NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1875.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUATORZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1875.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

GÉNÉRATION DES LIGNES ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, D'APRÈS JACOBI;

PAR M. I. WAILLE.

Lignes du second degré (*).

Deux bases fixes RS, *rs étant données, si l'on construit le triangle rs*M *dont les côtés r*M, *s*M *sont respectivement égaux à deux longueurs* R*m*, S*m*, *le lieu de* M *est une ellipse ou une hyperbole, quand l'aire du triangle* RS*m est nulle, c'est-à-dire quand m est un point quelconque de la ligne* RS; en effet, la somme ou la différence des longueurs *r*M, *s*M est alors constamment égale à RS.

Jacobi, qui a ainsi modifié la définition de l'ellipse et de l'hyperbole, fait remarquer que le lieu de M est une ligne du second degré, lorsque *m* décrit une droite quelconque. La méthode qu'il a donnée dans le cas où *m* se meut sur la seconde base *rs*, et où les deux bases sont situées de manière qu'on ait $Rs = Sr$, est fondée sur le théorème d'Ivory, et conduit à un mode de génération

(*) Voir le *Journal de Crelle*, 2e cahier, t. LXXIII. Un travail analogue de M. Hermès a paru dans le 3e cahier du même tome.

analogue des surfaces du second degré. Cette méthode est résumée dans ce qui suit.

L'équation d'une ellipse étant

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

on considère une seconde ellipse ayant les mêmes foyers F et F', et dont l'équation est

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}=1,$$

u étant moindre que b^2.

Un point R de la première courbe a pour coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, en supposant $\alpha^2+\beta^2=1$. Les coordonnées d'un point r de la deuxième sont $\alpha\sqrt{a^2-u}$, $\beta\sqrt{b^2-u}$; R et r sont appelés *points correspondants* (*).

En remplaçant α, β par α', β', on a deux autres points correspondants S, s, et, par suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}s^2-\mathrm{S}r^2 = {} & (a\alpha-\alpha'\sqrt{a^2-u})^2+(b\beta-\beta'\sqrt{b^2-u})^2\\ & -(a\alpha'-\alpha\sqrt{a^2-u})^2-(b\beta'-\beta\sqrt{b^2-u})^2\\ & = u(\alpha^2+\beta^2-\alpha'^2-\beta'^2)=0;\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{R}s=\mathrm{S}r.$$

C'est le théorème d'Ivory, démontré dans le cas de l'ellipse.

Cette propriété a lieu quelle que soit la valeur de $u<b^2$. Dans le cas limite où $u=b^2$, les ordonnées des points r, s sont nulles; leurs abscisses sont αc, $\alpha' c$, et, comme α^2 et α'^2 sont moindres que 1, ces points sont sur

(*) Ces deux points sont sur une hyperbole qui a les mêmes foyers que les ellipses (1) et (2), et dont l'équation $\frac{x^2}{\alpha^2 c^2}-\frac{y^2}{\beta^2 c^2}=1$ se déduit de (2) en y remplaçant u par $a^2-\alpha^2 c^2=b^2+\beta^2 c^2$.

le grand axe *entre* les deux foyers F et F'. Il en est de même pour tous les points de cet axe *correspondants* des points de l'ellipse.

On peut remarquer que, pour $u = b^2$, l'équation (2) donne $y = 0$ et $x^2 < c^2$, puisque la quantité indéterminée $\frac{y^2}{b^2 - u}$ est positive : elle représente ainsi l'*ellipse limite* FF'.

Si l'on suppose fixes les points R, S de l'ellipse donnée et les points correspondants r, s de l'axe des x, et si M est un point quelconque de la courbe correspondant à un point m de l'axe, comme on a

$$\text{M}r = \text{R}m \quad \text{et} \quad \text{M}s = \text{S}m,$$

M *est le point de rencontre de deux circonférences dont les centres sont* r *et* s *et les rayons* Rm *et* Sm.

Quand R et S sont les deux sommets A et A' du grand axe, r et s sont les foyers F et F'; donc MF $=$ Am, MF' $=$ A'm, et par suite MF $+$ MF' $=$ AA'.

Les calculs relatifs à l'hyperbole se déduisent des précédents en changeant b^2 en $-b^2$, β^2 en $-\beta^2$, etc., et en supposant $u > -b^2$. Il en résulte la même propriété des points correspondants et la même construction d'un point de l'hyperbole, avec cette différence que les points r, s, m, etc., pour $u = -b^2$, sont sur la portion indéfinie de l'axe des x *extérieure* à FF'.

Dans le cas de la parabole, on démontre le théorème d'Ivory en observant que deux points correspondants de deux paraboles homofocales dirigées dans le même sens s'obtiennent en coupant les deux courbes par une troisième parabole ayant le même foyer et le même axe, mais dirigée en sens contraire. Le calcul se fait en prenant le foyer pour origine des coordonnées, et il en résulte l'égalité Rs $=$ Sr.

Si l'on suppose nul le paramètre de la seconde parabole, elle se confond avec l'axe des x, dont chaque point au delà du foyer F est le correspondant d'un point de la parabole donnée, et l'on a ainsi, comme dans l'ellipse et l'hyperbole,

$$\mathrm{M}r = \mathrm{R}m, \quad \mathrm{M}s = \mathrm{S}m.$$

Ces propriétés des courbes du second degré se déduisent facilement de la méthode élémentaire qui sert à les construire.

A et A' étant les sommets de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, et r un point de cet axe, on sait que le point R de la courbe s'obtient par les conditions $\mathrm{RF} = \mathrm{A}r$, $\mathrm{RF}' = \mathrm{A}'r$. s étant un deuxième point de l'axe correspondant au point S, on a aussi

$$\mathrm{SF} = \mathrm{A}s, \quad \mathrm{SF}' = \mathrm{A}'s.$$

Or, si x' et x'' désignent les abscisses de R et de S, on a

$$\mathrm{RF} = \pm\left(a + \frac{cx'}{a}\right), \quad \mathrm{SF} = \pm\left(a + \frac{cx''}{a}\right);$$

donc, O étant le centre de la courbe,

$$\mathrm{O}r = \pm\frac{cx'}{a}, \quad \mathrm{O}s = \pm\frac{cx''}{a}.$$

De ces valeurs on déduit

$$\mathrm{R}s = \mathrm{S}r,$$

en tenant compte de l'équation de la courbe.

Dans la parabole, l'origine étant au sommet A, on a

$$\mathrm{RF} = \mathrm{A}r = x' + \frac{p}{2}, \quad \mathrm{SF} = \mathrm{A}s = x'' + \frac{p}{2},$$

d'où résulte aussi

$$\mathrm{R}s = \mathrm{S}r.$$

On a donc, dans les trois cas,

$$Mr = Rm, \quad Ms = Sm.$$

R′S′ étant la projection de RS sur la ligne rs, on a, d'après les abscisses des extrémités de ces droites :

1° Dans l'ellipse

$$rs < R'S';$$

2° Dans l'hyperbole

$$rs > R'S';$$

3° Dans la parabole

$$rs = R'S'.$$

On peut déterminer le centre et les quantités a, b, $2p$, au moyen des coordonnées des points R, S, r, s; on a d'ailleurs

$$RF - SF = rs \quad \text{ou} \quad RF + SF = rs,$$

d'où résulte une construction simple des foyers F et F′, un de ces points étant à l'infini quand $rs = R'S'$.

Les deux foyers se confondent, et l'on a deux droites concourantes : 1° quand $RS = rs$; 2° quand Rr et Ss font des angles égaux avec rs. Ils sont à l'infini, et l'on a deux droites parallèles quand $rs = RS = R'S'$. Enfin, si RS est perpendiculaire à rs en O, avec la condition $Or^2 - OR^2 = Os^2 - OS^2$, on a la droite ORS dont tous les points sont des foyers.

En prenant pour axe des x la ligne rs, et en désignant par x', y' les coordonnées de R, par x'', y'' celles de S et par x_1, x_2 les abscisses de r et de s, l'équation du lieu de M est

$$y^2 = (\lambda^2 - 1)(x - x')^2 - 2(\lambda + 1)(x' - x_1)(x - x') + y'^2 = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{x_1 - x^2}{x' - x''}.$$

La courbe est une ellipse quand $\lambda^2 < 1$, une hyperbole quand $\lambda^2 > 1$, et une parabole si $\lambda = 1$.

On a deux droites concourantes lorsque

$$(\lambda^2 - 1)y'^2 = (\lambda + 1)^2(x' - x_1)^2,$$

d'où résulte, en supposant l'origine au point de rencontre de RS et de rs, l'égalité

$$(x'x_2 - x''x_1)(x'x_2 + x''x_1 - 2x'x'') = 0,$$

qui exprime les conditions géométriques indiquées.

L'équation représente deux droites parallèles quand $\lambda = 1$ avec $x' = x_1$, ou quand $\lambda = -1$; dans ce dernier cas,

$$\frac{x' + x_1}{2} = \frac{x'' + x_2}{2},$$

ce qu'on voit aussi par la Géométrie.

Enfin, pour $x' = x''$, λ est infini, et l'équation donne

$$(x - x')^2 = 0.$$

En résumé, deux longueurs RS, rs étant situées de manière que $Rs = Sr$, si l'on joint R et S à un point m de rs, le point M déterminé par les conditions $Mr = Rm$, $Ms = Sm$ est sur une ligne du second degré, et, si R'S' est la projection de RS sur la ligne rs, le lieu est :

1° Une ellipse quand $R'S' > rs$ (un cercle si $rs = 0$);

2° Une hyperbole lorsque $R'S' < rs$;

3° Une parabole si $R'S' = rs$;

4° Deux droites concourantes quand $RS = rs$, ou quand $\widehat{Rrs} = \widehat{Ssr}$;

5° Deux droites parallèles si $RS = rs = R'S'$;

6° Une droite quand RS est perpendiculaire à rs.

Surfaces du second degré.

Le changement que Jacobi a introduit dans la définition de l'ellipse et de l'hyperbole l'a conduit au théorème suivant :

Étant donnés deux triangles RST, *rst*, *si l'on construit sur ce dernier comme base une pyramide triangulaire* *rst*M, *dont les trois arêtes* *r*M, *s*M, *t*M *sont respectivement égales à trois longueurs* R*m*, S*m*, T*m*, *le lieu de* M *est une surface du second degré, quand le volume de la pyramide* RST*m* *est nul, c'est-à-dire quand* *m* *est dans le plan* RST.

Le lieu, comme le calcul le montre, est du second degré, lorsque m se meut dans un plan quelconque. Le théorème se démontre par une méthode analogue à celle qu'on a vue pour les lignes du second degré, dans le cas où m est dans le plan rst, et où les triangles RST, rst sont situés de manière qu'on ait

$$\mathrm{R}s = \mathrm{S}r, \quad \mathrm{R}t = \mathrm{T}r, \quad \mathrm{S}t = \mathrm{T}s.$$

Ellipsoïde. — L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

où l'on suppose $a^2 > b^2 > c^2$, on considère un second ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1, \tag{2}$$

où $u < c^2$. Ces deux ellipsoïdes sont homofocaux.

Un point R du premier a pour coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, en supposant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Les quantités

$\alpha\sqrt{a^2-u}$, $\beta\sqrt{b^2-u}$, $\gamma\sqrt{c^2-u}$ sont les coordonnées du point *correspondant* r de la seconde surface (*).

Si l'on remplace α, β, γ par α', β', γ', on a deux autres points correspondants S, s. On a, par suite,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}s^2 - \mathrm{S}r^2 = \; & (a\alpha - \alpha'\sqrt{a^2-u})^2 + (b\beta - \beta'\sqrt{b^2-u})^2 \\ & + (c\gamma - \gamma'\sqrt{c^2-u})^2 - (a\alpha' - \alpha\sqrt{a^2-u})^2 \\ & - (b\beta' - \beta\sqrt{b^2-u})^2 - (c\gamma' - \gamma\sqrt{c^2-u})^2 = 0; \end{aligned}$$

donc $\mathrm{R}s = \mathrm{S}r$. Le théorème d'Ivory est ainsi démontré.

Cette égalité a lieu quelle que soit la valeur de $u < c^2$. Pour le cas limite où $u = c^2$, l'équation (2) donne $z = 0$, et, à cause de l'indétermination de la quantité positive $\dfrac{z^2}{c^2-u}$, elle représente un *ellipsoïde limite* dont tous les points sont dans le plan des xy et intérieurs à la courbe qui a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1.$$

On voit d'ailleurs que l'x et l'y du point r qui, par l'hypothèse $u = c^2$, sont devenus $\alpha\sqrt{a^2-c^2}$, $\beta\sqrt{b^2-c^2}$, donnent, par leur substitution dans le premier membre de (3), la quantité $\alpha^2+\beta^2$ ou $1-\gamma^2$ qui est plus petite que le second membre. La même vérification se fera pour s. La courbe (3) est la *focale* de la surface dans le plan des xy : elle a les mêmes foyers que l'ellipse principale de

(*) On obtient l'équation d'un hyperboloïde à une nappe et celle d'un hyperboloïde à deux nappes, passant par R et r, en substituant successivement à u dans l'équation (2) les racines de l'équation

$$u^2 - u[a^2+b^2-\alpha^2(a^2-c^2)-\beta^2(b^2-c^2)] + a^2b^2 - \alpha^2b^2(a^2-c^2) - \beta^2a^2(b^2-c^2) = 0,$$

une des racines étant comprise entre b^2 et c^2, et l'autre entre a^2 et b^2.

ce plan

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soient T et M deux autres points de l'ellipsoïde donné, ayant pour correspondants dans le plan des xy les points t, m situés comme r et s dans l'intérieur de la courbe (3); on aura les égalités

$$Rt = Tr, \quad St = Ts, \quad Mr = Rm, \quad Ms = Sm, \quad Mt = Tm.$$

En supposant fixes les points R, S, T de la surface et leurs correspondants r, s, t, il résulte des trois dernières égalités qu'*un point quelconque* M *de l'ellipsoïde est l'intersection de trois sphères dont les centres sont* r, s, t *et dont les rayons sont les distances des points* R, S, T *à un point* m *pris dans l'intérieur de la focale.*

Lorsque les points R, S, T sont sur la section principale du plan des xy, r, s, t sont sur la focale. Les triangles rst, RST sont alors dans le même plan et inscrits dans les deux ellipses homofocales (3) et (4), de manière que leurs sommets soient respectivement des points correspondants des deux courbes. On peut de cette manière construire par points un ellipsoïde dont on connaît les trois axes.

Quand $b = a$, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, les coniques (3) et (4) sont des circonférences concentriques de rayons $\sqrt{a^2 - c^2}$ et a. Les coordonnées de R étant $a\alpha$, $a\beta$, et celles de r, $\alpha\sqrt{a^2 - c^2}$, $\beta\sqrt{a^2 - c^2}$, la ligne Rr passe par le centre; il en est de même des lignes Ss et Tt. Les triangles RST, rst, inscrits dans les deux courbes, ont leurs côtés parallèles.

