Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 500-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__500_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 973

(voir 2e série, t. VIII, p. 562);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Une parabole se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé. On demande :

1° *le lieu du foyer; 2° le lieu du point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe; 3° l'enveloppe de l'axe de la parabole.* (BROCARD.)

L'équation polaire de la parabole, en prenant le foyer pour pôle et la droite dirigée de ce point vers le sommet pour axe polaire, est

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'axe de la parabole étant dirigé horizontalement de gauche à droite, θ soit regardé comme positif ou négatif suivant que le rayon vecteur est au-dessus ou au-dessous de l'axe.

Prenons maintenant pour pôle le point fixe, pour axe polaire la tangente fixe dirigée vers la droite, et appelons ω l'angle que le rayon vecteur mené au foyer de la parabole fait avec le nouvel axe polaire.

1° La propriété de la tangente de faire des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et une parallèle à l'axe donne, dans tous les cas, en ayant égard au signe de θ,

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

L'équation polaire du lieu des foyers sera donc

$$(1) \qquad r = \frac{p}{2\sin^2\omega},$$

et en coordonnées rectangulaires

$$p^2(x^2+y^2) = 4y^4.$$

Cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes des coordonnées; elle se compose de deux branches, convexes vers l'axe des x, ayant pour sommets les points

$x = 0$, $y = \pm \frac{p}{2}$, et s'étendant à l'infini. Elle n'a pas d'asymptotes.

2° On sait que la corde de contact de deux tangentes rectangulaires passe par le foyer; elle se compose de deux rayons vecteurs correspondant à des valeurs de θ qui diffèrent de π; donc, en appelant M le point de la parabole où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe, on a

$$\mathrm{OM} = \rho = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{p}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{p}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2p}{\sin^2\theta},$$

$$(2) \qquad \rho = \frac{2p}{\sin^2 2\omega}.$$

La courbe se compose de quatre branches infinies ayant pour sommets les points $\omega = \pm\frac{\pi}{4}$, $\omega = \pm\frac{3\pi}{4}$, $\rho = 2p$. La tangente et la normale fixe, ainsi que les bissectrices de leurs angles, sont quatre axes de symétrie. Il n'y a pas d'asymptote.

En coordonnées rectangulaires, l'équation serait

$$p^4(x^2+y^2)^3 = 4x^4y^4.$$

3° L'équation de la parabole en coordonnées rectangulaires étant

$$y'^2 = 2px',$$

l'équation de l'axe, en prenant pour axes des coordonnées la tangente et la normale, sera

$$\frac{\pm x}{\sqrt{4x'^2+y'^2}} + \frac{y}{\sqrt{y'^2+p^2}} = 1,$$

ou

$$\frac{\pm x}{\sqrt{2x'(2x'+p)}} + \frac{y}{\sqrt{p(2x'+p)}} = 1.$$

Dans le premier terme, il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que le sommet de la parabole est situé du côté des abscisses positives ou négatives.

Posons

$$\sqrt{2x'+p} = \alpha, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{2x'} = \sqrt{\alpha^2 - p}.$$

L'équation devient, en multipliant par $\alpha\sqrt{\alpha^2 - p}$,

$$(3) \qquad \pm x + \frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{\alpha^2 - p} = \alpha\sqrt{\alpha^2 - p}.$$

Prenant la dérivée par rapport au paramètre variable α, on a

$$\frac{\alpha y}{\sqrt{p}\sqrt{\alpha^2 - p}} = \sqrt{\alpha^2 - p} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - p}};$$

ou, en multipliant par $\sqrt{\alpha^2 - p}$,

$$(4) \qquad \frac{\alpha y}{\sqrt{p}} = 2\alpha^2 - p.$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$\left(\alpha - \frac{y}{\sqrt{p}}\right)\sqrt{\alpha^2 - p} = \pm x,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(5) \qquad \left(\alpha - \frac{y}{\sqrt{p}}\right)^2 (\alpha^2 - p) = x^2.$$

En éliminant α entre les équations (4) et (5), on obtiendra l'équation de l'enveloppe de l'axe. On trouve ainsi

