Nouvelles annales de mathématiques

Koehler

Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 11 (1872), p. 66-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1872_2_11__66_1>

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

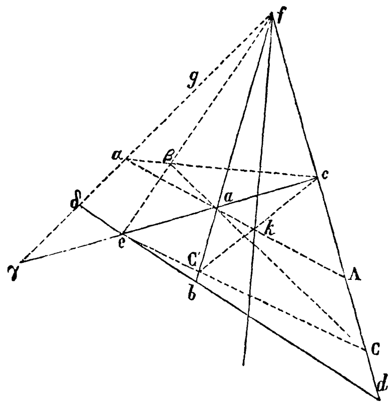
(suite, voir même tome, p. 21);

PAR M. KOEHLER.

VII. Si les six sommets d'un quadrilatère complet s'appuient sur une cubique, les tangentes en quatre sommets (dont trois ne sont pas en ligne droite) forment un quadrilatère dont les diagonales passent par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit (*fig.* 8).

Soient *abcdef* le quadrilatère complet, *g* un point quelconque. On peut concevoir une cubique déterminée par un faisceau de coniques passant en a, b, c, d et un faisceau de droites ayant g pour pivot. Donnons-nous de plus la tangente aA au point a. Je fais correspondre aux rayons ge, gf, ga les coniques (ac, bd), (ab, cd) et celle

Fig. 8.



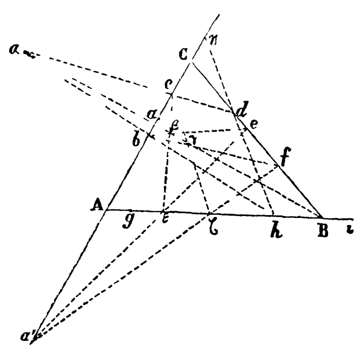
qui a pour tangente aA. Les tangentes à la cubique en c, d, b seront les tangentes aux coniques qui correspondent respectivement à gc, gd, gb. Soient aC, aD, aB les tangentes en a à ces trois coniques (aD et aB ne sont pas représentées sur la figure).

La direction aA étant donnée, il faut pour trouver aC chercher le rayon tel que les rapports $a(e, f, \mathrm{A}, \mathrm{C})$, $g(e, f, a, c)$ soient égaux, c'est-à-dire prolonger aA jusqu'à la rencontre de gf en α, joindre $c\alpha$ qui rencontre ef en β, joindre $\alpha\beta$. La tangente à la cubique en c étant tangente à la conique qui touche aC au point a, il suffit pour la construire de joindre eC et de mener la droite cC au point où eC rencontre af. Quelle que soit la direction aA, le point k, intersection de aA et de cC', décrira une droite fk, polaire par rapport à l'angle afc du point γ où ec rencontre fg.

Considérons maintenant la transversale ebd; quelle que soit la direction de la tangente à la cubique en b, son point d'intersection k' avec la tangente en d sera sur une droite fk', polaire de δ relativement à l'angle afc; or fk et fk' coïncident, puisque les points γ et δ sont sur une droite qui passe en f. On verrait de même que les intersections i, i' des tangentes à la cubique en a et b, en c et d sont sur une même droite passant au point e.

VIII. *Théorème de Carnot.*—Soient ABC un triangle, a, b, c, d, e, f, g, h huit points : trois sur AC, trois sur CB, deux sur BA (*fig.* 9).

Fig. 9.



Il est d'abord évident que toutes les cubiques passant par les huit points passeront aussi par un neuvième point i situé sur le côté BA. On peut le reconnaître sans aucune construction en remarquant que le système des droites AB, AC, BC est une des cubiques considérées.

Pour trouver le point i, prenons pour base $bcdh$ (*fig.* 9) et cherchons le rapport anharmonique des coniques $bcdh(a, e, f, g)$. Les segments qu'elles déterminent sur le côté BA sont hA, $h\varepsilon$, $h\varphi$, hg; on obtient les points ε, φ en joignant cd, bh, qui se coupent en α; il faut joindre ensuite be, bf, qui coupent $B\alpha$ en β, γ, joindre enfin $c\beta$, $c\gamma$. La conique circonscrite au quadrilatère $aefg$ et capable du rapport $bcdh(a, e, f, g)$ [ou, ce qui revient au même, du rapport $(A, \varepsilon, \varphi, g)$] coupera BA au point i. Pour obtenir le deuxième point a' où cette conique rencontre CA, il suffit de joindre $e\varepsilon$, $f\varphi$; ces deux droites se coupent en a' sur le côté CA. En effet, les points $e, f, \ldots, \varepsilon, \varphi, \ldots$ appartiennent à deux divisions homographiques sur les côtés BC, AB; deux points homologues coïncident en B, A et C sont deux points correspondants, et il en résulte que toutes les lignes telles que $e\varepsilon$ qui joignent deux points correspondants se coupent au même point sur AC. On voit que a' appartient à la conique dont il s'agit, et l'on aura immédiatement le point i. Cela posé, le théorème de Carnot, appliqué à cette conique, donne

$$\frac{Ag.Ai}{Bg.Bi}\cdot\frac{Be.Bf}{Ce.Cf}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Aa.Aa'}=1.$$