Lorsque $b = c$, l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe. L'équation (3) donne alors $y = 0$; par suite, les points r, s, t, m, etc. sont sur l'axe des x, et les trois sphères se coupent suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

Les quantités $\mathrm{RS}^2 - rs^2$, $\mathrm{RT}^2 - rt^2$, $\mathrm{ST}^2 - st^2$ sont positives; de plus, dans le cas où R, S, T sont sur la courbe (4), on peut remplacer dans les expressions de ces quantités α et β par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, etc. On verra alors qu'une quelconque des longueurs $\sqrt{\mathrm{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\mathrm{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\mathrm{ST}^2 - st^2}$ est plus petite que la somme des deux autres, c'est-à-dire que ces trois lignes sont les côtés d'un triangle. Jac bi a établi cette propriété caractéristique de l'ellipsoïde par des considérations de Statique.

La méthode précédente appliquée aux autres surfaces à centre donne les résultats suivants :

Hyperboloïde à une nappe. — Un point M de cette surface peut être construit de deux manières :

1° R, S, T étant sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, r, s, t sont les points correspondants de l'*ellipse focale*

$$\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1,$$

et le point m correspondant à M est *extérieur* à la focale.

La surface est de révolution quand les deux coniques sont des circonférences de rayons a et $\sqrt{a^2 + c^2}$.

Les quantités $\mathrm{RS}^2 - rs^2$, $\mathrm{RT}^2 - rt^2$, $\mathrm{ST}^2 - st^2$ sont négatives.

2° R, S, T étant trois points de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, r, s, t sont les points correspondants de l'*hyperbole focale* $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1$, et le point m correspondant à M est encore *extérieur* à la focale.

Quand $b = a$, la dernière équation donne

$$x = 0;$$

r, s, t, m, etc. sont alors sur l'axe des z, et les trois sphères se coupent suivant un parallèle de la surface de révolution.

Les expressions simplifiées des quantités $\sqrt{\mathrm{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\mathrm{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\mathrm{ST}^2 - st^2}$ montrent que ces quantités sont imaginaires ou que deux sont réelles et la troisième imaginaire.

Hyperboloïde à deux nappes. — Trois points R, S, T de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, et les points correspondants r, s, t de l'*hyperbole focale* $\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = -1$ déterminent le point M de la surface, le point correspondant m étant à l'*intérieur* de la focale (*).

Quand $b = a$, les points r, s, t, m sont sur l'axe des z, et la construction donne un parallèle de la surface de révolution.

Le calcul des quantités $\sqrt{\mathrm{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\mathrm{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\mathrm{ST}^2 - st^2}$ fait voir que deux de ces quantités sont imaginaires, et la troisième réelle, ou bien qu'elles sont

---

(*) On peut construire le point M d'une autre manière. R, S, T, étant trois points de la surface à une distance $h > c$ du plan des xy, ont pour projections les points R′, S′, T′ de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$. Soient r, s, t les points correspondants de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$; le point M est l'intersection de trois sphères ayant r, s, t pour centres, et dont les rayons sont les trois longueurs $\sqrt{h^2 + \mathrm{R}'m^2}$, $\sqrt{h^2 + \mathrm{S}'m^2}$, $\sqrt{h^2 + \mathrm{T}'m^2}$, m étant un point quelconque du plan des xy.

Cette construction s'applique à l'ellipsoïde, à l'hyperboloïde à une nappe et au cône, en modifiant convenablement les seconds membres des équations des deux ellipses, et la situation du point m dans le plan des xy.

toutes les trois réelles, mais que la plus grande est supérieure à la somme des deux autres.

Cône. — Soit O le sommet; les deux points R, S étant sur la génératrice $y = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, les points correspondants r, s sont sur la *ligne focale*

$$y = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{z}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0,$$

de manière que $Or = OR$ et $Os = OS$; le troisième point T est sur la génératrice $y = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, et le point t sur la *ligne focale* $y = 0$, $\frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$, à la distance $Ot = OT$; le point m qui correspond au point M de la surface est situé entre les deux lignes focales.

Quand $c = 0$, le cône est de révolution, les deux lignes focales se confondent avec l'axe des z, et les points r, s, t, m sont sur cette droite.

Dans le cône $RS^2 - rs^2 = 0$, $RT^2 - rt^2$ et $ST^2 - st^2$ sont des quantités positives ou négatives.

Cylindres. — La construction est analogue à celle du cône. R, S étant sur la génératrice $y = 0$, $x = -a$, r, s sont sur la focale $y = 0$, $x = -c$ et à la même distance du plan des xy; T est sur la droite $y = 0$, $x = a$ et t, à la même hauteur, sur $y = 0$, $x = c$.

Dans le cylindre elliptique, m est entre les deux *lignes focales* $x = \pm c$, et, dans le cylindre hyperbolique, il est dans la portion indéfinie du plan des xz, en dehors de ces deux droites.

D'après la position des points fixes, on a

$$RS^2 - rs^2 = 0 \quad \text{et} \quad RT^2 - rt^2 = ST^2 - st^2 = \pm b^2.$$

Le cylindre parabolique $y^2 = 2px$ étant considéré comme la limite d'un cylindre elliptique, et les lignes ARS, Frs étant fixes, T et t s'éloignent indéfiniment, et la sphère décrite de t comme centre, avec Tm pour rayon, a pour limite un plan parallèle au plan tangent au sommet A, dont il est éloigné d'une quantité égale à l'abscisse de m diminuée de AF.

Paraboloïdes. — Pour démontrer le théorème d'Ivory dans le cas des paraboloïdes homofocaux, on met l'équation de ces surfaces sous la forme

$$(h) \qquad \frac{y^2}{h+l} + \frac{z^2}{h-l} = 2x + h,$$

en prenant pour origine le point milieu de la distance des foyers FF', et en posant

$$p - p' = 2l, \quad p + p' = 2h.$$

l est supposé positif, et, suivant les valeurs de h, on a des paraboloïdes elliptiques dirigés dans un sens ou dans l'autre, et des paraboloïdes hyperboliques.

Soit $h > l$; si l'on coupe le paraboloïde (h) par un paraboloïde dirigé en sens contraire, ayant pour équation

$$(\alpha) \qquad \frac{y^2}{\alpha - l} + \frac{z^2}{\alpha + l} = -2x + \alpha, \quad \text{où} \quad \alpha > l,$$

la projection de l'intersection sur le plan des xz a pour équation

$$\frac{y^2}{(h+l)(\alpha-l)} + \frac{z^2}{(h-l)(\alpha+l)} = 1;$$

donc x', y', z' désignant les coordonnées d'un point R commun aux deux surfaces, on peut poser

$$y'^2 = \mu(h+l)(\alpha-l), \quad z'^2 = \nu(h-l)(\alpha+l),$$

μ et ν étant positifs et remplissant la condition $\mu + \nu = 1$. On a, par suite,

$$x' = \frac{\alpha - h}{2} - \frac{l}{2}(2\mu - 1).$$

Si l'on remplace h par h', on a les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point r commun aux deux surfaces (h') et (α); on a ainsi

$$y_1^2 = \mu(h' + l)(\alpha - l), \quad z_1^2 = \nu(h' - l)(\alpha + l),$$
$$x_1 = \frac{\alpha - h'}{2} - \frac{l}{2}(2\mu - 1).$$

R et r sont deux points correspondants des deux paraboloïdes (h) et (h').

On a deux autres points correspondants S, s, en changeant α, μ, ν en α', μ', ν'.

Des coordonnées de ces points résulte l'égalité

$$\mathrm{R}s^2 - \mathrm{S}r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}s = \mathrm{S}r.$$

Si l'on fait $h' = l$, le second paraboloïde se confond avec la partie du plan des xy comprise dans l'*intérieur* de la courbe $\frac{y^2}{2l} = 2x + l$, qui est la *focale* du paraboloïde (h) dans le plan des xy. Les coordonnées de r deviennent

$$x_1 = \frac{\alpha}{2} - \mu l, \quad y_1 = \sqrt{2\mu l(\alpha - l)}, \quad z_1 = 0.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de la focale montre que r est *intérieur* à cette courbe : il en est de même de tous les points du plan des xy correspondants des points du paraboloïde (h).

R, S, T étant trois points fixes de la surface, et r, s, t les points correspondants du plan des xy, un point quelconque M est déterminé par les conditions

$$Mr = Rm, \quad Ms = Sm, \quad Mt = Tm,$$

m étant un point pris à l'intérieur de la focale.

Si R, S, T sont sur la parabole principale du plan des xy, r, s, t sont sur la focale, et les deux triangles sont inscrits dans ces deux coniques homofocales, de manière que leurs sommets soient des points correspondants : on peut ainsi construire un paraboloïde dont on connaît les paramètres $2p$ et $2p'$.

Le paraboloïde est de révolution si $l = 0$; la focale devient $y^2 = 0$, et les points r, s, t, m sont sur l'axe de la courbe.

Il est facile de vérifier que les quantités $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$ sont réelles et que la plus grande est égale à la somme des deux autres.

Les résultats relatifs au paraboloïde hyperbolique se déduisent des précédents en changeant ν en $-\nu$, et en supposant h compris entre $-l$ et $+l$. Les points du plan des xy correspondants des points de la surface sont extérieurs à la focale, dont les points r, s, t correspondent à trois points fixes de la parabole principale.

Les quantités $\sqrt{RS^2 - rs^2}$, $\sqrt{RT^2 - rt^2}$, $\sqrt{ST^2 - st^2}$ sont imaginaires, et l'une d'entre elles est égale à la somme des deux autres.

D'après les considérations qui précèdent, on a ce théorème :

Deux triangles RST, *rst sont inscrits dans deux lignes du second degré homofocales, de manière que* $Rs = Sr$, $Rt = Tr$, $St = Ts$; *si l'on joint* R, S, T *à un point* m *du plan, le point d'intersection de trois sphères ayant* r, s, t *pour centres et* Rm, Sm, Tm *pour rayons est sur* *une surface du second degré* (*), *et si l'on forme les quantités* $\sqrt{\text{RS}^2 - rs^2}$, $\sqrt{\text{RT}^2 - rt^2}$, $\sqrt{\text{ST}^2 - st^2}$, *le lieu est :*

1° *Un ellipsoïde, quand les trois quantités sont réelles et peuvent être les trois côtés d'un triangle ;*

2° *Un hyperboloïde à une nappe, lorsqu'elles sont imaginaires ou que deux sont réelles et la troisième imaginaire ;*

3° *Un hyperboloïde à deux nappes, si deux des quantités sont imaginaires et la troisième réelle, ou si, étant réelles toutes les trois, la plus grande est supérieure à la somme des deux autres ;*

4° *Un paraboloïde elliptique, si elles sont réelles et si l'une d'elles est égale à la somme des deux autres ;*

5° *Un paraboloïde hyperbolique, si elles sont imaginaires et si l'on a la même égalité ;*

6° *Un cône, quand l'une d'elles est nulle, les deux autres étant réelles ou imaginaires ;*

(*) On a une construction analogue quand les deux triangles ne sont pas dans le même plan ; dans ce cas, on peut avoir un système de deux plans.

Soient OA, OA′ les traces de deux plans donnés sur le plan des xy perpendiculaire à leur intersection, et $x'\text{O}x$ la trace d'un plan bissecteur pris pour plan des xz. Un point R du système étant projeté en R′, on porte sur $\text{O}x'$ ou sur $\text{O}x$, suivant la position du point, la longueur $\text{O}r' = \text{OR}'$, et l'on élève la perpendiculaire $r'r = \text{R}'\text{R}$; r est le point correspondant de R ; on aura de même s et t correspondants de S et de T. Au moyen des deux triangles ainsi obtenus, on pourra construire un point quelconque de l'un ou l'autre plan.

On aura un seul plan quand OA et OA′ se confondront avec la perpendiculaire à $\text{O}x$.

Si les deux plans sont parallèles, on peut prendre pour point correspondant de R sa projection R′ sur le plan de symétrie. On peut aussi considérer un point quelconque r de ce dernier plan comme correspondant de R, et, pour avoir s et t, on joint les projections S′, T′ au point O milieu de $\text{R}'r$, et l'on prolonge des quantités $\text{O}s = \text{OS}'$ et $\text{O}t = \text{OT}'$.

7° *Un cylindre, quand l'une d'elles est nulle et les deux autres égales ;*

8° *Une surface de révolution : 1° quand les deux coniques sont des circonférences concentriques, les triangles inscrits ayant leurs côtés parallèles ; 2° lorsque les trois points r, s, t sont sur l'axe de la ligne du second degré qui contient les points* R, S, T.

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS ;

PAR M. CH.-PH. CAHEN.

Steiner a énoncé (sans démonstration) un certain nombre de propriétés de l'*hypocycloïde à trois rebroussements*.

Cette courbe est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule intérieurement, sans glisser, sur la circonférence d'un cercle de rayon triple.

Une démonstration de ces propriétés a été publiée par M. Cremona dans le *Journal de Crelle* (année 1865, p. 101).

On trouve dans le Mémoire de M. Cremona (p. 106, § 11) une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est présentée sous une forme un peu différente dans les *Nouvelles Annales* du mois de janvier 1869 (question 898).

Je rappelle ici la solution de cette question 898, et je vais montrer tout le parti qu'on peut en tirer pour démontrer par la Géométrie les propriétés démontrées par M. Cremona d'une autre manière.

Enfin j'appliquerai cette même méthode à la démonstration de la question 868 proposée dans les *Nouvelles Annales* du mois de mai 1868.

I. On donne un cercle C (*fig.* 1) tangent à une droite D en O. D'un point M de la circonférence on mène MA perpendiculaire à D, et l'on prend AB = AO. On joint BM et l'on demande l'enveloppe de la droite BM quand le point M se déplace sur la circonférence. L'enveloppe cherchée admet trois axes de symétrie et trois points de rebroussement remarquables (question 898).

Fig. 1.

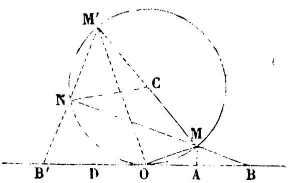
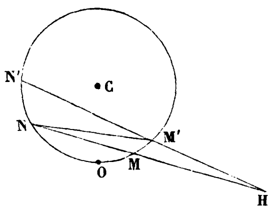


Fig. 2.



Remarquons d'abord que l'arc OM qui mesure l'angle en O du triangle isoscèle MOB est moitié de l'arc ON qui mesure l'angle M extérieur à ce triangle, ce qui montre que la question proposée revient à la propriété suivante énoncée par M. Cremona (*Journal de Crelle*, p. 106) :

Deux rayons CM, CN du cercle C tournent simultanément autour du point C, en sens opposé et avec la condition que leurs vitesses angulaires aient le rapport 1 : 2; trouver l'enveloppe de la corde MN (*).

Si l'on considère deux de ces cordes MN et M'N' (*fig.* 2) se coupant en H, le triangle M'NH, qui a deux angles égaux, est isoscèle, et par suite, lorsque les cordes MN, M'N' se rapprochent jusqu'à se confondre, on aura à la limite MN = MH.