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &16p^2x^4 + (20p^2y^2 - y^4 + 8p^4)x^2 \\ &\qquad - y^6 - 5p^2y^4 + 5p^4y^2 + p^6 = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$x^2 = \frac{y^4 - 20p^2y^2 - 8p^4 \pm y^2\sqrt{y^4 + 24p^2y^2 + 704p^4}}{32p^2},$$

Pour $y^2 < p^2$, les deux valeurs de x^2 seraient négatives; pour $y^2 = p^2$, $x^2 = 0$; pour $y^2 > p^2$, les valeurs de x^2 seront de signes contraires; il ne faut donc conserver devant le radical que le signe +

$$x^2 = \frac{y^4 - 20p^2y^2 - 8p^4 + y^2\sqrt{y^4 + 24p^2y^2 + 704p^4}}{32p^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes; elle se compose de deux branches s'étendant à l'infini dans les quatre angles des coordonnées, et présente deux points de rebroussement $x = 0$, $y = \pm p$.

Note. — La même question a eté resolue par MM. Augier, du lycée de Lyon; Leon Morizot, du lycee de Besançon; Michel Dieu, repetiteur auxiliaire au lycee de Lyon; O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique; A. Le Helloco, elève du lycée de Bordeaux; Willière, professeur à Arlon; V. Niebylowski, eleve de l'École Normale superieure.

Question 978

(voir 2e serie, t IX, p 48),

PAR M. FR. CONRADT, à Stuttgard.

Soit une conique ayant pour foyer le point F, *et soit* N *le pied de la perpendiculaire abaissée d'un foyer* F *sur la directrice correspondante; du foyer abaissons les perpendiculaires* FM, FM′ *sur deux tangentes quelconques, et la perpendiculaire* FN′ *sur la corde qui joint les points de contact des tangentes; les quatre points* M, M′, N, N′ *sont sur une même circonférence, et ils partagent cette circonférence harmoniquement.*

(E. LAGUERRE.)

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de la conique donnée, et x', y' les coordonnées du point P, intersection des deux tangentes. On sait que les points M, M′ appartiennent à une circonférence k_1, décrite sur l'axe focal pour diamètre, et dont l'équation est $x^2+y^2-a^2=0$. Mais, les points M, M' appartiennent aussi à la circonférence k_2, décrite sur la droite FP comme diamètre, et qui a pour équation

$$(x-c)(x-x')+y(y-y')=0.$$

Donc l'équation générale des circonférences passant par les points M, M' est

$$(x-c)(x-x')+y(y-y')-\lambda(x^2+y^2-a^2)=0.$$

En disposant de l'indéterminée λ sous la condition que la circonférence passe encore par le point N, on trouve que la circonférence k_3, déterminée par les trois points M, M', N, est représentée par l'équation

$$(1)\ (cx-a^2)\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)-\frac{cx'y'}{a^2b^2}y\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]=0.$$

Cette dernière équation montre que la circonférence k_3 passe par le point d'intersection des droites

$$(2)\qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=0,$$

et

$$(3)\qquad \frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=0,$$

c'est-à-dire par le point N' (*).

Il résulte aussi de la forme de l'équation (1), que la circonférence k_3 passe encore par deux autres points qui sont : 1° le point où la droite FN' rencontre la directrice; 2° le point où la corde des contacts rencontre l'axe focal.

(*) L'équation (2) représente la corde des contacts des tangentes menées à l'ellipse par le point P, et l'équation (3) la perpendiculaire FN' abaissée du foyer F sur cette corde.

Ces deux derniers points limitent évidemment un diamètre de la circonférence k_3.

Il reste à démontrer que les quatre points M, M', N, N' partagent harmoniquement cette circonférence. Et, pour cela, il suffit de faire voir que les tangentes menées à la circonférence par les points N, N', rencontrent en un même point la droite MM'.

