L. PAINVIN

Rectification relative à la note insérée au tome X (2e série), année 1871, p. 481

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 376-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__376_1>

RECTIFICATION

relative à la Note insérée au tome X (2e série), année 1871, p. 481;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Dans la première partie de la proposition énoncée à la page 481 du tome X (2e série), année 1871, j'ai dit que la surface engendrée était de l'ordre $4m$; en réalité, elle n'est que de l'ordre $2m$. Les formules écrites à la

page 483 donnent λ et μ comme des fonctions du second degré en x, y, z; et, s'il en était ainsi, il serait parfaitement exact de conclure que la surface engendrée est de l'ordre $4m$; mais, lorsqu'on fait le calcul d'une manière plus complète, on constate que les seconds membres se réduisent à des fonctions du premier degré, et la surface engendrée n'est plus alors que de l'ordre $2m$.

Je vais donc donner la résolution explicite des équations qui établissent la correspondance entre les points des deux surfaces.

2. Voici l'énoncé :

Soient donnés trois points fixes A, B, C *et une surface fixe* Σ *du* $m^{\text{ième}}$ *ordre; on imagine un point* M *se déplaçant sur la surface* Σ; *puis, avec trois autres points fixes* A′, B′, C′, *donnés dans l'espace, on construit une pyramide* A′B′C′S *telle qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point* M *sur la surface* Σ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S *décrira une surface* (S) *d'ordre* $2m$ *en général.*

Nous prendrons pour plan des x, y le plan des trois points A, B, C; soient alors

$$\alpha, \ \beta, \ 0; \quad \alpha_1, \ \beta_1, \ 0; \quad \alpha_2, \ \beta_2, \ 0$$

les coordonnées respectives des points A, B, C; puis

$$a, \ b, \ c; \quad a_1, \ b_1, \ c_1; \quad a_2, \ b_2, \ c_2$$

celles des points A′, B′, C′; désignons enfin par λ, μ, ν les coordonnées du point M, et par x, y, z celles du point *correspondant* S. D'après l'énoncé, les équations qui établissent la correspondance des deux points M et S seront

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
(\lambda-\alpha)^2+(\mu-\beta)^2+\nu^2 &= (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,\\
(\lambda-\alpha_1)^2+(\mu-\beta_1)^2+\nu^2 &= (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2,\\
(\lambda-\alpha_2)^2+(\mu-\beta_2)^2+\nu^2 &= (x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2.
\end{aligned}\right.
$$

Il s'agit de résoudre les trois équations (1) par rapport à λ, μ, ν.

Dans ce but, nous poserons

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\rho &= \alpha^2+\beta^2, & R &= a^2+b^2+c^2,\\
\rho_1 &= \alpha_1^2+\beta_1^2, & R_1 &= a_1^2+b_1^2+c_1^2,\\
\rho_2 &= \alpha_2^2+\beta_2^2; & R_2 &= a_2^2+b_2^2+c_2^2;
\end{aligned}\right.
$$

puis

$$
(3)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},
$$

où

$$
\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1;
$$

la signification géométrique des quantités $\rho, \ldots, R, \ldots, \Delta$ est visible.

Ceci admis, les équations (1) peuvent s'écrire

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha\lambda-2\beta\mu\\
&\qquad = x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)+R-\rho,\\
&\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha_1\lambda-2\beta_1\mu\\
&\qquad = x^2+y^2+z^2-2(a_1x+b_1y+c_1z)+R_1-\rho_1,\\
&\lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha_2\lambda-2\beta_2\mu\\
&\qquad = x^2+y^2+z^2-2(a_2x+b_2y+c_2z)+R_2-\rho_2.
\end{aligned}\right.
$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $\frac{d\Delta}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta}{d\alpha_2}$; puis par $\frac{d\Delta}{d\beta}$, $\frac{d\Delta}{d\beta_1}$, $\frac{d\Delta}{d\beta_2}$; enfin par $\frac{d\Delta}{d\gamma}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma_1}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma_2}$, et ajoutons. On obtient alors les trois équations

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by+cz+\dfrac{\rho-R}{2} & \beta & 1 \\ a_1x+b_1y+c_1z+\dfrac{\rho_1-R_1}{2} & \beta_1 & 1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\dfrac{\rho_2-R_2}{2} & \beta_2 & 1 \end{vmatrix}, \\
&\mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & ax+by+cz+\dfrac{\rho-R}{2} & 1 \\ \alpha_1 & a_1x+b_1y+c_1z+\dfrac{\rho_1-R_1}{2} & 1 \\ \alpha_2 & a_2x+b_2y+c_2z+\dfrac{\rho_2-R_2}{2} & 1 \end{vmatrix}, \\
&[\lambda^2+\mu^2+\nu^2-(x^2+y^2+z^2)] \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad = -2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & ax+by+cz+\dfrac{\rho-R}{2} \\ \alpha_1 & \beta_1 & a_1x+b_1y+c_1z+\dfrac{\rho_1-R_1}{2} \\ \alpha_2 & \beta_2 & a_2x+b_2y+c_2z+\dfrac{\rho_2-R_2}{2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (5) résolvent complétement la question; on voit que λ et μ sont des fonctions linéaires de x, y, z, et que ν^2 est une fonction du second degré en x, y, z; par conséquent, si la surface directrice (Σ)

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

est de l'ordre m, la surface engendrée (S) sera de l'ordre $2m$.

Je n'entrerai, pour le moment, dans aucun détail sur les conséquences multiples qu'on peut tirer de ce mode de transformation, qui comprend d'ailleurs, comme cas particulier, la transformation de Jacobi.