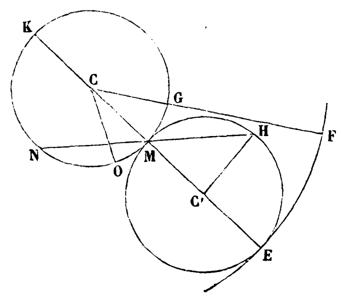
Cela résulte de ce que l'arc NN' est double de l'arc MM'.

(*) Voir *Crelle*, p. 117, § 33.

On est donc ramené à chercher le lieu du point H tel que $MH = MN$, l'arc ON étant double de l'arc OM.

Pour cela, il suffira de mener un cercle touchant en M (*fig.* 3) le cercle donné C et passant par le point H, de

Fig. 3.



prolonger le rayon CM en E où il rencontre cette seconde circonférence. Si, de C comme centre, on décrit l'arc EF qui sous-tend un angle $\widehat{OCF}$ tel que l'on ait $\widehat{OCG} = 60^\circ$, on aura $ECF = 60^\circ - \widehat{OCM}$.

D'autre part, l'arc EH = arc NK $= \frac{\pi}{2} - 3(OM)$; donc angle $3\,\widehat{ECF} = \widehat{ECH}$ et arc EF = arc EH.

Il résulte de là que, si l'on fait rouler sur le cercle CF le cercle C′ qui le touche primitivement en F, ce point F du cercle C′ viendra en H quand le contact des deux cercles se fera en E.

Le lieu du point H est donc l'hypocycloïde.

II. *Remarque*. — En se reportant à la *fig.* 2, on voit que, étant donnée une droite fixe coupant le cercle C aux points M et N, si une droite mobile qui coupe le cercle aux points M′ et N′ se déplace de manière qu'on ait constamment arc NN′ = 2 arc MM′, la droite M′N′ enveloppera une hypocycloïde qu'elle touche au point H tel que M′H = M′N′.

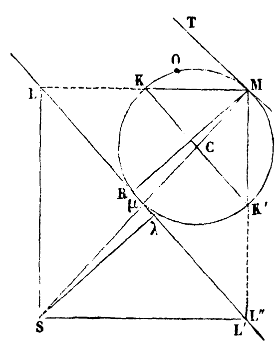
III. *Lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde* (*).

Reportons-nous à la *fig.* 1.

Soit M′B′ la tangente à l'hypocycloïde qui passe par le point M′ diamétralement opposé à M; les angles M′OB′, MOB étant complémentaires, les angles M′B′O, MBO respectivement égaux aux précédents le seront aussi: donc les tangentes MB, M′B′ à l'hypocycloïde sont perpendiculaires et se coupent sur la circonférence C qui est le lieu cherché.

IV. *Du point* M *situé sur le cercle* C (*fig.* 4), *on peut*

Fig. 4.



mener à l'hypocycloïde trois tangentes dont deux sont rectangulaires.

Soit MR celle de ces tangentes qui fait avec les deux autres des angles aigus, MT une tangente au

(*) *Crelle*, p. 103, § 6.

cercle C; si MK est bissectrice de l'angle $\widehat{RMT}$, comme arc OR = 2 arc OM, il en résulte arc OM = 2 arc OK, donc MK est une tangente à l'hypocycloïde; donc :

Si, par un point du cercle C, *on mène une tangente au cercle et trois tangentes à l'hypocycloïde, deux de ces tangentes sont les bissectrices des angles formés par la troisième et la tangente au cercle.*

V. Arc MK = arc KR (*fig.* 4) : donc MR est perpendiculaire à KC (*).

Il résulte de là que, MK, MK', MR étant trois tangentes menées par un point du cercle C à l'hypocycloïde, la parallèle RL à KK' touche l'hypocycloïde, parce que l'angle R est droit et que le cercle C est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

En prenant $\mu\lambda = \mu R$, on a le point de contact λ de cette tangente, et comme KL = KM, que K'L' = K'M, les points L, L' sont les points de contact des tangentes KL, K'L'.

Ainsi :

VI. *La droite* LL', *qui joint les points de contact* L, L' *de deux tangentes rectangulaires, est tangente à la courbe* (**).

VII. *La longueur* LL' *est constante et égale à quatre fois le rayon du cercle* C.

Réciproque du théorème VI :

VIII. *Les tangentes à l'hypocycloïde aux points* L, L', *où une tangente à cette courbe la rencontre, sont rectangulaires.*

(*) *Crelle*, p. 103, § 9.

(**) *Crelle*, p. 106, § 12.

Menons la tangente LM en L (*fig.* 4) à l'hypocycloïde et la tangente ML″ perpendiculaire à ML ; la droite LL″ est tangente à l'hypocycloïde d'après le théorème VI, et comme, par un point L pris sur la courbe, on ne peut mener que deux tangentes LM et LL′, LL″ se confond avec LL′, et le point L″ avec le point L′, car LL″ = LL′.

IX. Si l'on achève le rectangle LML′S dont la diagonale MS passe par les points C et μ milieux des droites KK′, LL′, on a le théorème suivant :

Le lieu des intersections S *des normales rectangulaires est une circonférence qui* **a** C *pour centre et pour rayon* 3CM.

X. *Développée.* — Les trois normales SL, SL′, Sλ enveloppent évidemment une hypocycloïde inversement homothétique (le point C étant le centre d'homothétie) de celle qu'enveloppent leurs homologues MK, MK′, MR, c'est-à-dire que :

La développée de l'hypocycloïde est une hypocycloïde inversement homothétique à la première (C *est le centre d'homothétie*) ; *le rapport d'homothétie est* $\frac{1}{3}$.

Reportons-nous à la *fig.* 4, nous verrons que la parabole qui a S pour foyer et qui touche les droites ML, ML′ a pour tangente au sommet la droite LL′ qui passe par les pieds L et L′ des perpendiculaires abaissées du foyer S sur les tangentes ML, ML′ ; par suite, cette parabole a son sommet au point λ, où LL′ touche l'hypocycloïde.

Il résulte de là que :

XI. *Cette parabole enveloppe l'hypocycloïde elle-même ;*

XII. *Son axe enveloppe la développée de l'hypocycloïde ;*

XIII. *Son sommet* λ *décrit l'hypocycloïde;*

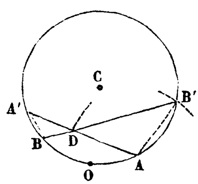
XIV. *Son foyer* S *décrit le cercle qui passe par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde;*

Enfin :

XV. *Sa directrice est la parallèle menée par le point* M *à* LL′, et, comme cette parallèle est symétrique de LL′ par rapport au point C, *elle enveloppe une hypocycloïde symétrique par rapport au point* C *de celle qu'enveloppe* LL′.

XVI. Considérons deux tangentes AA′, BB′ (*fig.* 5) à l'hypocycloïde.

Fig. 5.



Soit arc OA $= \alpha$, et par suite arc OA′ $= 2\alpha$; de même OB $= \beta$ et OB′ $= 2\beta$. L'angle $\widehat{ADB'}$ a pour mesure

$$\text{arc}\,\frac{AB' + BA'}{2} = \text{arc}\,\frac{2\beta - \alpha + 2\alpha - \beta}{2} = \text{arc}\,\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

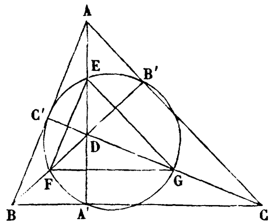
Les angles B′ et A′ ont aussi chacun pour mesure arc $\frac{\alpha+\beta}{2}$; donc *les triangles* DAB′, DBA′ *sont isoscèles.*

XVII. On voit par là que :

Étant donnée une tangente AA′ à l'hypocycloïde et un point D sur cette tangente, pour mener par D une seconde tangente, il suffit de décrire du point A (le plus rapproché de O des deux points A, A′) un arc de cercle de rayon AD qui coupe le cercle C au point B′; joignant B′D, on a une tangente BD à l'hypocycloïde.

XVIII. Soit AA′ (*fig.* 6) une tangente menée à l'hypocycloïde par un point arbitraire D.

Fig. 6.



Du point E où AA′ coupe le cercle C comme centre, décrivons avec ED comme rayon une circonférence qui coupe la circonférence C aux points B′ et C′; d'après ce qui a été dit (XVII), B′D et C′D seront des tangentes menées par le point D à l'hypocycloïde.

Ces deux tangentes coupent encore le cercle C en F et en G.

En se reportant au théorème XVI, on voit que les triangles FDA′, GDA′ sont isoscèles; donc FG est perpendiculaire au milieu de A′D; de même EF est perpendiculaire au milieu de C′D, et EG est perpendiculaire au milieu de B′D.

Il résulte de là que les parallèles menées aux côtés du triangle EFG respectivement par les points A′, B′, C′ forment un triangle ABC homothétique à EFG, le point d'intersection D des hauteurs du triangle EFG étant le centre d'homothétie, et, par suite, le triangle ABC a pour hauteurs celles du triangle EFG qui, comme on sait, touchent l'hypocycloïde.

Si, maintenant, on se reporte à la *fig.* 1, on voit que

MN étant une tangente à l'hypocycloïde, si l'on a

$$2 \operatorname{arc} OM = \operatorname{arc} ON,$$

c'est par le point N que passe la tangente perpendiculaire à MN.

Si, d'un autre côté, nous nous reportons à la *fig.* 5, nous verrons que, si l'on a $2 \operatorname{arc} OA = \operatorname{arc} OA'$, c'est du point A comme centre qu'on a décrit la circonférence qui sert à déterminer une nouvelle tangente BB'.

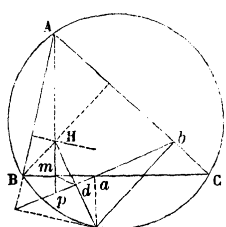
Comme, dans le problème actuel (*fig.* 6), nous avons décrit le cercle du point E comme centre, c'est la droite BC qui sera une tangente à l'hypocycloïde; il en sera de même de AB et de AC.

Donc :

Si trois tangentes à l'hypocycloïde passent par un même point, les tangentes perpendiculaires respectivement à celles-là forment un triangle dont les trois premières tangentes sont les hauteurs.

XIX. *D'un point quelconque* F *du cercle circonscrit au triangle* ABC, *abaissons des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle. On sait que les pieds de ces*

Fig. 7.



perpendiculaires sont en ligne droite; trouver l'enveloppe de cette droite (question 868) (*).

(*) Voir *Crelle*, p. 110, § 19, et *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 73, la solution de M. P. Serret.

La droite ab (*fig.* 7) qui joint les pieds des perpendiculaires est tangente au sommet d'une parabole inscrite au triangle ABC. Cette parabole a le point F pour foyer, et sa dircetrice passe par le point de concours H des hauteurs.

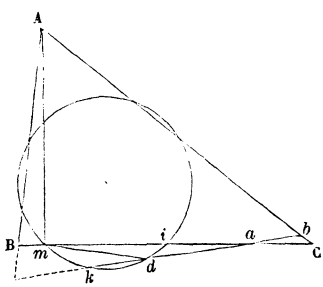
La droite HF rencontre ab en d, et le point d est le milieu de HC; donc les triangles dpH et daF sont égaux et $da = dp$.

Il résulte de là que le triangle dam est isoscèle.

Comme d'ailleurs le cercle des neuf points du triangle ABC passe par les milieux de HA, HB, HC, il passera aussi par le milieu d de HF.

On voit par là que ABC (*fig.* 8) étant le triangle donné, m le pied de la hauteur Am, ad une des droites

Fig. 8.



dont on cherche l'enveloppe et qui rencontre en a le côté BC et en d le cercle des neuf points, le triangle adm est isoscèle. Or l'angle m de ce triangle a pour mesure $\frac{\text{arc}\, di}{2}$, *α* l'angle en a a pour mesure $\frac{\text{arc}(mk - di)}{2}$; donc arc $mk = 2$ arc di, donc la droite ab enveloppe une hypocycloïde circonscrite au cercle des neuf points et touchant les trois côtés et les trois hauteurs du triangle donné, ce qu'on pouvait prévoir en prenant le point F à un sommet ou au point diamétralement opposé à un sommet de ce triangle.

On voit aussi que l'hypocycloïde est l'enveloppe des tangentes au sommet des paraboles inscrites à un triangle (*).

DISCUSSION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION EN λ;

PAR M. A. PICART.

Soient

$$(1)\quad S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$(2)\quad S' = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations de deux coniques;

$$(3)\qquad S - \lambda S' = 0$$

l'équation générale des coniques qui passent par leurs points d'intersection.

En exprimant que cette dernière équation représente deux droites, on obtient la condition

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A - \lambda A' & B - \lambda B' & D - \lambda D' \\ B - \lambda B' & C - \lambda C' & E - \lambda E' \\ D - \lambda D' & E - \lambda E' & F - \lambda F' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation en λ.

Pour qu'à une valeur réelle de λ corresponde un système de sécantes communes réelles, il faut que cette valeur de λ rende positive la quantité

$$(B - \lambda B')^2 - (A - \lambda A')(C - \lambda C'),$$

que nous appellerons Δ, ou bien l'annule en rendant

(*) *Crelle*, p. 110, § 20.

positive la quantité

$$(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(F - \lambda F'),$$

que nous désignerons par Δ_1.

Or l'équation (4) peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(F - \lambda F')[(A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2] \\ &\quad - (A - \lambda A')(E - \lambda E')^2 - (C - \lambda C')(D - \lambda D')^2 \\ &\qquad + 2(B - \lambda B')(D - \lambda D')(E - \lambda E') = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord $A'C' - B'^2 > 0$; l'équation du second degré

$$(6)\qquad (A - \lambda A')(C - \lambda C') - (B - \lambda B')^2 = 0,$$

dont le terme en λ^2 a pour coefficient $A'C' - B'^2$, a ses racines réelles; car, pour $\lambda = \infty$, son premier membre est positif, et, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$ ou $\frac{C'}{C}$, il est négatif. Nous excluons le cas où l'on aurait $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, parce qu'alors on voit immédiatement que, pour $\lambda = \frac{A}{A'}$, l'équation (3) représente deux droites réelles dont une à l'infini. Désignons par α et β ces deux racines; si $\frac{A}{A'} < \frac{C}{C'}$, l'une est plus petite que $\frac{A}{A'}$, l'autre plus grande que $\frac{C}{C'}$; soit $\alpha < \frac{A}{A'}$, $\beta > \frac{C}{C'}$. Substituons successivement α et β à la place de λ dans le premier membre de l'équation (5), ce premier membre devient, pour $\lambda = \alpha$,

$$\begin{aligned} &- (A - \alpha A')(E - \alpha E')^2 - (C - \alpha C')(D - \alpha D')^2 \\ &\quad + 2(E - \alpha E')(D - \alpha D')\sqrt{(A - \alpha A')(C - \alpha C')}; \end{aligned}$$

mais

$$\alpha < \frac{A}{A'} < \frac{C}{C'};$$

d'où l'on tire, puisqu'on peut toujours supposer $A' > 0$, par suite $C' > 0$, en vertu de l'hypothèse $A'C' - B'^2 > 0$,

$$A - \alpha A' > 0, \quad C - \alpha C' > 0;$$

donc le résultat de la substitution est

$$-\left[(E - \alpha E')\sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D')\sqrt{C - \alpha C'}\right]^2,$$

c'est-à-dire négatif.