Or l'équation de MM', corde commune aux circonférences k_1, k_2, est

$$(4)\qquad x(c+x')+yy'-(a^2+cx')=0,$$

et les équations des tangentes menées à la circonférence k_3 aux points N, N' sont

$$(5)\qquad \left(x-\frac{a^2}{c}\right)(x'-c)-yy'=0,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{x'(x'-c)}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right]\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\\&+\frac{cx'y'^2}{a^4b^4}(a^2-cx')\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

L'identité

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&[y'^2+(x'-c)^2][x(x'+c)+yy'-(a^2+cx')]\\&-c^3\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)\left[\left(x-\frac{a^2}{c}\right)(x'-c)-yy'\right]\\&=a^2b^2\left[\frac{x'(x'-c)}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right]\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\\&+\frac{cx'y'^2}{a^2b^2}(a^2-cx')\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]\end{aligned}\right.$$

vérifie la proposition énoncée (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Hioux, professeur au lycée de Saint-Étienne; Willière, professeur à Arlon; Prosper Pein, professeur au lycée de Saint-Quentin.

(*) En résolvant les équations (4) et $x=\dfrac{a^2}{c}$, on trouve, par un calcul des plus simples, que la droite MM' coupe la directrice en un point H,

Question 988

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 192);

PAR M. H. BROCARD.

Étant donnée une ellipse de Cassini, et étant pris sur cette ellipse deux couples de points diamétralement opposés A, A′ *et* B, B′; *si l'on joint ces quatre points à un point quelconque* M *de la courbe, la différence des angles* A′MA *et* B′MB *est constante.* (E. LAGUERRE.)

Nous traiterons la question d'une manière en quelque sorte indirecte, en cherchant une courbe jouissant de la propriété énoncée.

Prenons donc les quatre points A, A′, B, B′, diamètralement opposés par rapport à une origine O d'axes rectangulaires. Désignons par a, b, $-a$, $-b$, a', b', $-a'$, $-b'$ leurs coordonnées, et soient x, y les coordonnées d'un point M du plan. Nous aurons

Coefficient angulaire de	MA	$\dfrac{y-b}{x-a}$,
»	MA′	$\dfrac{y+b}{x+a}$,
»	MB	$\dfrac{y-b'}{x-a'}$,
»	MB′	$\dfrac{y+b'}{x+a'}$;

---

dont les coordonnées sont $X = \dfrac{a^2}{c}$, $Y = \dfrac{-b^2x'}{cy'}$, et, en remplaçant X, Y par ces valeurs dans l'équation $Xx + Yy - a^2 = 0$ de la polaire du point H par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, on obtient l'équation (3) de la droite FN′. D'où il faut d'abord conclure que la droite FN′ rencontre MM′ en un point H′ conjugué harmonique de H, par rapport à M, M′; il s'ensuit que, en nommant R le point d'intersection de FN′ et de la directrice, les quatre droites RM, RM′, RH′N′, RHN forment un faisceau harmonique. Or il a été démontré que le point R appartient à la circonférence k_1; donc les points M, M′, N, N′ partagent cette circonférence harmoniquement. (G.)

d'où

$$\operatorname{tang} A'MA = 2\,\frac{bx - ay}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2} = 2\,\frac{bx - ay}{\rho^2 - c^2},$$

et

$$\operatorname{tang} B'MB = 2\,\frac{b'x - a'y}{x^2 + y^2 - a'^2 - b'^2} = 2\,\frac{b'x - a'y}{\rho^2 - c'^2},$$

en posant, pour abréger,

$$x^2 + y^2 = \rho^2,\quad a^2 + b^2 = c^2,\quad a'^2 + b'^2 = c'^2.$$

Mais $B'MB - A'MA$ est constant; donc

$$\operatorname{tang}(B'MB - A'MA) = \frac{m}{n},$$

$\frac{m}{n}$ désignant une constante. L'équation de la courbe lieu des points M est donc

$$2n[(bx - ay)(\rho^2 - c'^2) - (b'x - a'y)(\rho^2 - c^2)] - m(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - c'^2)$$
$$- 4m(bx - ay)(b'x - a'y) = 0.$$

Elle représente une ellipse de Cassini admettant l'origine pour centre et les deux axes de coordonnées pour axes de symétrie. Cette courbe passe de plus par les points A, A', B, B'.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 997

(voir 2e série, t. IX, p. 288);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

Trouver le lieu des centres des circonférences doublement tangentes à un limaçon de Pascal.

