PAINVIN

Étude d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 529-539

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__529_0>

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir même tome, p. 481),

PAR M. PAINVIN.

36. *Lieu des points pour lesquels le cône du complexe est de révolution.*

L'équation du cône est (4), n° 4,

$$x^2(S_0+a^2-x_0^2)+y^2(S_0+b^2-y_0^2)+z^2(S_0+c^2-z_0^2)$$
$$-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx-2x_0y_0xy$$
$$+2Ax_0x+2By_0y+2Cz_0z-(Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2)=0.$$

Si l'on exprime que ce cône est de révolution, on voit immédiatement qu'un des rectangles doit disparaître, ce qui exige qu'une des quantités x_0, y_0, z_0 soit nulle. Prenons $y_0=0$, on trouve alors que le sommet du cône doit se trouver sur la courbe

$$y_0=0,\quad \frac{x_0^2}{c_1^2}-\frac{z_0^2}{a_1^2}-1=0,$$

et l'axe de ce cône est

$$y=0,\quad \frac{x_0x}{c_1^2}-\frac{z_0z}{a_1^2}-1=0,$$

c'est-à-dire que le sommet du cône est sur une focale de l'ellipsoïde, et l'axe du cône est la tangente à la focale au point où se trouve le sommet. Les génératrices du cône, situées dans le plan principal considéré, seront tangentes à l'ellipse de la surface Δ qui se trouve dans ce plan.

37. *Position des plans pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à un cercle.*

Pour que la conique (Γ) se réduise à un cercle, il faut et il suffit que les valeurs de ρ^2 fournies par l'équation (42), n° 19, soient égales ; on est ainsi conduit à l'équation de condition

$$(e\mathcal{S}_0 + \mathcal{H}_0 - 1)^2 - 4(\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathcal{H}_0) = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(e\mathcal{S}_0 + \mathcal{H}_0 + 1)^2 - 4\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 = 0,$$

ou, en remplaçant $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{H}_0$ par leurs valeurs, et développant,

$$a_1^4u_0^4 + b_1^4v_0^4 + c_1^4w_0^4 - 2b_1^2c_1^2v_0^2w_0^2 - 2c_1^2a_1^2u_0^2w_0^2 - 2a_1^2b_1^2u_0^2v_0^2 = 0,$$

ce qu'on peut écrire définitivement sous la forme suivante :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_1u + b_1v + c_1w)(-a_1u + b_1v + c_1w) \\ &\quad\times(a_1u - b_1v + c_1w)(a_1u + b_1v - c_1w) = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme on a, d'après les hypothèses faites, $a_1^2 > 0$, $b_1^2 < 0$, $c_1^2 > 0$, on voit que les points définis par l'équation (66) sont imaginaires, tant que v n'est pas nul.

Donc les plans réels, pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un cercle, passent par l'une ou l'autre des deux droites

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1^\circ)\quad v = 0,\quad a_1u + c_1w = 0, \\ &(2^\circ)\quad v = 0,\quad a_1u - c_1w = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous considérons la droite (1°) par exemple, elle est définie par deux points, dont le premier, $v = 0$, est à l'infini sur Oy, et dont le second est à l'infini sur la direction $\dfrac{x}{a_1} = \dfrac{z}{c_1}$, laquelle est perpendiculaire à une des asymptotes de l'hyperbole focale.

Ainsi les plans réels pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un cercle sont les plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale située dans le plan zOx, et, d'après le théorème VI, n° 15, le centre du cercle est précisément le point de rencontre du plan avec l'asymptote.

Si l'on prend, par exemple, $v_0 = 0$, $a_1 u_0 = c_1 w_0$, l'équation du plan sécant sera

$$(1^\circ) \qquad c_1 x + a_1 z = \mu, \quad \text{d'où} \quad u_0 = \frac{c_1}{\mu}, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \frac{a_1}{\mu};$$

l'équation (42), n° 19, donne alors pour le rayon ρ^2 du cercle

$$(2^\circ) \qquad \rho^2 = B + \frac{\mu^2}{b_1^2}.$$

Comme b_1^2 est négatif, on voit que le rayon de ce cercle sera toujours inférieur à celui du cercle de la surface Δ situé dans le plan zOx; pour que le cercle soit réel, il faut que

$$(3^\circ) \qquad \mu < \sqrt{B}\sqrt{-b_1^2},$$

et le plan limite a pour équation

$$(\tau\tau) \quad (68) \qquad c_1 x + a_1 z = \sqrt{B}\sqrt{-b_1^2}.$$

Cette dernière droite est la tangente commune à l'ellipse et au cercle de la surface Δ; le plan (68) est donc un plan tangent double; le rayon du cercle correspondant est nul; son centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la droite (68).