Pour $\lambda = \beta$, le résultat de la substitution est, puisque $\beta > \frac{C}{C'} > \frac{A}{A'}$, et, par suite, $A - \beta A' < 0$, $C - \beta C' < 0$,

$$+\left[(E - \beta E')\sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D')\sqrt{\beta C' - C}\right]^2,$$

c'est-à-dire positif. Donc l'équation (5) a une ou trois racines réelles comprises entre α et β. Soit λ' l'une de ces racines; cette valeur, mise à la place de λ dans le premier membre de l'équation (6), le rend négatif, puisqu'elle est comprise entre ses deux racines; donc, pour $\lambda = \lambda'$, la quantité Δ est positive.

Considérons en second lieu le cas où

$$A'C' - B'^2 < 0.$$

Les racines de l'équation (6) peuvent être réelles ou imaginaires. Supposons-les d'abord réelles; soient α et β ces deux racines : elles sont toutes deux ou $< \frac{A}{A'}$, ou comprises entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$, ou $> \frac{C}{C'}$. Si on les substitue à la place de λ dans le premier membre de l'équation (5), comme $A - \alpha A'$ et $C - \alpha C'$ sont de même signe, ainsi que $A - \beta A'$ et $C - \beta C'$, puisque leur produit est positif, on obtient ou

$$-\left[(E - \alpha E')\sqrt{A - \alpha A'} - (D - \alpha D')\sqrt{C - \alpha C'}\right]^2,$$
$$-\left[(E - \beta E')\sqrt{A - \beta A'} - (D - \beta D')\sqrt{C - \beta C'}\right]^2,$$

ou

$$+\left[(E-\alpha E')\sqrt{\alpha A'-A}+(D-\alpha D')\sqrt{\alpha C'-C}\right]^2,$$
$$+\left[(E-\beta E')\sqrt{\beta A'-A}+(D-\beta D')\sqrt{\beta C'-C}\right]^2,$$

c'est-à-dire toujours deux résultats de même signe. Donc l'équation en λ a une ou trois racines réelles en dehors de l'intervalle compris entre α et β; mais toute valeur de λ non comprise entre α et β fait prendre au premier membre de l'équation (6) le signe —; donc, encore dans ce cas, il y a au moins une racine de l'équation en λ qui rend positive la quantité Δ.

Si nous supposons maintenant les racines de l'équation (6) imaginaires, son premier membre prend toujours le signe — pour toute valeur de λ; par conséquent, toutes les racines réelles de l'équation en λ rendront positive la quantité Δ.

Il nous reste encore à faire voir que, quand l'une des racines réelles de l'équation en λ annule Δ, s'il n'y en a pas d'autre qui rende Δ positif, elle rend positive ou nulle la quantité Δ_1, c'est-à-dire que, pour cette valeur de λ, l'équation (3) représente deux droites réelles parallèles distinctes ou une droite double réelle. En effet, l'équation en λ peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(B-\lambda B')(E-\lambda E')-(C-\lambda C')(D-\lambda D')^2\\&\quad-[(B-\lambda B')^2-(A-\lambda A')(C-\lambda C')]\\&\quad\times[(E-\lambda E')^2-(C-\lambda C')(F-\lambda F')]=0,\end{aligned}$$

ce qui montre que Δ et Δ_1, quand ils ne sont pas nuls, sont de même signe. Or, si la racine réelle λ' qui rend généralement Δ positif l'annule, on peut supposer que les coefficients A, A', B, B', C, C',... soient altérés de quantités infiniment petites qui ne feront que modifier infiniment peu les deux courbes; la racine λ' deviendra

$\lambda' + \delta\lambda'$; elle cessera d'annuler la quantité Δ pour la rendre positive; par suite, elle rendra positive la quantité Δ_1; mais la nouvelle valeur de Δ_1 diffère infiniment peu de la première; donc celle-ci était positive pour $\lambda = \lambda'$, à moins qu'elle ne fût nulle en même temps que Δ.

Sans vouloir entrer dans le détail des cas particuliers, il nous faut pourtant examiner encore spécialement le cas où $A'C' - B'^2 = 0$.

Alors l'équation (6) se réduit à

$$(6') \qquad (2BB' - AC' - CA')\lambda + AC - B^2 = 0;$$

l'une de ses racines est infinie. Désignons l'autre par β. si $2BB' - AC' - CA' > 0$, cette racine est plus grande que $\frac{C'}{C}$, et, si $2BB' - AC' - CA' < 0$, elle est plus petite que $\frac{A}{A'}$. En effet, dans le premier cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} > \frac{C}{C'};$$

car, si l'on chasse les dénominateurs, cette inégalité devient, en tenant compte de l'hypothèse $A'C' - B'^2 = 0$,

$$(B\sqrt{C'} - C\sqrt{A'})^2 > 0;$$

dans le second cas, on a bien

$$\frac{B^2 - AC}{2BB' - AC' - CA'} < \frac{A}{A'};$$

car, après avoir chassé les dénominateurs, on obtient

$$(B\sqrt{A'} - A\sqrt{C'})^2 > 0.$$

Mais, dans le premier cas, si l'on substitue β à λ dans l'équation (5), son premier membre devient

$$+\left[(E - \beta E')\sqrt{\beta A' - A} + (D - \beta D')\sqrt{\beta C' - C}\right]^2,$$

c'est-à-dire positif; dans le second, il devient

$$-\left[(E-\beta E')\sqrt{A-\beta A'}-(D-\beta D')\sqrt{C-\beta C'}\right]^2,$$

c'est-à-dire négatif. D'ailleurs, si l'on substitue $+\infty$ à λ, on trouve le signe du discriminant

$$A'E'^2+C'D'^2-2B'D'E'+F(B'^2-A'C'),$$

qui se réduit ici à

$$A'E'^2+C'D'^2-2B'DE'$$

ou

$$(E'\sqrt{A'}-D'\sqrt{C'})^2,$$

c'est à-dire le signe $+$. Donc l'équation en λ a une ou trois racines réelles inférieures à β dans le premier cas, et supérieures à β dans le second; mais, dans le premier cas, tout nombre inférieur à β, mis à la place de λ, rend le premier membre de l'équation ($6'$) négatif; dans le second, la même chose a lieu pour tout nombre supérieur à β; donc il y a au moins une racine réelle de l'équation en λ qui rend positive la quantité Δ, réduite ici à

$$-(2BB'-AC'-CA')\lambda-AC+B^2.$$

Si, en même temps que

$$A'C'-B'^2=0,$$

on a

$$2BB'-AC'-CA'=0,$$

on en tire

$$B^2=\frac{(AC'+CA')^2}{4B'^2}=\frac{(AC'+CA')^2}{4A'C'}=\frac{AC}{2}+\frac{A^2C'^2+C^2A'^2}{4A'C'}.$$

Or

$$\frac{A^2C'^2+C^2A'^2}{4A'C'}>\frac{AC}{2},$$

car cette inégalité revient à

$$(AC'-CA')^2>0;$$

donc $B^2 - AC$ est positif : la quantité Δ est alors constante et positive.

SUR LA SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS ;

PAR M. H. LAURENT.

Je rappelle d'abord un théorème bien connu : le polynôme du second degré X, homogène en x_1, x_2, x_3,..., x_n peut être décomposé en une somme de n carrés positifs, négatifs ou nuls, et cela, du reste, d'une infinité de manières, ainsi que le prouve la méthode des coefficients indéterminés. Ce que nous voulons prouver, c'est que, de quelque manière que s'effectue la décomposition, le nombre des carrés positifs, négatifs ou nuls, sera toujours le même.

Le théorème est évident pour le cas d'une et deux variables. En effet, un polynôme homogène à deux variables ne saurait être à la fois une somme et une différence de carrés ; car ses racines seraient à la fois imaginaires et réelles, ce qui est absurde. Il ne saurait non plus être une somme de carrés positifs et une somme de carrés négatifs : ainsi le théorème est établi pour le cas de deux variables. La discussion des courbes du second degré, celle des surfaces du second ordre prouvent qu'il a lieu encore pour les cas de trois et quatre variables.

Admettons qu'il ait lieu pour le cas de n variables. Considérons ensuite un polynôme P quelconque homogène et du second degré à $n+1$ variables, x_1, x_2, . . ., x_{n+1} ; supposons-le susceptible des deux décompositions

$$P = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1} X_{n+1}^2,$$
$$P = \beta_1 Y_1^2 + \beta_2 Y_2^2 + \ldots + \beta_{n+1} Y_{n+1}^2,$$

X et Y désignant des fonctions linéaires, et α, β l'un des nombres -1, 0, $+1$. On aura

$$(1)\quad \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_{n+1} X_{n+1}^2 = \beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_{n+1} Y_{n+1}^2.$$

1° Observons que l'une des quantités α est de même signe que l'une des quantités β; car si tous les α, par exemple, étaient positifs et tous les β négatifs, le premier membre de (1) serait positif, et le second négatif, ce qui est inadmissible.

2° Si nous supposons $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, on pourra poser

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \quad \text{ou} \quad X_{n+1} - Y_{n+1} = 0,$$

et l'on pourra en conclure x_{n+1}, par exemple, en fonction linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à moins que l'on n'ait identiquement $X_{n+1} = Y_{n+1}$; mais, même dans ce cas, on pourrait choisir pour x_{n+1} une fonction linéaire arbitraire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La formule (1), quand on y remplace x_{n+1} par sa valeur, prend la forme

$$(2)\quad \alpha_1 X_1'^2 + \alpha_2 X_2'^2 + \ldots + \alpha_n X_n'^2 = \beta_1 Y_1'^2 + \beta_2 Y_2'^2 + \ldots + \beta_n Y_n'^2,$$

X' et Y' désignant les valeurs de X et Y exprimées en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cette formule (2) est identique comme la formule (1); car x_{n+1} seul, qui n'y entre plus, cesse d'être arbitraire.

Or, par hypothèse, une identité telle que (2) ne saurait avoir lieu entre n variables, si elle ne contient pas le même nombre de carrés positifs, négatifs ou nuls dans ses deux membres. Donc, etc.

Cela posé, considérons le polynôme du second degré en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} (t-\alpha_1)(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \ldots + \alpha_1^{n-1} x_{n-1})^2 \\ + (t-\alpha_2)(x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_2^{n-1} x_{n-1})^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (t-\alpha_n)(x_0 + \alpha_n x_1 + \alpha_n^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^{n-1} x_{n-1})^2 \end{array}\right.$$

tout décomposé en carrés, dans lequel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les n racines de l'équation à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

et t une indéterminée; désignons ce polynôme par $\varphi(t)$. Je dis que le nombre des carrés positifs dans lesquels on peut le décomposer est égal au nombre des racines réelles moindres que t. Cela est évident quand toutes les racines sont réelles; mais, quand il y en a d'imaginaires, la formule (3) semble compliquée d'imaginaires, et l'on ne voit pas aussi bien les choses.

Supposons α_1 imaginaire; soit α_2 la racine conjuguée; les deux premières lignes de la formule (3) seront des expressions conjuguées : leur somme sera donc réelle. Il est facile de voir qu'elle est la différence de deux carrés. En effet, posant

$$t - \alpha_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}, \quad t - \alpha_2 = \mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1},$$
$$x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1},$$
$$x_0 + \alpha_2 x_1 + \ldots = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

la somme des deux premières lignes de (3) sera

$$\begin{gathered}(\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1})(\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 + 2\mathrm{PQ}\sqrt{-1}) \\ + (\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1})(\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 - 2\mathrm{PQ}\sqrt{-1})\end{gathered}$$

ou

$$2\mathrm{A}(\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2) - 4\mathrm{BPQ},$$

c'est-à-dire

$$2\mathrm{A}\left(\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 - \frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\mathrm{PQ}\right) = 2\mathrm{A}\left[\left(\mathrm{P} - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\mathrm{Q}\right)^2 - \mathrm{Q}^2\left(1 + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)\right].$$

Ainsi, dans le cas où les racines ne sont pas toutes réelles, le nombre des carrés positifs, c, sera égal au nombre i de couples de racines imaginaires, augmenté du nombre n des racines réelles inférieures à t. Soit n' le nombre des racines réelles inférieures à t', et c' le nombre des carrés positifs dans $\varphi(t')$; on aura

$$n + i = c, \quad n' + i = c',$$

d'où l'on conclut

$$n - n' = c - c'.$$

Ainsi le nombre des racines réelles comprises entre t et t' est la différence du nombre des carrés positifs dans lesquels on peut décomposer $\varphi(t)$ et $\varphi(t')$.

Reste à montrer comment on formera la fonction symétrique $\varphi(t)$ des racines de $f = 0$.

Posons

$$(t - z)(x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_{n-1} z^{n-1})^2 = F(z);$$

le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans $\frac{F(z) f'(z)}{f(z)}$ sera précisément

$$F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots \quad \text{ou} \quad \varphi(t).$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition, très-connue d'ailleurs.

Le théorème précédent, analogue à celui que M. Hermite a fait connaître pour remplacer le théorème de Sturm, est d'une application beaucoup plus facile que ce dernier, une simple division suffisant à faire connaître le résultat.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, t. Ier. — *Nouvelle Géométrie analytique, ou extension des méthodes de la Géométrie de Descartes à l'étude des lieux qui peuvent être représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.*

M. Maximilien Marie se propose de développer, dans un seul Ouvrage, une série de travaux déjà publiés par lui à diverses époques, mais que le lecteur ne saurait pas toujours se procurer facilement.

Le premier volume de cet Ouvrage vient de paraître : il contient le développement d'un nouveau système de Géométrie analytique, qui a surtout pour but l'interprétation des solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables. Dans ce système de Géométrie, une seule et même équation ne représente pas seulement une courbe réelle, mais une infinité d'autres courbes réelles, que l'on appelle les *conjuguées* de celle-ci, et qui ont une grande analogie de propriétés avec elle.

Sans entrer ici dans de grands détails, nous allons donner une idée de la théorie de M. Marie.

Considérons l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

et soit $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ une solution de cette équation ; nous la représenterons par le point dont les coordonnées réelles seraient

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + \beta, \\ y' &= \alpha' + \beta'. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on établit entre β et β' une relation $\beta' = \beta c$, c désignant une constante, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \alpha + \beta, \\ y' = \alpha' + \beta c. \end{cases}$$

Or α, β, α' étant liés entre eux par les deux équations dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

les équations (1) donneront x' et y' en fonction d'un seul des paramètres α, β, α'. Le lieu des points x', y', pour une valeur donnée de c, est ce que l'on appelle la *conjuguée* c du lieu $f(x, y) = 0$; c en est la caractéristique. La caractéristique de chaque conjuguée dépend du choix des axes, mais non la figure ni la position de cette conjuguée.

M. Marie montre que la quantité c est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre les abscisses x de la conjuguée c réelles.