On a aussi, en considérant la transversale $hd\eta$,

$$\frac{Ah}{Bh}\cdot\frac{Bd}{Cd}\cdot\frac{C\eta}{A\eta}=1,$$

et, par suite,

$$\frac{Ag.Ah.Ai}{Bg.Bh.Bi}\cdot\frac{Bd.Be.Bf}{Cd.Ce.Cf}\cdot\frac{Ca.Ca'.C\eta}{Aa.Aa'.A\eta}=1.$$

Mais les segments AC, bc, $a'\eta$ sont en involution, comme interceptés sur le côté AC par trois coniques circonscrites au quadrilatère $deh\varepsilon$, savoir : (BC, BA), $(dh, e\varepsilon)$, $bcdhe\varepsilon$.

On a donc

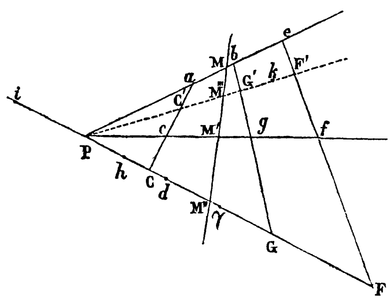
$$\frac{Ca'.C\eta}{Aa'.A\eta} = \frac{Cb.Cc}{Ab.Ac},$$

et l'équation précédente devient celle qui exprime le théorème de Carnot appliqué aux cubiques.

En supposant un des sommets du triangle à l'infini, on arrive au théorème de Newton.

IX. *Théorème de Cotes.* — Prenons sur trois droites convergentes en P les huit points a, b, e, c, g, f, d, h répartis comme l'indique la *fig.* 10. Toutes les cubiques

Fig. 10.



passant par ces huit points ont évidemment leur neuvième intersection sur la droite Pdh. Pour trouver ce neuvième point i, il suffit, en prenant $abcd$ pour base, de circonscrire au quadrilatère $efgh$ une conique capable du rapport $abcd(e, f, g, h)$ et de chercher le second point où elle coupe Pd. Si maintenant, les sept points a, b, c, d, e, f, g restant fixes, h se déplace sur la droite Pd, il est évident que les segments tels que hi seront en involution; P est un des points doubles.

Soient F, G, C les intersections de ef, bg, ac avec Pd, γ le second point d'intersection de la conique $abcdg$

avec Pd; quand h vient en F, i coïncide avec γ, de sorte que $F\gamma$ est un des segments de l'involution. On a donc

$$\frac{1}{Pi} + \frac{1}{Ph} = \frac{1}{P\gamma} + \frac{1}{PF}$$

et

$$\frac{1}{Pd} + \frac{1}{Pi} + \frac{1}{Ph} = \frac{1}{Pd} + \frac{1}{P\gamma} + \frac{1}{PF}.$$

Mais γd est le segment intercepté par la conique $abcdg$, on a donc

$$\frac{1}{P\gamma} + \frac{1}{Pd} = \frac{1}{PC} + \frac{1}{PG};$$

donc enfin

$$\frac{1}{Pd} + \frac{1}{Pi} + \frac{1}{Ph} = \frac{1}{PC} + \frac{1}{PG} + \frac{1}{PF},$$

c'est-à-dire que le centre des moyennes harmoniques de P par rapport à d, h, i est le même que par rapport à C, G, F; il se trouve donc sur la droite MM' qui joint les centres des moyennes harmoniques de P relatifs aux deux groupes a, b, e et c, g, f. Le théorème de Cotes se conclut de ce qui précède; qu'on imagine une quatrième transversale issue de P; on pourra assigner un point k sur cette droite pour achever de déterminer la cubique passant par le groupe $a, b, c, \ldots, i$. Les points l, m où Pk rencontre la courbe satisfont encore à la condition

$$\frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm} = \frac{1}{PC'} + \frac{1}{PG'} + \frac{1}{PF'}.$$

En effet, si l'on joint dc, ig, hf qui rencontrent Pk en C_1, G_1, F_1, le centre des moyennes harmoniques de k, l, m sera le même que celui de C_1, G_1, F_1 ou de C', G', F'; il sera en M''' sur la droite $M'M''$.