Quant au rayon ρ^2 (2°), on voit facilement qu'il est égal à la moitié de la corde interceptée, sur la trace du plan sécant, par le cercle de la surface Δ.

On a donc la proposition :

Théorème XIII. — *Le lieu des points pour lesquels* *les cônes du complexe sont des cônes* RÉELS *de révolution est l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné, située dans le plan* zOx *perpendiculaire à l'axe moyen. L'axe du cône est la tangente à l'hyperbole focale au point où se trouve le sommet; les génératrices, situées dans le plan* zOx*, sont tangentes à l'ellipse de la surface* Δ *qui se trouve dans le même plan. Le cône devient imaginaire quand le sommet pénètre dans l'intérieur de cette ellipse.*

Les plans RÉELS Π, *pour lesquels les coniques* (Γ) *du complexe sont des cercles, sont des plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale, et les centres de ces cercles sont sur ces asymptotes. Les cercles cessent d'être réels, lorsque la trace du plan* Π *se trouve au delà de la tangente commune au cercle et à l'ellipse de la surface* Δ *situés dans le plan* zOx. *Lorsque le cercle est réel, son diamètre est la portion de la trace du plan* Π *interceptée par le cercle de la surface* Δ.

38. *Position des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents.*

Dans ce cas, l'équation (16) ou (16 *bis*), n° 6, doit admettre deux racines nulles, c'est-à-dire que deux des quantités σ_1, σ_2, σ_3 doivent être nulles; mais la quantité σ_1, qui est la somme de deux quantités négatives, ne peut être nulle (il est entendu que nous ne nous occupons que des solutions réelles); on doit donc avoir

$$\sigma_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \rho_1 + \rho_3 = 0, \quad \rho_1 + \rho_2 = 0.$$

Les inégalités (14), n° 5, nous montrent que les quantités ρ_2 et ρ_3, qui doivent être égales et de même signe, sont alors égales à la limite commune $-b^2$ qui les sépare.

On a donc

(69) $$\rho_2 = \rho_3 = -b^2, \quad \rho_1 = b^2;$$

les équations (11) et (12) du n° 5 donnent, d'après cela,

(69 *bis*) $$\left\{\begin{array}{lll} S_0 = -b^2, & G_0 = b^4, & H_0 = b^6, \\ x_0^2 = -\dfrac{Cc_1^2}{b_1^2}, & y_0 = 0, & z_0^2 = -\dfrac{Aa_1^2}{b_1^2}. \end{array}\right.$$

Si l'on considère le point (dont les coordonnées sont positives), savoir :

$$x_0 = \frac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}},$$

l'équation (15) du cône (C), ayant son sommet en ce point, devient

(70) $$\left(\frac{c_1 x}{\sqrt{C}} + \frac{a_1 z}{\sqrt{A}} - \sqrt{-b_1^2}\right)^2 = 0,$$

ou

$$\frac{c_1 x}{\sqrt{C}} + \frac{a_1 z}{\sqrt{A}} - \sqrt{-b_1^2} = 0.$$

La surface Δ a *seize points doubles :* quatre sont réels, huit sont imaginaires et quatre sont à l'infini. Les calculs précédents nous montrent que les points pour lesquels le cône *réel* du complexe se réduit à deux plans coïncidents sont précisément les points doubles réels de la surface Δ. On voit, par les formules du n° 35, que ces points doubles sont les intersections du cercle et de l'ellipse appartenant à la surface Δ, et situés dans le plan zOx. Quant au *plan* Π_d *du complexe,* il est perpendiculaire au plan zOx, et sa trace est tangente, au point double D, à l'ellipse de la surface Δ. Toutes les droites qui passent par le point D sont situées dans le plan unique Π_d.