Les conjuguées d'un lieu du premier degré à coefficients imaginaires sont des droites issues d'un même point.

Les conjuguées d'une ellipse sont les hyperboles ayant les mêmes diamètres conjugués que cette ellipse et touchant cette ellipse.

Lorsque l'on considère deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, les courbes réelles représentées par ces deux équations seront tangentes. Il en est de même des conjuguées de ces courbes réelles qui passent au point (x, y), lorsque ce point est imaginaire.

Si l'on remplace en particulier l'équation $\varphi = 0$ par

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

la droite représentée par cette équation sera tangente à $f = 0$, et si le point x, y est imaginaire, la conjuguée de cette droite qui y passera sera tangente à la conjuguée de même caractéristique de la courbe $f = 0$.

L'enveloppe des conjuguées d'une courbe donnée par l'équation $f(x, y) = 0$ comprend évidemment la courbe réelle représentée par cette équation ; mais cette courbe n'est pas la seule enveloppe des conjuguées en question. M. Marie trouve la seconde partie de l'enveloppe en exprimant que $\dfrac{dy}{dx}$ est réel; l'enveloppe imaginaire des conjuguées jouit de plusieurs propriétés intéressantes que nous ne pouvons pas énoncer dans un aperçu nécessairement succinct.

M. Marie étudie successivement la théorie des asymptotes, des centres et des diamètres, etc., dans les courbes et leurs conjuguées, et presque toujours les conjuguées semblent en quelque sorte compléter la courbe réelle; les propriétés des conjuguées rappellent celles des hyperboles tangentes à une même ellipse et possédant les mêmes diamètres conjugués.

Le Chapitre XI du livre de M. Marie est une introduction à la théorie de la courbure des lignes, on y étudie le lieu

$$(x-a-a'\sqrt{-1})^2+(y-b-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

et ses conjuguées; l'enveloppe de ces conjuguées est un cercle. La théorie de la courbure des lignes planes est étudiée dans le Chapitre suivant; on y remarque le théorème suivant :

La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'une courbe est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée de cette courbe.

Le Chapitre XIV est consacré à l'étude des points singuliers des courbes planes.

Le Chapitre XV traite de la quadrature des courbes planes et de leurs conjuguées. En appelant θ l'angle des axes, la notation suivante, où les limites x_0, y_0 et x_1, y_1 se rapportent à deux points d'une même conjuguée,

$$\sin\theta\int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} y\,dx,$$

représente, par sa partie imaginaire, l'aire comprise entre la conjuguée et le diamètre correspondant à ses cordes réelles, et, par sa partie réelle, l'aire comprise entre le diamètre, l'axe des x et les deux ordonnées extrêmes.

Parmi les résultats trouvés par M. Marie, on remarque le suivant :

L'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées est fourni par la même intégrale que l'arc de l'enveloppe réelle ou de la courbe proposée.

Nous bornons à ces considérations le compte rendu de l'Ouvrage de M. Marie; mais nous ajouterons, pour en donner une idée et inspirer au lecteur le désir d'en faire la lecture, que l'auteur étend toutes les considérations dont nous venons de parler à la Géométrie dans l'espace.

Ainsi, à toute surface on peut adjoindre une infinité de surfaces conjuguées dont l'étude est aussi simple que celle des conjuguées des courbes planes. H. LAURENT.

Histoire des Mathématiques depuis leur origine jusqu'au commencement du XIX^e *siècle*, par M. F. HOEFER, 1874. — Paris, Hachette. Un vol. de 600 pages, avec 42 figures dans le texte. Prix : 4 francs.

Le livre que nous annonçons fait partie de la collection intitulée *Histoire universelle*, publiée sous la direction de M. V. Duruy. On doit déjà à M. Hœfer une série d'ouvrages relatifs à l'histoire des sciences physiques, astronomiques et naturelles. L'*Histoire des Mathématiques* forme le complément de cette série importante.

L'auteur de cet Ouvrage a suivi dans ce travail une méthode excellente qui établit les quatre grandes périodes principales de l'évolution de la science :

1° Invention des nombres, des chiffres et des premiers éléments de l'Arithmétique et de la Géométrie.

C'est à ces seules notions, à part quelques faits particuliers, que se bornèrent les connaissances des peuples de l'Orient, Indous, Égyptiens, Chinois, etc.

2° Écoles grecques fondées par Thalès, Démocrite et Anaxagore, Pythagore et Platon. Écoles d'Alexandrie, fondées par Euclide, puis par Ptolémée.

Ces diverses Écoles poussèrent les sciences mathématiques fort loin, mais ne réussirent pas à dégager de loi générale.

3° Période de transition : développement de l'Algèbre pendant le moyen âge.

4° Temps modernes : invention et usage du Calcul infinitésimal, des séries et des fonctions.

L'Histoire générale des Mathématiques a toujours offert un grand intérêt. Elle a démontré combien ont été pénibles les efforts de l'esprit humain à dégager la vérité, à créer les méthodes de raisonnement et d'investigation, à généraliser les résultats en possession desquels il s'est trouvé peu à peu.

Le progrès dans ce genre de recherches a éprouvé des fluctuations bien singulières, liées intimement à l'histoire des peuples qui ont constitué la grande famille de l'humanité. En dehors des Grecs, par exemple, quel peuple nous a légué une plus abondante moisson de vérités mathématiques? C'est à ce peuple, à l'esprit si net, à l'intelligence si vive, que la science moderne est redevable de toutes ses méthodes les plus délicates. Les Arabes, dont on a vanté l'habileté, n'ont pas, à beaucoup près, contribué autant que les Grecs au progrès des Mathématiques. Ils ont eu principalement la gloire d'avoir traduit et commenté leurs ouvrages, mais les véritables géomètres arabes sont en bien petit nombre, et leur passage a été de bien courte durée.

Ces diverses particularités, M. Hœfer les a très-bien signalées dans les livres III et IV, dont l'importance n'échappera pas au lecteur. Il nous suffirait de mentionner ici les savants grecs qui ont attaché leur nom à divers théorèmes d'Analyse et de Géométrie bien connus; mais ce détail nous mènerait trop loin et nous forcerait à paraphraser l'exposé de l'auteur.

L'histoire des Mathématiques chez les Grecs est précédée de considérations sur les origines des Mathématiques, formant le Livre Ier de l'Ouvrage, et du Livre II consacré aux Mathématiques dans l'antiquité.

Le Livre V renferme l'historique de la période de transformation, qui embrasse tout le moyen âge, dont elle a gardé l'empreinte caractéristique. L'esprit humain, à cette époque, se livra aux combinaisons compliquées à plaisir. L'idée simple devait éprouver la plus grande difficulté à se dégager; des considérations astrologiques et mystiques servirent à envelopper la science, dont elles retardèrent longtemps encore le développement. Nous les retrouvons pour la dernière fois au XVIe siècle : elles ont servi de base aux immortels travaux de Kepler. Enfin cette même époque vit éclore aussi ces vaines recherches auxquelles donna lieu la quadrature du cercle, dont l'histoire a fait l'objet de nombreux développements dans le grand Ouvrage de Montucla, et dans un livre spécial que publia ce même auteur en 1754.

Le Livre VI et dernier est consacré à l'historique succinct des progrès des Mathématiques pendant les XVI^e^, XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. La question de l'origine et de la priorité du Calcul infinitésimal est soigneusement élucidée; l'auteur a dû, malheureusement, réduire son exposé aux faits les plus essentiels; il lui a fallu se renfermer dans les modestes limites d'un traité élémentaire, et qui, pour être spécial, exigerait plusieurs gros volumes, à en juger déjà d'après les recherches de Montucla et de de la Lande, qui s'arrêtent aussi au XIX^e^ siècle, tandis que, depuis, de nouvelles méthodes ont été créées, qui ont produit les résultats les plus inattendus.

L'esprit de méthode et la concision dans l'exposé recommandent cet Ouvrage à toutes les personnes qui s'intéressent au progrès des Mathématiques. Les élèves des classes de Mathématiques spéciales, les candidats à la licence et à l'agrégation y trouveront des éléments utiles à leurs recherches et à leurs travaux; enfin ce livre sera lu aussi par les personnes qui n'ont pas fait des Mathématiques élevées l'objet de leurs études, l'auteur ayant écarté soigneusement les théories arides et les formules compliquées.

L'histoire complète des Mathématiques exigerait bien d'autres développements. Elle devrait comprendre la biographie des mathématiciens, le détail de leur correspondance avec les géomètres de leur temps, l'exposé de leurs méthodes et la critique de leurs ouvrages. Pour l'étude de plus d'une question, il faudrait consulter de nombreux documents, reproduire les originaux les plus importants, interpréter même les passages obscurs et difficiles. Tel n'a pas été le programme du travail de M. Hœfer. Il a été obligé de le restreindre à des proportions plus modestes, qui le rendent ainsi accessible à un plus grand nombre de lecteurs.

De nos jours où la science a été mise, pour ainsi dire, à la portée de tous, un ouvrage élémentaire, un exposé succinct, répond à un besoin réel et suffit grandement à combler une lacune. Tel est le cas de cet Ouvrage, qu'il faudra consulter lorsqu'on écrira l'histoire complète des Mathématiques, pour faire suite au grand Traité de Montucla, achevé et publié par de la Lande, et à l'Histoire de l'Astronomie par Delambre et par Bailly, ouvrages précieux par les exposés lucides et les documents originaux qu'ils renferment en si grand nombre.

L'*Histoire des Mathématiques* de M. Hœfer s'arrête, avons-nous dit, au commencement de notre siècle. Depuis cette époque, l'Analyse et la Géométrie se sont enrichies de méthodes et de théories toutes nouvelles, dont le principe date de nos jours. En Analyse, la théorie des fonctions elliptiques, les méthodes d'intégration; en Géométrie analytique, les coordonnées curvilignes, les propriétés des courbes gauches; en Géométrie, la théorie des surfaces, le principe de correspondance et ses nombreuses applications dans la voie féconde ouverte par M. Chasles et suivie par les géomètres contemporains : tels sont les principaux résultats acquis à la science depuis ces derniers temps.

Les progrès de la Géométrie et de l'Analyse en France ont fait l'objet de rapports présentés par M. Chasles et par M. Bertrand. Mais l'exposé historique des progrès accomplis à la fois en France et à l'étranger nécessitera de longues et savantes recherches, qui exigeront, de la part de celui qui les entreprendra, une connaissance approfondie des théories modernes, afin qu'il puisse établir, entre des méthodes si variées, la coordination qui existe entre elles, et qui représente le caractère philosophique de cette histoire des progrès de l'esprit humain.

H. Brocard.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. J. de la Gournerie. — Le numéro de novembre 1874 des *Nouvelles Annales* contient une Note très-intéressante de M. Haton de la

Goupillière, sur l'enveloppe d'une droite dont deux points décrivent des lignes rectangulaires.

Cette enveloppe est une variété d'une courbe que j'ai étudiée sous le nom de *trilatérale harmonique,* et dont j'ai fait connaître diverses propriétés en la considérant soit isolément, soit dans ses relations avec certaines surfaces symétriques par rapport aux plans et aux sommets d'un tétraèdre.

Il ne me serait pas possible de reproduire en quelques lignes les théorèmes assez nombreux auxquels je fais allusion. Je désire seulement ajouter cette indication à l'énumération que M. Haton de la Goupillière a faite des résultats obtenus par divers géomètres sur la cubocycloïde.

QUESTION.

1155. On donne la parabole semi-cubique

$$(1) \qquad x^3 - 3ay^2 = 0;$$

d'un point quelconque du plan on peut mener trois tangentes à la courbe; désignons par (C) le cercle qui passe par les trois points de contact. Chercher :

1° Le lieu des points P pour lesquels le cercle (C) a un rayon constant;

2° Le lieu des points P pour lesquels le centre du cercle (C) est constamment sur la courbe (1);

3° Le lieu des points P pour lesquels le cercle (C) touche la courbe (1).

Résoudre les mêmes questions pour le cas de la parabole cubique

$$(2) \qquad x^3 - 3ay = 0.$$

(L. Painvin.)

SUR LES QUADRATURES;

PAR M. C. POSSE,
Privat-docent à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Les propriétés connues des fractions continues algébriques permettent d'obtenir sur-le-champ une formule générale pour l'évaluation approximative des intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

et dont la formule célèbre de Gauss n'est qu'un cas particulier. En faisant des hypothèses particulières sur la forme de la fonction donnée $f(x)$, on tombe, dans le cas de $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, sur la formule connue

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{n}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)] + \ldots$$

ou

$$(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Cette formule, déjà démontrée de diverses manières (*), occupe un rang tout particulier parmi les autres formules du même genre : d'un côté, elle appartient à celles que donne la théorie des fractions continues avec le degré d'approximation qui leur est propre ; d'un autre, elle est une formule des quadratures à *coefficients égaux* (**).

(*) *Voir* M. CH. HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 452 ; M. MEHLER, *Journal de Crelle*, t. 63, p. 152.

(**) Voir *Sur les Quadratures*, par M. P. TCHEBICHEFF (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVIII).

Je démontre qu'elle est la seule jouissant de cette double propriété, en me proposant de résoudre directement la question suivante :

Trouver la forme de la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)dx = k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)]$$
$$+ a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

k étant indépendant de la forme de $\varphi(x)$, et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots.$$

En faisant $\varphi(x) = \dfrac{1}{z-x}$, intégrant les deux membres de l'égalité précédente par rapport à z, et passant ensuite des logarithmes aux nombres, on aperçoit immédiatement que la question proposée est équivalente à cette autre :

Trouver la fonction $f(x)$, positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, pour laquelle

$$e^{\int_{-1}^{+1} f(x)\lg(z-x)dx} = F(z) + \frac{\varepsilon}{z^n} + \frac{\varepsilon'}{z^{n+1}} + \ldots,$$

$F(z)$ désignant une fonction entière de degré n.

D'autres cas particuliers, qu'on trouve développés dans cette Note, m'ont paru dignes d'attention, à cause de leur simplicité et de la facilité avec laquelle on les déduit de la formule générale.

1. La fonction $f(x)$ restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, on sait que le développement

en fraction continue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

peut être mis sous la forme

$$\cfrac{k}{z+a+\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_2+\ldots}}},$$

tous les quotients incomplets étant linéaires par rapport à z.

Désignant par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite du rang $n^{ième}$, nous aurons

$$(1)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{z-x} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \frac{\varepsilon'}{z^{2n+2}} + \ldots.$$

Soit

$$Q_n = C(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

C étant une constante et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités réelles, inégales et comprises entre les limites -1 et $+1$; nous obtiendrons

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)}\,\frac{1}{z-x_i}\right].$$

Posant $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2n} z^{2n} + \ldots$, multipliant les deux membres de la formule (1) par $\varphi(z)$ et égalant de part et d'autre les coefficients de $\frac{1}{z}$, nous aurons la formule générale des quadratures

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)}\,\varphi(x_i) + \Delta,$$

où Δ est de la forme $a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots$ et s'annule, par conséquent, chaque fois que $\varphi(x)$ est une fonction entière d'un degré inférieur à $2n$.