Corollaire. — Si les transversales Pa, Pc coïncident, les points C, G, F deviennent les intersections des tangentes en a, b, c avec la transversale Pd, et l'on a ce théorème de Maclaurin :

Si par un point P *on mène une sécante et les tangentes aux points où elle coupe la courbe, l'axe des moyennes harmoniques des tangentes est le même que celui du point* P *par rapport à la courbe.*

X. *Polaires coniques des courbes du troisième ordre.* — Étant donnés sur une droite un point P et un groupe de trois autres points a, b, c, les conjugués de P relatifs à ce groupe sont des points tels que P est le centre des moyennes harmoniques de chacun d'eux par rapport à a, b, c. Si l'on prend P pour origine, les conjugués sont donnés par l'équation

$$x^2(a+b+c) - 2x(ab+ac+bc) + 3abc = 0,$$

a, b, c désignant les distances Pa, Pb, Pc. Ces points divisent harmoniquement le segment formé par P et par son centre harmonique relatif à a, b, c.

On peut construire géométriquement les conjugués de la manière suivante :

Il est d'abord évident que, si P se déplace sur la droite, ses conjugués forment un système de segments en involution (principe de correspondance) ; si P coïncide avec a, ses conjugués sont le point a lui-même, et le conjugué harmonique α de a par rapport à bc. On a donc immédiatement trois segments de l'involution, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ (β, γ étant les conjugués harmoniques de b, c par rapport à ac, ab).

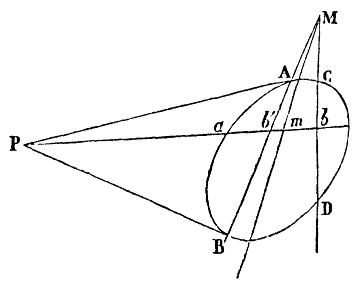
Pour obtenir les conjugués de P, il faudra construire un segment xy tel que l'on ait

$$\text{rapport anharmonique} = (xy, a\alpha, b\beta, c\gamma) = (\mathrm{P}, a, b, c).$$

On peut aussi faire intervenir le centre des moyennes harmoniques p, en remarquant que les conjugués forment une involution avec les segments formés, d'une part, par deux des points donnés, de l'autre, par le troisième et par le conjugué harmonique de P relatif aux deux premiers. Ils sont, de plus, conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à P et p ; on est ainsi ramené à un problème connu (Chasles : *Traité des sections coniques*, n° 153).

La polaire d'un point P par rapport à une cubique est le lieu de ses conjugués par rapport aux groupes de trois points situés sur toutes les transversales qui passent en P. Je démontrerai d'abord que la polaire d'un point par rapport au système composé d'une droite CD et d'une conique est une autre conique. Soit MAB la polaire rectiligne de P relativement à la conique seule; soit Mm l'axe

Fig. 11.



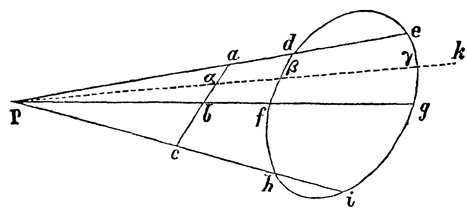
des moyennes harmoniques du système (*fig.* 11). On voit d'abord que les quatre points A, B, C, D appartiennent au lieu cherché.

Menons une transversale Paa'; les conjugués de P par rapport aux points a, a', b sont en involution avec aa', bb', et, de plus, ils divisent harmoniquement le segment Pm; donc ils appartiennent à une conique passant en A, B, C, D, et dont la polaire relative à P est la droite Mm.

Lorsque la conique donnée se réduit à un système de deux droites, la polaire de P par rapport au triangle est une conique passant par les trois sommets.

Je considère maintenant une cubique quelconque; je coupe la courbe par une transversale abc, et je mène les rayons Pa, Pb, Pc. Leurs six autres points d'intersection d, e, f, g, h, i appartiendront à une même conique.

Fig. 12.



Soit k un dixième point qui achève de déterminer la courbe du troisième ordre; les conjugués de P par rapport aux trois points k, k', k'' situés sur la transversale Pk (*fig.* 12) seront les mêmes que par rapport aux points α, β, γ, où cette ligne coupe la conique et la droite abc. En effet, si k se déplace sur la transversale, les conjugués de P relatifs au système variable k, k', k'' formeront une série de segments en involution; car ils divisent harmoniquement le segment Pm déterminé par l'axe des moyennes harmoniques, axe qui ne varie pas. Mais, lorsque k coïncide avec α, β ou γ, le segment est le même : c'est celui qui correspond au groupe ($\alpha\beta\gamma$); lorsque k vient en P, k' et k'' se confondent avec lui, ainsi que les conjugués, car alors la cubique devient un système de trois droites convergentes. Il en résulte que la série de segments se réduit à un segment unique, celui qui correspond à $(\alpha\beta\gamma)$ (*). La polaire de P relative à une courbe quelconque du troisième ordre, passant par les neuf points a, b, c,...i, est donc la même que par rapport au système composé de la droite abc et de la conique $defghi$; c'est une autre conique.