(H. BROCARD.)

J'emploierai pour résoudre cette question les coordonnées polaires; mais, avant de donner la solution, je résoudrai la question préliminaire suivante :

Étant donnée une équation du quatrième degré

$$(1) \qquad A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$

quelles relations doivent exister entre les coefficients pour que l'équation soit un carré parfait?

Il est inutile de donner les calculs; le résultat suffit. On trouve pour l'une des conditions (nous n'aurons pas besoin de l'autre)

$$(2) \qquad A_1^2 A_4 = A_3^2 A_0.$$

Voici maintenant la solution du problème proposé:

L'équation du limaçon est, en prenant le point double pour origine,

$$(3) \qquad r = a + b\cos\omega;$$

l'équation d'un cercle dont le centre est au point (ξ, η) et dont le rayon est R, est

$$(4) \qquad r^2 - 2r(\xi\cos\omega + \eta\sin\omega) + \eta^2 + \xi^2 - R^2 = 0.$$

Je cherche l'équation qui donne les r des points d'intersection des deux courbes (3) et (4). Il me suffit de remplacer dans l'équation (4) $\sin\omega$ par $\sqrt{1-\cos^2\omega}$, et de remplacer dans la nouvelle équation $\cos\omega$ par sa valeur tirée de l'équation (3), on arrive ainsi à cette équation du quatrième degré en r

$$\left[\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)^2 + \frac{4\eta^2}{b^2}\right] r^4 + \left[4\frac{a}{b}\xi\left(-1\frac{2\xi}{b}\right) - 8\frac{\eta^2 a}{b^2}\right] r^3$$
$$+ \left[4\xi^2\frac{a^2}{b^2} + 2\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)(\xi^2+\eta^2-R^2) - 4\eta^2 + 4\frac{\eta^2 a^2}{b^2}\right] r^2$$
$$+ 4\frac{a}{b}\xi(\xi^2+\eta^2-R^2)r + (\xi^2+\eta^2-R^2)^2 = 0.$$

Le cercle étant doublement tangent au limaçon, l'équation doit avoir deux couples de racines doubles, c'est-à-dire que les coefficients doivent être liés par la condition (2); donc

$$\left[4\frac{a}{b}\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)-8\frac{\eta^2 a}{b^2}\right]^2(\xi^2+\eta^2-R^2)^2$$
$$=16\frac{a^2\xi^2}{b^2}(\xi^2+\eta^2-R^2)^2\left[\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)^2+4\frac{\eta^2}{b^2}\right],$$

ou

$$\left[\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)-2\frac{\eta^2}{b}\right]^2=\xi^2\left[\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)^2+4\frac{\eta^2}{b^2}\right],$$

ou

$$\frac{\eta^4}{b^2}-\frac{\eta^2}{b}\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)=\frac{\eta^2\xi^2}{b^2};$$

ce qui donne $\eta^2=0$ axe polaire (il était évident qu'il devait faire partie du lieu), et $\xi^2+\eta^2-b\xi=0$ ou $r=b\cos\omega$, cercle décrit sur la distance de l'origine au centre du cercle directeur comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par M. François Ainé, élève du lycée de Lyon.

Question 1005

(voir 2e série, t. IX, p. 432);

PAR M. GENTY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées à Sidi-bel-Abbès.

On donne une surface du second degré et une sphère; si l'on désigne par α, β, γ les angles sous lesquels trois plans diamétraux de la surface (ou trois diamètres conjugués) rencontrent la sphère, et par A, B, C *les aires des sections déterminées par ces plans (ou les longueurs des diamètres), on a la relation*

$$A^2\cos^2\alpha+B^2\cos^2\beta+C^2\cos^2\gamma=\text{const.}$$

(H. FAURE.)