Remarquant que

$$\mathrm{P}_n(x_i) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\,dx}{x - x_i}$$

et dénotant par A_i le coefficient $\dfrac{\mathrm{P}_n(x_i)}{\mathrm{Q}_n(x_i)}$, nous aurons

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{\mathrm{Q}'_n(x_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\,dx}{x - x_i}, \tag{2}$$

et la formule précédente prend la forme

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i\,\varphi(x_i) + \Delta. \tag{3}$$

La formule de Gauss correspond au cas de $f(x) = 1$.

2. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z - x)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\pi}{z + (\sqrt{z^2 - 1} - z)}$$
$$= \cfrac{\pi}{z - \cfrac{1}{2z + (\sqrt{z^2 - 1} - z)}},$$

d'où le développement suivant :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z - x)\sqrt{1 - x^2}} = \cfrac{\pi}{z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \ldots}}}$$

Les expressions de Q_n et de la racine x_i sont ici

$$Q_n = \cos(n \operatorname{arc}\cos z) = \cos n\varphi, \quad \text{pour } z = \cos\varphi,$$

et

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) = \cos\alpha, \quad \text{pour } \alpha = \frac{2i-1}{2n}\pi.$$

La formule (2) donne

$$A_i = \frac{\sin\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)}{n\sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi\right)} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\alpha}$$

ou, observant que $\cos n\alpha = 0$,

$$A_i = \frac{\sin\alpha}{n\sin n\alpha} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}\, d\varphi.$$

Or, il est aisé de vérifier la relation suivante :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}\sin\alpha = \sin(n\alpha) + 2\cos\varphi\sin(n-1)\alpha + \ldots \\ + 2\cos(n-1)\varphi\sin\alpha, \end{aligned} \right.$$

où le nombre des termes à retenir dans le second membre est égal à n; elle est évidemment vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, et se généralise de la manière ordinaire, en partant de ce que

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

D'après cela, l'expression de A_i devient simplement

$$A_i = \frac{1}{n\sin n\alpha} \int_0^\pi \sin n\alpha\, d\varphi = \frac{\pi}{n}.$$

La formule (3) se réduit donc, dans le cas considéré, à la formule connue

$$(5)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \varphi(x_i) + a_{2n}\,\varepsilon + a_{2n+1}\,\varepsilon' + \ldots$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\,\pi\right).$$

3. On aura deux autres formules très-simples, en posant

$$1^{\circ}\qquad f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

et

$$2^{\circ}\qquad f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

1° Pour $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{z-x} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}+z} = \frac{\pi}{2z-\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2z - \cfrac{1}{\sqrt{z^2-1}+z}},$$

d'où le développement

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{z-x} = \cfrac{\pi}{2z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \ldots}}}$$

Posant $z = \cos\varphi$, on aura, comme il est aisé de voir,

$$Q_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}, \quad x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) = \cos\alpha.$$

L'expression de A_i devient alors

$$A_i = -\frac{\sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)}{(n+1)\cos i\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi \sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\alpha}$$

ou, observant que $\sin(n+1)\alpha = 0$,

$$A_i = -\frac{\sin^2\alpha}{(n+1)\cos(n+1)\alpha}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi\sin\varphi - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}\, d\varphi.$$

Or

$$\sin(n+1)\varphi\sin\varphi - \sin(n+1)\alpha\sin\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+2)\varphi - \cos(n+2)\alpha]\};$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (4), après de simples réductions,

$$A_i = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right).$$

Ainsi l'on obtient cette formule très-simple

$$(6)\quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i^2)\varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right).$$

2° Pour

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

n a

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{z-x} = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right)$$

$$= \cfrac{2\pi}{2z+1-\cfrac{1}{2z-\cfrac{1}{2z-\ldots}}}$$

Posant $z = \cos\varphi$, on obtient

$$Q_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad x_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) = \cos\alpha.$$

et

$$A_i = -\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha}{(2n+1)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}\int_1^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi-\cos\alpha}.$$

Comme

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) = 0,$$

on peut substituer sous le signe d'intégration, au lieu de

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi,$$

l'expression

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi - \sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+1)\varphi - \cos(n+1)\alpha]\right\},$$

et de là, en vertu de la relation (4), on tire sans difficulté

$$A_i = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right) = \frac{2\pi}{2n+1}\left[1-\cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Donc, dans le cas actuel, la formule (3) se réduit à la suivante :

$$(7)\quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\varphi(x)\,dx = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i)\,\varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right).$$

Les expressions si simples des éléments de ces formules les rendent très-commodes dans les applications.

La formule (5) diffère des autres en ce que l'expression de A_i est indépendante de la racine correspondante x_i; nous allons voir tout de suite qu'elle est la seule qui, jouissant de cette propriété, donne à l'erreur Δ la forme assignée.

4. Pour le faire voir, proposons-nous de résoudre directement la question suivante :

Trouver la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)dx = k\sum_{i=1}^{i=n}\varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

k désignant une quantité indépendante de la forme de $\varphi(x)$, et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n+1} + \ldots.$$

Supposant pour un moment $\varphi(x) = 1$, on aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = nk;$$

désignant la valeur de $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ par C, et introduisant la fonction $f_1(x) = \frac{1}{C}f(x)$, nous réduirons la question proposée à la détermination de $f_1(x)$, remplissant la condition suivante :

$$(8) \quad \int_{-1}^{+1} f_1(x)\,\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots.$$

Mettons pour $\varphi(x)$ la fonction $\frac{1}{z-x}$, et posons

$$F(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

la formule (8) donnera

$$\int_{-1}^{+1} f_1(x)\,\frac{dx}{z-x} = \frac{F'(z)}{nF(z)} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \ldots,$$

d'où il résulte immédiatement que la fraction irréductible $\frac{F'(z)}{nF(z)}$ est la $n^{ième}$ réduite de la fraction continue

$$\cfrac{1}{z + a + \cfrac{1}{\alpha z + \beta + \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 + \ldots}}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x)\,dx}{z-x}.$$

Cherchons donc à déterminer les constantes inconnues $\alpha, a, \beta, \alpha_1, \ldots$, de manière à vérifier la condition identique par rapport à z

$$nP_n = Q'_n,$$

pour toute valeur entière et positive de n, P_n et Q_n désignant, comme plus haut, le numérateur et le dénominateur de la $n^{ième}$ réduite.

Calculant les réduites des trois premiers rangs, nous aurons

$$P_1 = 1,\quad P_2 = \alpha z + \beta,\quad P_3 = (\alpha_1 z + \beta_1)P_2 + P_1,$$
$$Q_1 = z + a,\quad Q_2 = \alpha z^2 + (a\alpha + \beta)z + a\beta + 1,$$
$$Q_3 = (\alpha_1 z + \beta_1)Q_2 + Q_1.$$

La condition $2P_2 = Q'_2$ donne

$$2\alpha z + \beta = 2\alpha z + a\alpha + \beta,$$

d'où

$$\beta = a\alpha$$

et, par suite,

$$P_2 = \alpha(z + a), \quad Q_2 = \alpha z^2 + 2a\alpha z + a^2\alpha + 1,$$
$$P_3 = \alpha\alpha_1 z^2 + \alpha(\beta_1 + a\alpha_1)z + a\alpha\beta_1 + 1,$$

et enfin

$$Q_3 = \alpha\alpha_1 z^3 + \alpha(\beta_1 + 2\alpha\alpha_1)z^2 + (a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1)z + a^2\alpha\beta_1 + a.$$

La condition $3P_3 = Q'_3$ fournit deux équations

$$3(\beta_1 + a\alpha_1) = 2(\beta_1 + 2a\alpha_1), \quad 3(a\alpha\beta_1 + 1) = a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1,$$

d'où

$$\beta_1 = a\alpha_1, \quad \alpha_1 = 2;$$

ainsi l'on aura, en posant $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, les relations

$$P_2 = \alpha(z + a)P_1 + P_0, \quad Q_2 = \alpha(z + a)Q_1 + Q_0,$$
$$P_3 = 2(z + a)P_2 + P_1, \quad Q_3 = 2(z + a)Q_2 + Q_1.$$

Il est facile de voir que, en poursuivant de la même manière, on aura généralement

$$\beta_k = a\alpha_k, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = \alpha,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \qquad \begin{cases} Q_{2m} = 2(z + a)Q_{2m-1} + Q_{2m-2}, \\ Q_{2m+1} = 2(z - a)Q_{2m} + Q_{2m-1}. \end{cases}$$

En effet, ayant

$$Q_n = (\alpha_{n-2}z + \beta_{n-2})Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

et supposant que

$$Q'_{n-1} = (n-1)P_{n-1}, \quad Q'_{n-2} = (n-2)P_{n-2},$$

on aura

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) Q'_{n-1} + Q'_{n-2},$$

ou

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (n-1)(\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + (n-2) P_{n-2}.$$

Pour calculer α_{n-2} et β_{n-2}, on prendra la relation $n P_n = Q'_n$, qui se réduit, en vertu de la précédente, à

$$(10) \qquad \alpha_{n-2} Q_{n-1} = (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + 2 P_{n-2}.$$

Le nombre n étant $\overline{>} 3$, la comparaison des coefficients de z^{n-2} et z^{n-3} dans les deux membres de la relation (10) fournira deux équations, qui ne peuvent être identiques par rapport à α_{n-2} et β_{n-2}, vu que les coefficients de z^{n-2} dans P_{n-1} et de z^{n-3} dans P_{n-2} ne sont pas nuls. Donc les constantes a et α sont les seules qui restent arbitraires.

Il nous reste à montrer que les relations supposées, savoir les formules (9), entraînent comme conséquence nécessaire l'identité $n P_n = Q'_n$, pour toute valeur entière et positive de n.

Ayant vérifié, par ce qui précède, l'exactitude de la formule (11) pour $n = 2$ et $n = 3$, nous la supposerons vraie pour $n = 2m$ et $n = 2m + 1$, et nous allons voir qu'elle le sera aussi pour $n = 2m + 2$ et $n = 2m + 3$.

En effet, en vertu de (9), la formule (10) donne

$$\alpha Q_{2m+1} = \alpha (z + a) P_{2m+1} + 2 P_{2m} = P_{2m+2} + P_{2m},$$
$$2 Q_{2m} = 2 (z + a) P_{2m} + 2 P_{2m-1} = P_{2m+1} + P_{2m-1}.$$

Or

$$Q_{2m+2} = 2 (z + a) Q_{2m+1} + Q_{2m},$$

donc

$$Q'_{2m+2} = \alpha Q_{2m+1} + \alpha (z + a) Q'_{2m+1} + Q'_{2m},$$

ou

$$Q'_{2m+2} = \alpha Q_{2m+1} + \alpha (z+a)(2m+1) P_{2m+1} + 2m P_{2m}$$
$$= (2m+2) P_{2m+2}.$$

Absolument de la même manière, on trouverait

$$Q'_{2m+3} = (2m+3) P_{2m+3}.$$

Ainsi il est démontré que la condition identique (11) n'est vérifiée que pour la fraction continue de la forme

$$u = \cfrac{1}{z+a+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\ldots}}}}}$$

Soit v la fraction périodique

$$\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\ldots}}},$$

on aura

$$v = \cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+v}},$$

d'où

$$v = -(z+a) + \sqrt{(z+a)^2 + \frac{2}{\alpha}}$$

et enfin

$$u = \frac{1}{z+a+v} = \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2 + \frac{2}{\alpha}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$a_1 = -a - \sqrt{\frac{-2}{\alpha}}, \quad a_2 = -a + \sqrt{\frac{-2}{\alpha}},$$

on a

$$u = \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} = \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(a_2-x)(z-x)}}.$$

Donc, si l'on fait

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x)\,dx}{z-x},$$

on conclut nécessairement que

$$a_1 = -1, \quad a_2 = +1,$$

d'où

$$a = 0, \quad \alpha = -2$$

et

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

car autrement on pourrait assigner à z une valeur qui ne rendrait pas infinis simultanément les deux membres de l'égalité précédente.

La forme générale de la fonction cherchée $f(x)$ est donc

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

C étant une constante.

On voit, d'après cela, qu'on ne saurait trouver une formule des quadratures, à coefficients égaux, différente de la formule (5), en assignant à l'erreur Δ la forme

$$a_{2n}\,\varepsilon + a_{2n+1}\,\varepsilon' + \ldots.$$

NOTE SUR LA QUESTION 206

(voir 1re série, t. IX, p. 116);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

Trouver des nombres rationnels qui satisfassent aux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$
$$x^2 + y^2 - 1 = u^2.$$

Si l'on s'en tient à cet énoncé, la solution donnée à l'endroit cité est pleinement suffisante; mais on peut donner à cette question plus d'étendue et demander une méthode qui permette de trouver toutes les solutions rationnelles dont les termes entiers ne dépassent pas une limite assignée. Supposons que les valeurs rationnelles des inconnues réduites au plus petit dénominateur commun soient

$$x = \frac{m}{l}, \quad y = \frac{n}{l}, \quad z = \frac{p}{l}, \quad u = \frac{q}{l};$$

l, m, n, p, q désigneront cinq nombres entiers premiers entre eux. Si l'on multiplie par l^2 les équations proposées et qu'on les combine successivement par addition et par soustraction, on en déduira le système équivalent

$$(1) \qquad 2n^2 = p^2 - q^2,$$
$$(2) \qquad 2(m^2 - l^2) = p^2 + q^2.$$

Soit λ le plus grand diviseur commun des trois nombres n, p, q; l'équation (1) sera résolue de la manière la plus générale par les formules

$$(3) \qquad n = 2\lambda st, \quad p = \lambda(s^2 + 2t^2), \quad q = \lambda(s^2 - 2t^2).$$

L'équation (2) devient ensuite

$$(4)\qquad m^2 - l^2 = \lambda^2(s^4 + 4t^4).$$

Aucun facteur de λ ne peut diviser en même temps les deux nombres m et l, parce qu'alors il serait diviseur commun des cinq nombres l, m, n, p, q, que nous supposons premiers entre eux. D'ailleurs on peut supposer λ pair ou impair. Soit $\lambda = 2MN$ et $s^4 + 4t^4 = PQ$; on résoudra l'équation (4) en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} m + l = 2M^2P, & m - l = 2N^2Q, \\ m = M^2P + N^2Q, & l = M^2P - N^2Q. \end{cases}$$

Dans ce cas, l et m seront de même parité; comme n, p, q sont déjà pairs, il faut que les deux nombres l et m soient impairs.