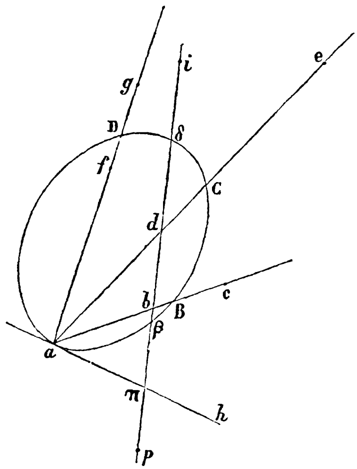
Construction des tangentes issues d'un point d'une cubique. — Ce problème revient à trouver les intersections d'une courbe du troisième ordre et de la polaire d'un de ses points, conique qui a deux points infiniment voisins communs avec la courbe; il peut être résolu géométriquement de la manière suivante.

Quels que soient les neuf points qui définissent une courbe du troisième ordre, on pourra toujours mener la tangente en a et trouver les points de la courbe b, c, d, e, f, g situés sur trois transversales issues de ce point. Les conjugués harmoniques de a(B, C, D) par rapport aux trois couples bc, de, fg et la tangente ah détermineront la conique polaire. Menons la droite bd et soit i le troisième point de la cubique situé sur cette droite. On peut considérer l'ensemble de la conique aBCD et de la droite bd comme une cubique ayant avec la proposée cinq points communs (aa), b, d, i (*fig.* 13). Si l'on prend pour base $(aa)bd$, il est facile de voir que le pivot p

(*) C'est ce qu'il est très-facile de reconnaître; menons, en effet, par le point P une droite quelconque Pμ sur laquelle nous porterons les distances de P aux milieux μ des segments formés par les conjugués de ce point relatifs aux divers groupes k, k', k''. On a ainsi deux droites divisées homographiquement Pμ et Pk. Le point P sur Pk coïncide avec son homologue sur Pμ; aux points α, β correspond un même point μ. μ correspond donc à tous les points k, puisque les droites qui joignent les points homologues sont convergentes. L'examen de l'équation anharmonique $xy + ax + by + c = 0$ conduirait au même résultat; si l'on doit avoir $y = 0$ pour $x = 0$, et $y = \mu$ pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, elle devient $x(y - \mu) = 0$, et l'on a $y = \mu$, quel que soit x.

relatif au système de la conique et de la droite sera le sixième point d'une involution déterminée par les segments bd, $\beta\delta$ et par le point π où bd rencontre ah.

Fig. 13.



Soit P le pivot de la cubique donnée, relatif à la même base. A une conique quelconque du faisceau commun correspondent deux rayons, un dans le faisceau P, un dans le faisceau p. Menons Pc, Pe, Pg, et cherchons les homologues $p\gamma$, $p\varepsilon$, $p\chi$; la conique menée par les points p, P et par les intersections respectives de ces trois couples de droites contiendra évidemment les autres points communs aux deux cubiques, ou, ce qui revient au même, les points communs à la cubique donnée et à sa polaire aBCD.

Propriété des polaires de tous les points d'une droite. — Diamètres coniques et courbe centrale. — Les polaires de deux points a, b d'une droite se coupent en quatre points; si l'on considère l'un quelconque d'entre eux p, son axe des moyennes harmoniques sera la droite ab. Si l'on mène une droite quelconque pc, le point c où elle rencontre ab sera le centre des moyennes harmoniques de p relatif aux trois points de la cubique situés sur la transversale; donc p est un des conjugués de c, il appartient aux polaires de tous les points de la droite ab. Ainsi les polaires de tous les points d'une droite passent par quatre points, pôles harmoniques de cette droite.

Si l'on considère la droite à l'infini, chacun de ses points a pour polaire une conique qui est un diamètre; tous les diamètres passent par quatre points pôles de l'infini. Leurs centres sont donc sur une conique qui est la conique centrale; elle est en même temps le lieu des points dont les polaires coniques sont des paraboles. Que l'on conçoive en effet, par un des points de la conique centrale, une transversale parallèle à la direction qui détermine le diamètre dont ce point est le centre; si l'on cherche les conjugués du point, l'un d'eux sera à l'infini, car le point en question est le centre des moyennes distances des points de la cubique situés sur la transversale. Toute autre direction donnerait deux conjugués à distance finie.

Enfin il est évident que, si par un point on mène une infinité de transversales, les quatre pôles harmoniques de toutes ces droites parcourront la polaire conique du point.

(*La suite prochainement.*)