de t entre les équations (1) et (2) conduit à la suivante

$$(3)\qquad y = \frac{1}{3}nt^3\cos\lambda = \frac{2}{3}nx\cos\lambda.\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Quant à la déviation du mobile vers le nord, ou perpendiculairement au plan BCB′, elle est du second ordre comme la composante correspondante de g, et doit par cela même être négligée dans le mode d'approximation adopté.

Pour obtenir l'écartement total e, vers l'est, du mobile arrivé au bas de sa chute, il suffit de supposer $y = e$, $x = h$ dans l'équation (3), et l'on obtient ainsi la formule connue

$$e = \frac{1}{3}nt^3\cos\lambda = \frac{2}{3}nh\cos\lambda.\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

On a

$$n = \frac{2\pi}{86400},$$

et, en supposant $h = 158,5$, $\lambda = 51°$, on trouve

$$e = 0^{m},0276,$$

chiffre qui diffère peu de la moyenne 0,0283 des résultats des expériences de Reech, dans les mines de Freyberg.