Soit $\lambda = MN$ impair; on aura

$$m + l = M^2P, \quad m - l = N^2Q,$$

d'où

$$m = \frac{M^2P + N^2Q}{2}, \quad l = \frac{M^2P - N^2Q}{2}.$$

Il faut, dans ce cas, que les deux nombres P et Q soient de même parité. Du reste, les solutions des équations proposées sont données dans les deux cas par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{M^2P + N^2Q}{M^2P - N^2Q}, & y = \dfrac{4MNst}{M^2P - N^2Q}, \\[2ex] z = \dfrac{2MN(s^2 + 2t^2)}{M^2P - N^2Q}, & u = \dfrac{2MN(s^2 - 2t^2)}{M^2P - N^2Q}. \end{cases}$$

Les quatre nombres M, N, s et t ne sont assujettis qu'à la seule condition que les deux nombres M et N soient premiers entre eux, ainsi que les deux nombres s et t. On voit aisément que l'on pourra déduire de ces formules toutes les solutions dans lesquelles le numérateur de y, LMNst ne surpasse pas une limite assignée. Pour chaque système de valeurs des nombres M, N, s, t qui satisfont à cette condition, on décomposera de toutes les manières possibles le nombre (s^4+4t^4) en deux facteurs P et Q, et les formules (6) donneront une solution des équations proposées pour chacune de ces décompositions.

Une partie de ces solutions peut s'exprimer d'une manière générale en fonction des quatre nombres entiers M, N, s, t; il suffit de remplacer dans les équations (6) P et Q par l'un des systèmes de valeurs

$$P = 1, \qquad Q = s^4 + 4t^4,$$
$$P = s^2 + 2t^2 \pm 2st, \quad Q = s^2 + 2t^2 \mp 2st.$$

Les valeurs données par les formules (6) seront entières si les quatre nombres M, N, P, Q vérifient la condition

$$M^2 P - N^2 Q = \pm 1.$$

On pourra prendre arbitrairement les deux nombres s, t; comme la somme $s^4 + 4t^4$ ne peut jamais être un carré, on pourra toujours trouver une infinité de solutions de l'équation

$$(7) \qquad M^2 - (s^4 + 4t^4)N^2 = \pm 1.$$

Soit, par exemple, $s = t = 1$; on vérifiera l'équation $M^2 - 5N^2 = \pm 1$, en posant $M = 2$, $N = 1$. Les autres solutions se déduiront de la formule

$$M + \sqrt{5}N = (2+\sqrt{5})^n,$$

en faisant varier n de 1 à ∞. On aura

$$M = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right], \quad N = \frac{(2+\sqrt{5})^n - (2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}.$$

Pour chaque valeur de n, on obtiendra une solution en nombres entiers des équations proposées, savoir

(8) $x = M^2 + 5N^2, \quad y = 4MN, \quad z = 6MN, \quad u = 2MN.$

On peut aussi obtenir des solutions entières exprimées d'une manière générale en fonction d'un nombre entier arbitraire. En effet, on vérifie l'équation (7) en prenant $s = 1$, $P = 1$, $Q = 1 + 4t^2$, $M = 2t^2$, $N = 1$. De cette solution, on en déduira une infinité d'autres, où P et Q conservant les mêmes valeurs 1 et $1 + 4t^4$, les valeurs de M et de N seront données par la formule

$$(9) \qquad M + \sqrt{1 + 4t^4}\,N = (2q^2 + \sqrt{1 + 4q^4})^n.$$

Les valeurs $n = 1$, $n = 2$ de l'exposant donnent respectivement les solutions

$$x = 1 + 8t^4, \quad y = 8t^3, \quad z = 4t^2(1 + 2t^2), \quad u = 4t^2(1 - 2t^2),$$
$$x = (8t^2 + 1)^2 + 16t^4(1 + 4t^4), \quad y = 16t^3(1 + 8t^4).$$
$$z = 8t^2(8t^4 + 1)(1 + 2q^2),$$
$$u = 8t^2(8t^4 + 1)(1 - 2t^2).$$

Les formules deviennent de plus en plus compliquées à mesure que l'exposant n prend une valeur plus grande.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 99

(voir 1re série, t. IV, p. 370);

PAR M. H. BROCARD.

Soient un hyperboloïde, son cône asymptote et un plan principal commun. Tout plan, tangent à l'hyperboloïde, perpendiculaire au plan principal, retranche *du cône asymptote un cône fermé, de volume constant. Démontrer le théorème général dont celui-ci est un corollaire.* (TERQUEM.)

Le théorème général à établir est le suivant :

L'enveloppe d'un plan mobile qui détache d'un cône quelconque du second degré un cône fermé, de volume constant, est un hyperboloïde à deux nappes admettant le cône donné pour cône asymptote.

L'équation du cône rapporté à ses axes principaux étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

celle du plan variable est

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta,$$

α, β, γ désignant les cosinus des angles que fait la normale au plan avec les axes, et δ la distance de l'origine à ce plan. Éliminant z, on a la projection de la conique d'intersection sur le plan des xy

$$(a^2y^2+b^2x^2)\,c^2\gamma^2=a^2b^2(\delta-\alpha x-\beta y)^2,$$

dont la surface a pour expression

$$\mathrm{A}=\frac{2\pi abc\delta^2\gamma}{(c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, comme le cosinus de l'angle du plan sécant avec le plan des xy est γ, l'ellipse de section a pour surface $\dfrac{\mathrm{A}}{\gamma}$. Mais la hauteur du cône détaché est égale à δ ; le volume de ce cône est donc

$$\mathrm{V}=\frac{2\pi abc\delta^3}{3(c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi abck^3}{3},$$

d'où

$$\delta = k\sqrt{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}.$$

On a donc à chercher l'enveloppe du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = k\sqrt{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2},$$

sous la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Sous cette forme d'équation, on reconnaît que ce plan est tangent à l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \sqrt{k},$$

dont le cône asymptote n'est autre que le cône donné.

Questions 767 *et* 768

(voir 2e série, t. V, p. 383);

PAR M. E. PELLET.

767. *Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.*

(FOURET.)

768. *Étant donnée une conique et un point dans son plan, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle circonscrit à cette conique et tel que les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent au point donné; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les centres analogues ont le même centre radical.*

Le lieu de leurs centres est une conique. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre.

(FOURET.)

Ces deux questions sont des conséquences d'un théorème très-général qui, je crois, n'a pas été remarqué (*). D'après un théorème de M. Faure, les cercles circonscrits aux différents triangles conjugués à une conique coupent orthogonalement le cercle diagonal de cette conique, c'est-à-dire le cercle lieu des angles droits circonscrits à cette conique. Transformons la conique et les triangles par polaires réciproques, en prenant pour conique de référence un cercle situé dans le plan de la conique, et les cercles par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le centre du cercle de référence et pour module de transformation le carré du rayon de ce cercle. Nous aurons ce théorème :

D'un point O, *pris dans le plan d'une conique, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué à cette conique ; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les cercles analogues ont le même centre radical. On l'obtiendra aisément en abaissant du point* O *des perpendiculaires sur deux diamètres conjugués et menant la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires et les droites analogues : elles passent toutes par ce centre radical.*

On a évidemment le théorème analogue pour l'espace :

D'un point O *quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un tétraèdre conjugué à une surface du second ordre ; la sphère passant par les pieds de ces quatre perpendiculaires et les sphères analogues ont le même centre radical. On l'obtiendra aisément en abaissant du point* O *des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués et menant le plan qui*

(*) *Voir* 1re série, t. XX, p 80, et 2e série, t. VI, p. 466.

passe par les pieds de ces perpendiculaires et les plans analogues : ils passent tous par ce centre radical.

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé concourent en un même point. Si l'on fait varier le triangle de manière que ce point-là soit fixe, ses sommets resteront sur une conique. En effet, on peut projeter la figure de manière qu'à la conique corresponde un cercle, et au point donné le centre du cercle; alors le triangle se projettera suivant un triangle équilatéral circonscrit. L'équation du cercle étant $x^2+y^2-z^2=0$, les sommets du triangle équilatéral parcourront le cercle $x^2+y^2-4z^2=0$. On voit immédiatement que ce triangle restera toujours conjugué au cercle $x^2+y^2+2z^2=0$. Revenant à la figure primitive, on voit que les sommets du triangle parcourront une conique bitangente à la première, et que le triangle restera conjugué à une conique bitangente aux deux premières. En disposant convenablement le triangle de référence, les équations des coniques pourront s'écrire

$$x^2+y^2+z^2=0,$$
$$x^2+y^2+4z^2=0,$$
$$x^2+y^2-2z^2=0.$$

On a le théorème analogue pour les surfaces du second degré.

Les tétraèdres circonscrits à une surface du second degré, et tels que les droites qui joignent chaque sommet au point de contact de la face opposée se coupent en un même point donné, ont leurs sommets situés sur une surface du second degré circonscrite à la première, et sont conjugués à une autre surface. Si l'on prend pour tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué à la première surface et ayant un de ses sommets au point donné, les équations de ces surfaces pourront s'écrire, en prenant pour face $t=0$ celle qui est opposée au point donné

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+9t^2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-3t^2=0.$$

En rapprochant ces divers théorèmes, on a le suivant :

Si un triangle se meut en restant tangent à une conique, et de manière que les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé se coupent en un point donné : 1° les circonférences qui lui sont circonscrites coupent orthogonalement une même circonférence, et par suite ont pour enveloppe une courbe anallagmatique ; 2° il en est de même des cercles qui passent par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné du plan sur les côtés du triangle.

Et le théorème analogue pour l'espace.

Question 932

(voir 2e série, t. VIII, p. 192) ;

PAR M. MORET-BLANC.

Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie. (FOURET.)

Soient m un point de l'épicycloïde ; c la position correspondante du centre du cercle mobile ; O le centre du cercle fixe ; n le point de contact de ces deux cercles ; a et r

leurs rayons; $m\mu$ le rayon de courbure de l'épicycloïde au point m, et $m\mu m'$ le triangle semblable au triangle donné construit sur $m\mu$ (*).

Le point n divisant $m\mu$ dans un rapport constant $\left(\frac{mn}{m\mu} = \frac{a+\frac{1}{2}r}{a+r}\right)$, le triangle mnm' est constamment semblable à un triangle déterminé, que je désignerai par MNM'.

Sur cn, construisons le triangle cnc' semblable à mnm' ou à MNM', et joignons $c'm'$. Les deux triangles ncm, $nc'm'$ ayant un angle égal en n, compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et comme

$$cm = cn,$$

on a aussi

$$c'm' = c'n,$$

valeur constante; de plus

$$\widehat{c'm', c'n} = \widehat{cnc'} = \widehat{mnm'} = \widehat{\text{MNM}'},$$

valeur aussi constante. Ainsi l'on obtiendra le point m' en menant par le point c' une droite de longueur constante $c'm' = c'n = cn\,\frac{\text{NM}'}{\text{NM}}$, faisant avec cm un angle égal à MNM', dans un sens déterminé.

Cela posé, menons nn' parallèle à cc', qui coupe Oc' au point n', et des points O et c' avec $\text{O}n' = r'$ et $c'n' = a'$ pour rayons décrivons deux circonférences. Supposons le point m' lié invariablement à la circonférence c', et faisons rouler les circonférences c et c' sur les cercles fixes On et On' avec des vitesses telles que l'angle $n\text{O}n'$ reste constant. Soient c_1, n_1, m_1, c'_1, n'_1, m'_1 les positions des points c, n, m, c', n', m' quand les rayons On,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

On' ont tourné d'un angle $nOn_1 = n'On'_1 = \varphi$. Les deux circonférences mobiles auront tourné du même angle $\frac{r}{a}\varphi = \frac{r'}{a'}\varphi$; par suite, les lignes correspondantes $c_1 m_1$, $c'_1 m'_1$ feront entre elles un angle constant égal à MNM'. Le point m'_1 coïncidera donc encore avec le sommet d'un triangle semblable à MNM' construit sur $m_1 n_1$: donc le lieu de ce sommet est l'épicycloïde allongée ou raccourcie (suivant que $c'm'$ ou $c'n$ est plus grand ou plus petit que a'), décrite par le point m' lié invariablement à la circonférence c', roulant sur la circonférence de rayon On'.

Pour une cycloïde, on construira, comme précédemment, le triangle cnc' semblable à MNM', on mènera $c'n'$ égale et parallèle à cn, et par n' une parallèle $x'y'$ à la droite xy sur laquelle roule la circonférence c.

Le lieu du point m' sera la cycloïde allongée ou raccourcie décrite par le point m', lié invariablement à la circonférence c' roulant sur $x'y'$ avec la même vitesse que c roule sur xy : la démonstration est la même.

Question 1046

(voir 2e série, t. X, p. 557);

PAR M. MORET-BLANC.

Tout nombre premier $p = 8q + 1$ prend d'une seule manière chacune des deux formes

$$p = x^2 + 16y^2, \quad p = t^2 + 8u^2.$$

Pour q impair, ou $p = 16r + 9$, des deux nombres y et u, l'un est pair, l'autre impair.

Pour q pair, ou $p = 16r + 1$, les nombres y et u sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(LEBESGUE.)

Je m'appuierai sur ce théorème de la théorie des nombres : *Tout diviseur de l'expression $t^2 + au^2$, dans laquelle t et u sont des nombres premiers entre eux, est compris dans la forme quadratique*

$$py^2 + 2qyz + rz^2,$$

où l'on a

$$pr - q^2 = a, \quad 2q \leq \frac{p}{r},$$

y et z étant d'ailleurs premiers entre eux.

Si $a = 1$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = 1$.

Si $a = 2$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = 2$.

Si $a = -2$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = -2$, ou $q = 0$, $p = 2$, $r = -1$.

Il en résulte que tout diviseur de l'une des expressions

$$t^2 + u^2, \quad t^2 + 2u^2, \quad t^2 - 2u^2 \quad (\text{ou } 2t^2 - u^2)$$

est de même forme que le dividende, car les deux formes

$$y^2 - 2z^2 \quad \text{et} \quad 2y^2 - z^2$$

sont équivalentes. En effet

$$y^2 - 2z^2 = 2(y - z)^2 - (y - 2z)^2.$$

Cela posé, p étant un nombre premier, l'expression $x^{p-1} - 1$ ou $x^{8q} - 1$ est divisible par p pour toutes les valeurs entières de x non multiples de p, et en particulier pour les $8q$ nombres entiers compris entre zéro et p (*théorème de Fermat*). Or

$$x^{8q} - 1 = (x^{4q} + 1)(x^{4q} - 1),$$

et comme il n'y a pas plus de $4q$ nombres entre zéro et p qui puissent rendre l'un des facteurs divisible par p, il y en a précisément $4q$ qui rendent $x^{4q} + 1$ divisible par p.

Pour l'une de ces valeurs, $x^{4q}+1$ étant la somme de deux carrés premiers entre eux, son diviseur p sera de la même forme, et l'on aura

$$p = x^2 + z^2,$$
$$x^{4q}+1 = (x^{2q}-1)^2 + 2x^{2q},$$

de la forme $t^2 + 2v^2$; donc p sera de la même forme, et l'on aura

$$p = t^2 + 2v^2.$$

On sait qu'un nombre premier ne peut prendre que d'une seule manière la forme $y^2 + az^2$, a étant un nombre positif (Legendre, *Théorie des nombres*, n° 236); donc on aura d'une seule manière

$$p = x^2 + z^2 = t^2 + 2v^2.$$

x^2 et t^2 étant des carrés impairs, de la forme $8q+1$, z^2 et $2v^2$ devront être divisibles par 8, et l'on aura

$$z^2 = 16y^2, \quad v^2 = 4u^2,$$

d'où

$$p = x^2 + 16y^2 = t^2 + 8u^2;$$

x sera de la forme $8m \pm 3$, si q est impair, et de la forme $8m \pm 1$, si q est pair.