On sait qu'on peut représenter les coordonnées d'un point quelconque d'un ellipsoïde par $a\cos\lambda$, $b\cos\mu$, $c\cos\nu$, où λ, μ, ν sont les angles que fait une certaine droite avec les axes de la surface, en sorte que

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Avec cette méthode, les droites qui correspondent à deux diamètres conjugués de la surface sont à angle droit, c'est-à-dire que l'on a

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0.$$

Ceci posé, soient λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' les angles qui correspondent à trois diamètres conjugués d, d', d'' de la surface, x', y', z' les coordonnées du centre de la sphère, R son rayon, δ la distance du centre au diamètre d, on a

$$\cos^2\alpha = \frac{\delta^2}{R^2}.$$

Or, si θ, θ', θ'' sont les angles que fait le diamètre d avec les axes, on a

$$\delta^2 = (y'\cos\theta'' - z'\cos\theta')^2 + (z'\cos\theta - x'\cos\theta'')^2 + (x'\cos\theta' - y'\cos\theta)^2;$$

d'ailleurs,

$$\cos\theta = \frac{a\cos\lambda}{d}, \quad \cos\theta' = \frac{b\cos\mu}{d}, \quad \cos\theta'' = \frac{c\cos\nu}{d},$$

donc

$$\delta^2 = \frac{(cy'\cos\nu - bz'\cos\mu)^2 + (az'\cos\lambda - cx'\cos\nu)^2 + (bx'\cos\mu - ay'\cos\lambda)^2}{d^2},$$

donc

$$d^2\cos^2\alpha = \frac{(cy'\cos\nu - bz'\cos\mu)^2 + (az'\cos\lambda - cx'\cos\nu)^2 + (bx'\cos\mu - ay'\cos\lambda)^2}{R^2};$$

de même

$$d'^2\cos^2\beta = \frac{(cy'\cos\nu' - bz'\cos\mu')^2 + (az'\cos\lambda' - cx'\cos\nu')^2 + (bx'\cos\mu' - ay'\cos\lambda')^2}{R^2},$$

$$d''^2\cos^2\gamma = \frac{(cy'\cos\nu'' - bz'\cos\mu'')^2 + (az'\cos\lambda'' - cx'\cos\nu'')^2 + (bx'\cos\mu'' - ay'\cos\lambda'')^2}{R^2},$$

et, par suite,

$$d^2\cos^2\alpha + d'^2\cos^2\beta + d''^2\cos^2\gamma = \frac{x'^2(b^2+c^2)+y'^2(c^2+a^2)+z'^2(a^2+b^2)}{R^2}.$$

On démontrerait aussi simplement que

$$A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma = \frac{\pi^2}{R^2}(b^2c^2x'^2 + c^2a^2y'^2 + a^2b^2z'^2),$$

A, B et C étant les aires des sections faites dans la surface du second degré par trois plans diamétraux conjugués, et α, β, γ les angles sous lesquels ces plans coupent la sphère donnée.

Question 1040

(voir 2e série, t. X, p. 479);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

On donne deux surfaces fixes de second ordre; on imagine une droite D *telle que les plans tangents aux points où elle rencontre les deux surfaces se coupent en un même point* M :

1° *Lorsqu'on se donne le point* M, *il y a une droite* D, *et une seule, satisfaisant à la question : elle est l'intersection des plans polaires du point* M *par rapport aux deux surfaces;*

2° *Lorsque le point* M *décrit une droite fixe, la droite* D *décrit une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces;*

3° *Lorsque la droite* D *se meut sur un plan fixe, le point* M *décrit une cubique gauche.*

(L. PAINVIN.)

1° Cette première partie du théorème est évidente. Soient $S=0$, $T=0$ les deux surfaces. La droite des contacts de deux plans tangents menés à S par le point M est située dans le plan polaire de ce point par rapport à S. De même pour la surface T. Si les quatre points de contact sont en ligne droite, la droite est l'intersection des deux plans polaires.

2° Soient x, y, z, u les coordonnées homogènes du point M assujetti à décrire la droite

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Du_1 = 0, \quad A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D'u_1 = 0.$$

Les équations de D seront

$$x_1 \frac{dS}{dx} + y_1 \frac{dS}{dy} + z_1 \frac{dS}{dz} + u_1 \frac{dS}{du} = 0,$$

$$x_1 \frac{dT}{dx} + y_1 \frac{dT}{dy} + z_1 \frac{dT}{dz} + u_1 \frac{dT}{du} = 0.$$

Si l'on élimine x, y, z, u entre ces quatre équations, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dx} & \frac{dS}{dy} & \frac{dS}{dz} & \frac{dS}{du} \\ \frac{dT}{dx} & \frac{dT}{dy} & \frac{dT}{dz} & \frac{dT}{du} \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une surface du second ordre.