Les coordonnées du plan Π_d ou (70) sont

$$(70\ bis)\quad (\Pi_d)\quad u_0 = \frac{c_1}{\sqrt{C}\sqrt{-b_1^2}},\quad v_0 = 0,\quad w_0 = \frac{a_1}{\sqrt{A}\sqrt{-b_1^2}};$$

l'équation (34), n° 15, donne alors pour la conique Γ_d, correspondant au plan Π_d,

$$(71)\quad (\Gamma_d)\quad \begin{cases} (c_1\sqrt{C}u + a_1\sqrt{A}w - \sqrt{-b_1^2}) \\ \quad \times (c^2 c_1\sqrt{C}u + a^2 a_1\sqrt{A}w - b^2\sqrt{-b_1^2}) = 0, \end{cases}$$

ou

$$(71\ bis)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}}, & y_0 = 0, & z = \dfrac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}}, \\ x'_0 = \dfrac{c^2 c_1\sqrt{C}}{b^2\sqrt{-b_1^2}}, & y'_0 = 0, & z'_0 = \dfrac{a^2 a_1\sqrt{A}}{b^2\sqrt{-b_1^2}}; \end{cases}$$

ces deux points sont les points D et D′, où la tangente en D à l'ellipse rencontre le cercle. Ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème IX.

Si l'on considère un point quelconque du plan Π_d, le cône correspondant du complexe sera coupé suivant deux droites réelles passant par D et D′; quand son sommet se trouve sur DD′, le cône est touché par le plan Π_d suivant la droite DD′ ; si le sommet vient en D′, le cône se réduit à deux plans réels, dont un est le plan Π_d, et l'autre, perpendiculaire à zOx, a sa trace tangente à l'ellipse; enfin, quand le sommet est en D, le cône se réduit à deux plans confondus avec Π_d.

39. Nous avons dit que le point D était un point double de la surface Δ; ajoutons que c'est un *point double conique*. En effet, les coordonnées du point D sont

$$x_0 = \frac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}},\quad y_0 = 0,\quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

transportons en ce point l'origine des coordonnées, l'équation ($21\ ter$), n° 8, de la surface Δ devient

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &(x'^2+y'^2+z'^2)(Ax'^2+By'^2+Cz'^2)\\ &\quad+\frac{2}{\sqrt{-b_1^2}}\Big[(c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(Ax'^2+By'^2+Cz'^2)\\ &\qquad\qquad+\sqrt{A}\sqrt{C}(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')(x'^2+y'^2+z'^2)\Big]\\ &\quad-\left[\frac{4\sqrt{A}\sqrt{C}}{b_1^2}(c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')\right.\\ &\qquad\qquad\left.+a_1^2c_1^2y'^2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

On voit par là que le point D est un point double conique; le cône tangent a pour équation

$$(73)\quad (c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')+\frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{4\sqrt{AC}}y'^2=0;$$

c'est un cône proprement dit, symétrique par rapport au plan zOx, et dont la trace sur ce plan est formée par les tangentes en D à l'ellipse et au cercle de la surface Δ. Le plan Π_d est tangent à ce cône suivant la tangente à l'ellipse. Il est facile de voir que l'intérieur du cône (73) est tourné vers le centre de l'ellipsoïde.

40. *Position des plans* Π *pour lesquels la conique* Γ *se réduit à deux points coïncidents.*

Dans ce cas, l'équation (42), n° 19, doit admettre deux valeurs nulles pour ρ^2; on a donc

$$\epsilon\,\mathfrak{S}_0+\mathfrak{H}_0=1,\quad \mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0=1.$$

En remplaçant $\mathfrak{S}_0$ par $\frac{1}{\mathfrak{G}_0}$ dans les équations (50), n° 27, on trouve

$$b_1^2 c_1^2 u_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - A)^2}{\mathcal{G}_0},$$

$$c_1^2 a_1^2 v_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - B)^2}{\mathcal{G}_0},$$

$$a_1^2 b_1^2 w_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - C)^2}{\mathcal{G}_0}.$$

Comme on a $\mathcal{G}_0 > 0$, $a_1^2 > 0$, $b_1^2 < 0$, $c_1^2 > 0$, les seules solutions réelles sont

$$\mathcal{G}_0 = B, \quad s_0 = \frac{1}{B}, \quad \mathfrak{H}_0 = -b^2;$$

d'où il résulte

$$(74) \qquad u_0^2 = \frac{c_1^2}{-b_1^2 B}, \quad v_0^2 = 0, \quad w_0^2 = \frac{a_1^2}{-B b_1^2}.$$

Ce sont les seuls plans *réels* pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points confondus ; ces plans, au nombre de quatre, sont perpendiculaires au plan zOx, et leurs traces sur ce plan sont les tangentes communes à l'ellipse et au cercle de la surface Δ ; ce sont les plans tangents doubles *réels* de cette surface ; ils sont *curvitangents*.

