J.-J.-A. MATHIEU

Note sur l'ellipse au sujet de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 428-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__428_1>

NOTE SUR L'ELLIPSE

Au sujet de questions proposées dans les Nouvelles Annales;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

I.

Le *théorème* dit *de Mac-Cullagh*, qu'on tire si facilement, par la méthode projective, d'un théorème bien connu de Géométrie élémentaire, apprend que :

1. *Quand un triangle est inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés divisé par le produit des deux demi-axes.*

Si l'on fait décroître indéfiniment les côtés, ce qui transforme le cercle circonscrit au triangle en cercle osculateur à l'ellipse, on conclut que :

2. *Le rayon de courbure, en un point quelconque de l'ellipse, est égal au cube du demi-diamètre parallèle à la tangente du point divisé par le produit des deux demi-axes.*

Par combinaison des théorèmes 1 et 2, on trouve sans difficulté que :

3. *Quand un triangle est inscrit dans une ellipse, le cube du rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois rayons de courbure des points dont les tangentes sont parallèles aux côtés* (*).

Comme cas particulier du théorème 3, on tombe sur celui qui fait l'objet de la question 1087 (**) :

4. *Le produit des rayons de courbure de l'ellipse aux sommets d'un triangle inscrit, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* (***).

(*) Cette proposition a ete donnee par M. Faure, dans son *Recueil de theorèmes relatifs aux sections coniques*, p. 47.

(**) Des solutions identiques nous ont ete envoyees par M. Gambey, professeur au lycee de Saint-Étienne, A. Pellissier, capitaine d'Artillerie, et A. Hilaire, professeur au lycee de Douai. MM. Moret-Blanc et H. Lez ont egalement resolu la question.

(***) La proposition 1087 se deduit assez simplement de la proposition 1002, due a *Steiner*, et demontree dans le tome X, 2e serie, pages 460 et 462.

En effet, dans le cas actuel, la normale à l'ellipse au sommet A du triangle ABC est dirigée suivant la hauteur AH du triangle. Si l'on prend sur cette normale, en dehors de la courbe, une longueur AK, égale au rayon de courbure ρ_1 de l'ellipse au sommet A, et qu'on mene ensuite du point K une perpendiculaire KG sur le rayon OA prolonge, on aura, d'apres le theoreme de Steiner,

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OG} = a^2 + b^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2,$$

en designant par OM le rayon de l'ellipse conjugue de OA. Cette egalite peut s'ecrire

$$\mathrm{OA}(\mathrm{OA} + \mathrm{AG}) = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2,$$

et se reduit à

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{AG} = \mathrm{OM}^2.$$

En observant que le rayon OA est egal aux deux tiers de la médiane AD, l'egalité precedente devient

$$2\,\mathrm{AD} \times \mathrm{AG} = 3\,\mathrm{OM}^2;$$

II.

La méthode projective rend d'une évidence intuitive le théorème suivant :

5. *L'ellipse est isopérimètre avec le cercle qui a pour rayon la limite vers laquelle convergent les moyennes arithmétiques des systèmes de rayons qui répondent à la division par secteurs équivalents du quadrant d'ellipse, c'est-à-dire des rayons qui correspondent à la division régulière du cercle de projection.*

Le rayon de l'ellipse, en fonction de l'angle mesuré dans le cercle de projection, est

$$\rho = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi};$$

---

mais l'équation de l'ellipse rapportée aux rayons conjugués OA, OM donne

$$DB^2 = \frac{3}{4} OM^2,$$

d'où

$$BC^2 = 3\,OM^2;$$

donc

$$2\,AD \times AG = BC^2.$$

Remarquons maintenant que, les quatre points K, G, H, D appartenant à une même circonférence, on a

$$AD \times AG = AK \times AH = \rho_1 \times AH.$$

Il en résulte

$$2\rho_1 \times AH = BC^2; \quad 2\rho_1 \times AH \times BC = BC^3; \quad 4\rho_1 \times S = BC^3,$$

en nommant S l'aire du triangle ABC. De là $\rho_1 = \frac{BC^3}{4S}$.

On démontrerait de même que les rayons de courbure ρ_2, ρ_3 aux sommets B, C ont pour valeurs $\frac{AC^3}{4S}$, $\frac{AB^3}{4S}$; donc

$$\rho_1\,\rho_2\,\rho_3 = \left(\frac{AB.AC.BC}{4S}\right)^3 = R^3.$$

(G.)

changeant φ en $\frac{\pi}{2}+\varphi$, on trouve le rayon conjugué

$$\rho' = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}.$$

Il faut bien remarquer que la somme de deux rayons conjugués croît avec l'angle φ, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{4}$, car

$$\begin{aligned}\rho + \rho' &= \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{4a^2b^2 + c^4\sin^2 2\varphi}}.\end{aligned}$$

Pour sommer les rayons du quadrant d'ellipse, il suffirait de sommer $\rho+\rho'$ pour les valeurs de φ croissant en progression arithmétique de zéro à $\frac{\pi}{4}$.

Partageons cette somme de m termes, ou de $2m$ rayons conjugués deux à deux, en n sommes partielles renfermant chacune le même nombre z de termes, on aura $m = nz$; n sera un nombre entier, peu élevé si l'on veut éviter les calculs compliqués; quant à z, qui s'élimine de lui-même, on pourra le supposer aussi grand qu'on voudra.

Chacune des sommes partielles restera toujours comprise entre z fois son premier terme et z fois son dernier terme, puisque $\rho+\rho'$ croît avec φ. Il résulte de là qu'en représentant par E le périmètre de l'ellipse, on doit avoir

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+c^4\sin^2\frac{\pi x}{2n}}}\\ &\qquad < \mathrm{E} < \frac{\pi}{n}\sum_1^{n}\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+c^4\sin^2\frac{\pi x}{n}}}.\end{aligned}$$

Pour $n=1$, on trouve les limites de J. Bernoulli, dont il est question dans le même tome, p. 280; pour

$n = 2, 3, \ldots,$ on trouve des limites plus compliquées, mais aussi beaucoup plus exactes, si c est un peu grand.

Je terminerai en citant cet autre théorème, auquel conduit aussi la méthode projective :

6. *L'ellipse est isopérimètre avec le cercle qui a pour rayon la limite vers laquelle convergent les moyennes harmoniques des systèmes de rayons qui répondent à la division par arcs de cordes égales du quadrant de l'ellipse.*

D'où il faut conclure que les moyennes arithmétiques du théorème 5 et les moyennes harmoniques du théorème 6 convergent vers la même limite.