Les sommets du tétraèdre conjugué sont déterminés par les équations

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dT}{dx}} = \frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dT}{dy}} = \frac{\frac{dS}{dz}}{\frac{dT}{dz}} = \frac{\frac{dS}{du}}{\frac{dT}{du}}.$$

Soit k la valeur commune de ces rapports. Si l'on substitue dans le déterminant $k\frac{dT}{dx}$ à $\frac{dS}{dx}$, $k\frac{dT}{dy}$ à $\frac{dS}{dy}$, ..., on voit qu'il a, abstraction faite du coefficient k, deux rangées identiques. Il est donc nul. Les quatre sommets du tétraèdre sont sur la surface.

3° Soient $Ax + By + Cz + Du = 0$ le plan fixe dans lequel se meut la droite D; x, y, z, u les coordonnées du point M. Les équations de D peuvent s'écrire

$$x\frac{dS}{dx_1} + y\frac{dS}{dy_1} + z\frac{dS}{dz_1} + u\frac{dS}{du_1} = 0,$$

$$x\frac{dT}{dx_1} + y\frac{dT}{dy_1} + z\frac{dT}{dz_1} + u\frac{dT}{du_1} = 0.$$

Tout plan passant par cette droite a une équation de la forme

$$x\left(\frac{dS}{dx_1} + \lambda\frac{dT}{dx_1}\right) + \ldots = 0.$$

Pour que ce plan soit le plan fixe, on doit avoir

$$(1)\quad \frac{\dfrac{dS}{dx_1} + \lambda\dfrac{dT}{dx_1}}{A} = \frac{\dfrac{dS}{dy_1} + \lambda\dfrac{dT}{dy_1}}{B} = \frac{\dfrac{dS}{dz_1} + \lambda\dfrac{dT}{dz_1}}{C} = \frac{\dfrac{dS}{du_1} + \lambda\dfrac{dT}{du_1}}{D}.$$

On reconnaît facilement que l'élimination de λ entre ces trois équations donnerait deux surfaces du second ordre. On peut voir, en outre, sans effectuer l'élimination, que ces deux surfaces ont une droite commune : c'est la droite qui unit les pôles du plan fixe par rapport à S et à T. Soient, en effet, (x', y', z', u'), (x'', y'', z'', u'') ces deux pôles. Ils sont donnés par les équations

$$\frac{\dfrac{dS}{dx'}}{A} = \frac{\dfrac{dS}{dy'}}{B} = \ldots, \qquad \frac{\dfrac{dT}{dx''}}{A} = \frac{\dfrac{dT}{dy''}}{B} = \ldots.$$

On voit immédiatement que les équations (1) sont satisfaites, quel que soit λ. Les deux pôles appartiennent tous deux aux deux surfaces que représentent les équations (1). Il en est de même de tout point de la droite qui les joint. Soit, en effet, (x, y, z) un point quelconque de cette droite; on a

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'} = \frac{u - u'}{u'' - u'};$$

d'où, en appelant μ la valeur commune de ces quatre rapports,

$$x = \mu x'' + x'(1 - \mu),$$

et de même pour y, z et u.

Il en résulte

$$\frac{dS}{dx} = \mu \frac{dS}{dx''} + (1 - \mu) \frac{dS}{dx'},$$

et trois équations analogues pour y, z et u.

De même pour la surface T. On voit encore que le point (x, y, z, u), quel que soit λ, satisfait aux équations (1); il se trouve sur les deux surfaces qu'elles représentent. L'intersection de ces surfaces se compose d'une droite et d'une cubique gauche. Le point M ne peut se trouver sur la droite; les quatre plans tangents dont il est l'intersection passeraient par cette droite. Or il n'existe qu'un *seul* système de quatre pareils plans dont les quatre points de contact d'ailleurs ne sont pas, en général, sur une même droite. Le point M décrit donc la cubique gauche.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Questions 1059, 1060, 1061 (Lionnet);

(voir 2e série, t. XI, p. 95),

Par M. V.-A. LE BESGUE.