Considérons, par exemple, le plan

$$(75) \quad (\Pi_\delta) \quad u_0 = \frac{c_1}{\sqrt{B}\sqrt{-b_1^2}}, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \frac{a_1}{\sqrt{B}\sqrt{-b_1^2}},$$

ou

$$(75\ bis) \qquad c_1 x + a_1 z = \sqrt{B}\sqrt{-b_1^2};$$

on trouve, d'après l'équation (34), n° 15, pour la conique correspondante

$$(76) \quad (\Gamma_\delta) \quad \left(c_1 u + a_1 w - \frac{\sqrt{-b_1^2}}{\sqrt{B}}\right)^2 = 0,$$

ou

$$c_1 u + a_1 w = \frac{\sqrt{-b_1^2}}{\sqrt{B}},$$

ou

$$(76\ bis) \qquad x''_0 = \frac{c_1\sqrt{B}}{\sqrt{-b_1^2}}, \quad y''_0 = 0, \quad z''_0 = \frac{a_1\sqrt{B}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

c'est le point de contact a_0 de la tangente double $\tau\tau$ avec le cercle de Δ.

Toutes les droites du complexe situées dans le plan Π_δ passent par le point a_0; par conséquent, les cônes du complexe dont le sommet est un point quelconque du plan Π_δ sont touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point a_0. Quand le sommet se trouve en un des points où la tangente $\tau\tau$ touche l'ellipse et le cercle de Δ, le cône du complexe se réduit à deux plans distincts réels : l'un est le plan Π_δ; l'autre, perpendiculaire à zOx, a sa trace tangente ou au cercle ou à l'ellipse.

Nous avons donc cette proposition :

Théorème XIV. — 1° *Les points pour lesquels les cônes* réels *du complexe se réduisent à deux plans coïncidents sont les quatre points doubles réels de la surface Δ, points doubles coniques qui sont les intersections du cercle (C_0) et de l'ellipse (E_0) appartenant à Δ et situés dans le plan zOx de l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné.*

Si l'on considère un de ces points, D par exemple, le plan correspondant Π_d du complexe est perpendiculaire au plan zOx et touche en D l'ellipse (E_0); toutes les droites du complexe qui passent par D sont situées dans le plan Π_d. La conique (Γ_d) du complexe, située dans le plan Π_d, se réduit à deux points, dont l'un est le point D et l'autre est le point D' intersection du cercle C^0

avec la tangente, en D, *à l'ellipse* E_0. *Le cône du complexe, dont le sommet est en* D′, *se réduit à deux plans réels, perpendiculaires à* zOx, *dont les traces sont les tangentes menées du point* D′ *à l'ellipse* (E_0).

2° *Les plans pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents sont les quatre plans doubles* RÉELS *de la surface* Δ; *ces plans doubles, curvi-tangents, sont perpendiculaires au plan* zOx, *et leurs traces sont les tangentes communes au cercle* (C_0) *et à l'ellipse* E_0.

Si l'on considère une de ces tangentes, τ *par exemple, le plan* Π_δ, *perpendiculaire à* zOx, *ayant* τ *pour trace, et touchant le cercle en* a_0, *aura sa conique* (Γ) *réduite à deux points confondus en* a_0. *Toutes les droites du complexe, situées dans le plan* Π_δ, *passent par le point* a_0, *et, par suite, les cônes du complexe, dont le sommet est sur* Π_δ, *sont tous touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point* a_0. *Lorsque le sommet du cône se trouve en un des points où la droite* τ *touche l'ellipse ou le cercle, le cône se réduit à deux plans réels perpendiculaires à* zOx; *une des traces est la tangente commune, l'autre est la tangente à l'ellipse ou au cercle, suivant que le point considéré est sur le cercle ou sur l'ellipse.*

41. Cette recherche n'est, pour ainsi dire, qu'une introduction à l'étude des complexes particuliers du second ordre dérivant de la définition géométrique donnée en commençant. Il reste encore de nombreuses questions à aborder sur lesquelles je reviendrai bientôt. Ainsi il reste à étudier la *congruence* formée par les arêtes des systèmes du complexe, les propriétés des pôles et des polaires relativement à ce complexe, etc.; on a aussi à chercher quelles sont les propriétés essentielles qui ca-

ractérisent ce complexe particulier et le différencient des complexes généraux du second ordre, etc.; on pourrait encore se proposer l'application de la même définition géométrique au cas des hyperboloïdes et des paraboloïdes, en ayant toujours en vue la situation des droites réelles du complexe correspondant, etc., etc.