1. Dans les équations qui suivent, les expressions $\frac{x^2+x}{2}$, x^2 supposent x nul ou entier positif. La formule $\frac{x^2+x}{2}$ prend ainsi les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\ldots;$$

ce sont les nombres triangulaires.

La formule x^2 donne les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 4,\quad 9,\ldots;$$

ce sont les carrés.

Si l'on regardait les nombres triangulaires comme les sommes

$$1+2+3+\ldots+x=\frac{(x+1)x}{2}$$

et les nombres carrés comme les sommes

$$1+3+5+\ldots+(2x-1)=\frac{2x.x}{2}=x^2,$$

on ne verrait plus comment zéro peut être indifféremment nombre triangulaire ou nombre carré, puisque, dans le premier membre des équations précédentes, x n'est pas nul.

Pour ce qui suit, il faut admettre que 0 et 1 sont indifféremment nombres triangulaires ou carrés. Il suffira donc de considérer les formules $\frac{x^2+x}{2}$, x^2, qui représentent les nombres triangulaires et les carrés.

2. Si n est un entier quelconque, les questions 1059,

1060, 1061 donnent les trois équations

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned} n &= x^2 + \frac{y^2+y}{2} + \frac{z^2+z}{2} \quad &(\text{Q. } 1059),\\ n &= t^2 + u^2 + \frac{v^2+v}{2} \quad &(\text{Q. } 1060),\\ 2n+1 &= q^2 + r^2 + s^2 + (s+1)^2 \quad &(\text{Q. } 1061). \end{aligned}\right.$$

Ces équations conduisent immédiatement aux suivantes :

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned} 4n+1 &= 4x^2 + (y+z+1)^2 + (y-z)^2,\\ 8n+1 &= 4(t+u)^2 + 4(t-u)^2 + (2v+1)^2,\\ 4n+1 &= (q+r)^2 + (q-r)^2 + (2s+1)^2. \end{aligned}\right.$$

On a donc deux décompositions de $4n+1$ en trois carrés et une de $8n+1$ en trois carrés. Or la *Théorie des nombres* de Legendre (3e édit., n° 317) apprend que ces décompositions sont possibles; il suffit donc de prouver qu'elles peuvent prendre les formes (b) pour que l'on puisse en conclure l'exactitude des équations (a).

3. Quand on décompose $4n+1$ en trois carrés, il y en a nécessairement deux pairs et un impair. Soit

$$4n+1 = 4q_1^2 + 4r_1^2 + (2s+1)^2;$$

il en résulte

$$4n+2 = 4q_1^2 + 4r_1^2 + 4s^2 + 4s + 2,$$

ou

$$2n+1 = 2(q_1^2 + r_1^2) + 2s^2 + 2s + 1,$$
$$2n+1 = (q_1+r_1)^2 + (q_1-r_1)^2 + s^2 + (s+1)^2,$$

ce qui, en posant $q_1 + r_1 = q$, $q_1 - r_1 = r$, donne précisément la troisième équation (a).

4. Pour avoir la première équation (a), il faudra prendre

$$4n+1 = 4x^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Comme l'un des nombres y_1, z_1 est pair et l'autre impair, on peut poser, en admettant $y_1 > z_1$,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + z_1 = 2y + 1, \\ y_1 - z_1 = 2z + 1, \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y_1 = y + z + 1, \\ z_1 = y - z, \end{array}\right.$$

$$4n + 1 = 4x^2 + (y + z + 1)^2 + (y - z)^2.$$

C'est la première équation (b) qui entraîne la première équation (a).

5. La décomposition de $8n + 1$ en trois carrés dont un seul est impair a nécessairement la forme

$$8n + 1 = 4t_1^2 + 4u_1^2 + (2v + 1)^2,$$

où $t_1^2 + u_1^2$ est nécessairement pair; d'où il résulte que $t_1 + u_1$ et $t_1 - u_1$ le sont également, car on a

$$n = \frac{t_1^2 + u_1^2}{2} + \frac{v^2 + v}{2},$$

ou

$$n = \left(\frac{t_1 + u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t_1 - u_1}{2}\right)^2 + \frac{v^2 + v}{2}.$$

Si l'on fait $t_1 + u_1 = 2t$, $t_1 - u_1 = 2u$, on aura précisément la deuxième équation (a).

6. Dans les exemples numériques, on verra s'introduire 1 et 0, pouvant être considérés comme carrés, ou comme nombres triangulaires.

Soit

1° $$11 = 1 + 1 + 9.$$

Dans le second membre, on peut prendre $1 + 1$ comme deux nombres triangulaires, ou comme un carré et un nombre triangulaire.

Soit

2° $$2.5 + 1 = 11 = 0 + 1 + 1 + 9.$$

11 est décomposé en quatre carrés, dont deux (0 et 1) sont consécutifs. Ainsi les trois équations (a) se trouvent vérifiées.

Nota. — Il serait important de donner des démonstrations directes des équations (a), car on simplifierait ainsi la théorie de la décomposition des nombres en trois carrés, ce qui est l'objet de la troisième Partie de la *Théorie des nombres* de Legendre.

Note. — MM. Brocard et Moret-Blanc ont résolu de même ces trois questions.

Question 1079

(voir 2e série, t. XI, p. 192),

PAR M. MORET-BLANC.

Montrer que, pour toute valeur entière et positive du nombre m, la suite terminée

$$\frac{2}{1}m - \frac{2}{1}\frac{2}{3}m(m-1) + \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}m(m-1)(m-2)$$
$$- \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}m(m-1)(m-2)(m-3) + \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{2m}{2m-1}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

L'égalité à démontrer peut s'écrire, en multipliant ses deux membres par $\frac{2m-1}{2m}$,

$$\frac{2m-1}{1} - \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.3} + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)}{1.3.5}$$
$$- \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)(2m-6)}{1.3.5.7} + \ldots = 1,$$

ou

$$\frac{(2m-2)}{1}-\frac{(2m-1)(2m-2)}{1.3}+\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)}{1.3.5}$$
$$-\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)(2m-6)}{1.3.5.7}+\ldots=0,$$

égalité qui, par l'addition successive des différents termes, devient

$$\frac{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots(2m-2n)}{1.3.5.\;(2n-1)}=0,$$

ou simplement

$$(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots(2m-2n)=0.$$

Elle est évidemment satisfaite par toutes les valeurs entières et positives de m, depuis 1 jusqu'à n, quelque grand que soit n, ce qui démontre le théorème.

Note. — Autres solutions de MM. Gambey, Mister, Le Paige, de Virieu, Longlet.

Question 1080

(voir même tome, p. 192);

PAR UN ABONNÉ.

Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des deux nombres m et n, la suite terminée

$$\frac{1}{m}-\frac{n}{1}\frac{1}{m+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{m+2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1}{m+4}-\ldots$$

a pour valeur

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Posons

$$u = \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)},$$

nous aurons, en y faisant successivement $p=0$, $p=1,\ldots,$ $p=n$,

$$u_0 = \frac{1}{m}, \quad u_1 = \frac{1}{m(m+1)}, \ldots, \quad u_n = \frac{1.2\ldots n}{m(m+1)\ldots(m+n)}.$$

On tire de là

$$u_{p+1} - u_p = \Delta u_p = -\frac{1.2.3\ldots p}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p+1)},$$

c'est-à-dire que, au signe près, on passe de u_p à Δu_p en changeant m en $m+1$. On passera donc de u_p à $\Delta^2 u_p$ en changeant m en $m+2$, et, en général, de u_p à $\Delta^n u_p$ en changeant m en $m+n$. Faisons $p=0$, nous aurons

$$\Delta^n u_0 = \pm \frac{1}{m+n},$$

et, en appliquant la formule de la théorie des différences qui donne u_n en fonction de u_0, et de ses différences successives

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n.1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots,$$

on trouve la formule proposée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Mister, Lenglet, Brocard, de Virieu, Le Paige.