Dans tous les cas, on aura

$$(1) \qquad (x+t)(x-t) = 8(u^2 - 2y^2).$$

Premier cas : $p = 16r + 9, \quad x = 8m \pm 3.$

1° Soit $t = 8n \pm 1$, la relation (1) devient

$$8(m \mp n)[8(m \pm n) \pm 6] = 8(u^2 - 2y^2)$$

ou

$$2(m \mp n)[4(m \pm n) \pm 3] = u^2 - 2y^2.$$

Les signes placés entre m et n se correspondent ainsi que ceux qui précèdent le terme numérique; mais les premiers sont indépendants des seconds, et *vice versâ*.

Je ferai remarquer d'abord qu'aucun des facteurs du premier membre ne peut être de la forme $8m \pm 3$. En effet, on peut écrire

$$u^2 - 2y^2 = 2^\mu (2k+1)^2 (u_1^2 - 2y_1^2),$$

2^μ étant le produit de tous les facteurs 2, et $(2k+1)^2$ le produit de tous les facteurs impairs *communs* à u^2 et à y^2, et u_1, y_1 des nombres premiers entre eux.

$u_1^2 - 2y_1^2$ n'admet que des diviseurs de la même forme quadratique, et, par suite, de la forme linéaire $8m \pm 1$.

Si l'un des facteurs du premier membre, par exemple le facteur entre crochets, était de la forme $8m \pm 3$, il devrait renfermer à la première puissance $2k+1$, ou l'un de ses diviseurs, qui devrait dès lors diviser aussi l'autre facteur $(m \mp n)$; mais alors ce diviseur diviserait u, y, $x+t$, $x-t$, et, par suite, x et t; ce qui est impossible, puisque x et y sont premiers entre eux, ainsi que t et u.

Donc m et n devront être l'un pair et l'autre impair; $u^2 - 2y^2$ sera divisible par 2, mais non par 4 : donc u *est pair et* y *impair*.

2° Soit $t = 8n \pm 1$, on aura

$$[8(m \pm n) \pm 4][8(m \mp n) \pm 2] = 8(u^2 - 2y^2)$$

ou

$$[2(m \pm n) \pm 1][4(m \mp n) \pm 1] = u^2 - 2y^2.$$

D'après la remarque faite plus haut, m et n seront tous deux pairs ou tous deux impairs; les facteurs du premier membre seront impairs, tous deux de la forme $8m+1$ ou tous deux de la forme $8m-1$ (à cause de la correspondance des signes placés devant 1); leur produit sera de la forme $8m+1$, ce qui exige que *u soit impair et y pair.*

DEUXIÈME CAS : $p=16r+1, \quad x=8m\pm 1$.

1° Soit $t=8n\pm 1$, on aura

$$[8(m\pm n)\pm 2][8(m\mp n)]=8(u^2-2y^2),$$

ou

$$2(m\mp n)[4(m\pm n)\pm 1]=u^2-2y^2.$$

On voit, comme précédemment, que m et n doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs : u^2-2y^2 est donc divisible par 4, et, par suite, *u et y sont pairs.*

2° Soit $t=8n\pm 3$, on aura, en divisant par 8,

$$[4(m\pm n)\mp 1][2(m\mp n)\pm 1]=u^2-2y^2;$$

m et n devront être encore de même parité; les facteurs du premier membre sont, l'un de la forme $8m+1$, l'autre de la forme $8m-1$; leur produit est de la forme $8m-1$, ce qui exige que *u et y soient impairs.*

Question 1077

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 191);

PAR M. MORET-BLANC.

Appelant projections d'un point sur une courbe les pieds des normales abaissées de ce point sur la courbe, on demande :

1° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les droites qui passent par* un *point donné ;*

2° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les circonférences qui passent par* deux *points donnés ;*

3° *Quel est le lieu des projections d'un même point* *sur toutes les paraboles qui passent par* trois *points donnés ;*

4° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les coniques qui passent par* quatre *points donnés ;*

5° *Peut-on déduire de la solution de cette dernière question les solutions des questions précédentes ?*

(MANNHEIM.)

1° Le lieu est évidemment la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint le point que l'on projette au point donné.

2° Je prends la droite qui joint les deux points donnés pour axe des x, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite pour axe des y. Soient $2a$ la distance des deux points ; x_0, y_0 les coordonnées du point qu'on projette, et β l'ordonnée du centre de l'une des circonférences.

Les équations de la circonférence et de la normale seront

$$x^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2 + a^2,$$
$$\frac{y - \beta}{x} = \frac{y_0 - \beta}{x_0}.$$

L'élimination de β entre ces deux équations donne l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x - x_0) + 2y(x_0 y - y_0 x) = 0.$$

Si le point qu'on projette est sur l'axe des y, l'équation se réduit à

$$x(x^2 + y^2 - 2y_0 y - a^2) = 0;$$

elle représente l'axe des y, et la circonférence ayant pour centre le point $(0, y_0)$ et passant par les deux points donnés, comme on pouvait le prévoir.

3° Soient A, B, C les trois points donnés, et O le point que l'on projette. Je prends le point A pour origine des coordonnées rectangulaires et la ligne AB pour axe des x. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point C; x_0, y_0 celles du point O et b l'abscisse du point B.

L'équation d'une parabole passant par A, B, C sera

$$(1) \qquad a^2y^2 + 2axy + x^2 - bx - cy = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad a^2y_1^2 + 2ax_1y_1 + x_1^2 - bx_1 - cy_1 = 0.$$

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) est

$$\frac{2a^2y + 2ax - c}{2ay + 2x - b} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

d'où

$$(3) \quad 2a^2y(x - x_0) + 2a[x(x - x_0) - y(y - y_0)] \\ - (2x - b)(y - y_0) - c(x - x_0) = 0.$$

On aura l'équation du lieu des pieds des normales, en éliminant a et c entre ces trois équations, ce qui conduit à une équation du septième degré.

4° Je prends le point que l'on projette pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées des quatre points donnés, et

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx\, cy + 1 = 0$$

l'équation d'une conique passant par ces quatre points.

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) sera

$$\frac{bx + 2cy + e}{2ax + by + d} = \frac{y}{x}$$

si la normale passe par l'origine; d'où

$$2axy + b(y^2 - x^2) - 2cxy + dy - ex = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant

a, b, c, d, e entre les six équations

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1 = 0,\\
&ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + 1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2axy + b(y^2 - x^2) - 2cxy + dy - ex = 0.
\end{aligned}$$

Il suffit d'égaler l'*éliminant* à zéro :

$$\begin{vmatrix}
x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\
x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\
x^2 & x_4y_4 & y_2^4 & x_4 & y_4 & 1\\
2xy & y^2 - x^2 & -2xy & y & -x & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

La courbe est du quatrième degré, et passe par l'origine et par les quatre points donnés.

5° De ce dernier résultat on pourrait déduire les précédents.

Une parabole est une conique tangente à la droite de l'infini ; mais, tandis qu'un cinquième point détermine complétement une conique passant par quatre points donnés, si l'on donne un quatrième point d'une conique passant par trois points et tangente à une droite donnée, il y a deux coniques satisfaisant à ces conditions. L'indétermination d'une parabole dont on donne trois points est donc double de celle d'une conique dont on donne quatre points, et le lieu cherché doit être pour la parabole de degré double de ce qu'il est pour la conique, c'est-à-dire du huitième degré ; mais la droite de l'infini fait évidemment partie du lieu, car le point à l'infini sur chaque parabole est le pied de la normale menée du point donné parallèlement à l'axe. L'équation du lieu doit donc se réduire au septième degré.

Un cercle passant par deux points donnés est une conique passant par ces deux points et par les deux points circulaires de l'infini; la droite de l'infini fait encore partie du lieu, dont l'équation doit se réduire au troisième degré.

Enfin, si l'un des deux points donnés s'éloigne à l'infini, la droite de l'infini devient une solution double, et l'équation du lieu se réduit au deuxième degré. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que le lieu est une circonférence.

Remarque. — Dans le premier, le deuxième et le quatrième cas, le lieu cherché passe par tous les points donnés.

Dans le cas de la parabole, il passera par le point O, si ce point est extérieur au triangle ayant pour sommets les trois autres. Il passera par chacun de ceux-ci, si la perpendiculaire, menée par ce point à la droite qui le joint au point O, ne passe pas entre les deux autres.

Question 1126

(voir 2e série, t. XIII, p. 64);

PAR M. BOURGUET.

Trouver l'enveloppe d'une sphère à une surface du second degré et coupant orthogonalement une sphère de rayon donné. (E. PELLET.)

J'établirai d'abord la proposition suivante :

Toutes les sphères qui se coupent en un point A *et coupent orthogonalement une sphère* O, *de rayon* R, *se coupent en un autre point* A' *situé sur la ligne* OA *et tel qu'on a*

$$OA.OA' = R^2.$$

En effet, $OA.OA' = \overline{OT}^2 = R^2$.

Cela posé, trois sphères tangentes à une surface S, dans le voisinage du point A, coupent orthogonalement une même sphère. Ces trois sphères se coupent en un même point qui a pour limite A, et en un autre point A′ qui, à la limite, se trouve sur la droite OA, et tel que l'on a

$$OA . OA' = R^2.$$

Comme OA est connu, on construira OA′ sans difficulté. Cette équation peut être considérée comme l'équation de la surface cherchée.

La solution analytique est la traduction de la solution géométrique.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de la sphère mobile : son équation sera

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) \\ & = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + R^2 = 0. \end{aligned}$$

Entre x_1, y_1, z_1 existe une certaine relation dépendant de la surface directrice $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$. Pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer x, y, z entre les trois équations

(1) $$\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + R^2 = 0,$$

(3) $$\frac{x}{\varphi'_{x_1}} = \frac{y}{\varphi'_{y_1}} = \frac{z}{\varphi'_{z_1}}.$$

Les équations (3) indiquent que les deux points d'intersection de trois sphères infiniment voisines sont sur une droite passant par l'origine. Appelons x, y, z les coordonnées d'un des deux points, et x', y', z' les coordonnées de celui qui est sur la surface directrice ; on aura

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho\rho'}{\rho^2}.$$

Les coordonnées des deux points devant satisfaire à l'équation (2), on déduit

$$\rho\rho' - R^2 = 0,$$

qui nous ramène à la même conclusion que la solution géométrique.

Soit $F(x', y', z') = 0$ l'équation de la surface directrice; l'équation de la surface cherchée sera

$$F\left(R^2\frac{x}{\rho^2},\quad R^2\frac{y}{\rho^2},\quad R^2\frac{z}{\rho^2}\right) = 0.$$

Si F représente une surface du second degré, le lieu cherché sera du quatrième degré; l'origine sera un point conique double ou un point isolé, suivant que la surface directrice est infinie ou finie.

Tout plan passant par l'origine et par une génératrice rectiligne de la surface directrice coupe la seconde surface suivant un cercle passant par l'origine. Le point conique de la surface est tangent à un cône homothétique au cône asymptote.

Note. — La même question a été résolue d'une manière analogue par MM. Alfred Rousset et Genty. M. Moret-Blanc a borné son calcul au cas où la surface du second degré touchée est une sphère. Enfin M. V. Hioux a étendu la question en se proposant de trouver d'abord le lieu du centre de la sphère mobile, c'est-à-dire la *déférente* de l'anallagmatique dont la sphère fixe est la directrice.

Question 1129

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. GAMBEY.

Un triangle ABC, *rectangle en* A, *tourne autour d'un axe mené par* B, *parallèlement à* AC. *Calculer ses trois côtés sous la double condition que son péri-*

mètre ait une valeur donnée et que le volume engendré par lui en un tour complet soit maximum.

Soient a, b, c les côtés, et $2p$ le périmètre, qui est donné. Il s'agit de déterminer ces côtés par la condition que le produit bc^2 soit maximum.

Or, des relations connues

$$a + b + c = 2p,$$
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

on déduit facilement

$$b = \frac{2p(p-c)}{2p-c},$$

d'où

$$bc^2 = \frac{2pc^2(p-c)}{2p-c}.$$

Égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à c, il vient

$$c(2c^2 - 7pc + 4p^2) = 0$$

et, par suite,

$$c = 0, \quad c = \frac{p}{4}(7 \pm \sqrt{17}).$$

La racine $c = 0$ répond au minimum de bc^2. La suivante

$$c = \frac{p}{4}(7 - \sqrt{17})$$

répond au maximum cherché.

Quant à la troisième, il faut la rejeter, car on a toujours $c < \frac{2p}{3}$, et *a fortiori*

$$c < \frac{p}{4}(7 + \sqrt{17}).$$

Les valeurs correspondantes de a et b sont

$$a = \frac{3p}{4}(-3 + \sqrt{17}),$$

$$b = \frac{p}{2}(5 - \sqrt{17}),$$

et celle de bc^2

$$bc^2 = \frac{p^3}{4}(71 - 17\sqrt{17}).$$

Note. — Solution analogue de MM. de Marsilly; Launay, instituteur adjoint à Mézières (Ille-et-Vilaine); Paul Henriot, élève du collége Stanislas; Barthe et Souriau, élèves du lycée de Poitiers; Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; Louis Goulin, élève du lycée du Havre; et A. Monier.

Question 1130

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. CHABANEL.

Etant donnée une courbe plane quelconque et une surface du second degré, trouver les surfaces développables qui, passant par la courbe, ont leur arête de rebroussement sur la surface : l'équation différentielle du premier ordre à laquelle se ramène la solution de ce problème peut toujours s'intégrer par de simples quadratures. (E. LAGUERRE.)

Soit μ un point de l'arête de rebroussement de l'une des surfaces développables cherchées, surface que je désignerai par X. La tangente menée à cette arête, le contact étant en μ, est génératrice de cette surface, et rencontre la courbe plane donnée en m. Par ce point m, on peut mener une infinité de droites tangentes à la surface du second degré donnée; le lieu de ces tangentes est un cône du second degré Σ.

Si l'on fait varier le point μ sur l'arête de rebroussement, à chacune des positions de ce point correspondront une génératrice μm et un cône Σ; considérons deux points μ' et μ'' infiniment voisins l'un de l'autre. Les génératrices $\mu'm'$ et $\mu''m''$ se rencontreront en l'un des deux points μ' et μ'', en μ'' par exemple; ce point appartiendra à l'intersection des cônes Σ' et Σ'' et, par suite, à l'enveloppe des cônes Σ. Mais cette enveloppe est tangente au cône Σ'', et, puisqu'elle passe par le point μ'', elle contient la génératrice $\mu''m''$. Ainsi l'enveloppe des cônes Σ est le lieu des génératrices μm, lieu qui n'est autre chose que la surface développable X. Le problème revient donc à déterminer l'équation de l'enveloppe des cônes Σ circonscrits à la surface du second degré donnée, et dont les sommets sont situés sur la courbe plane aussi donnée.

Je prends pour plan des xy le plan de cette courbe, et je donne aux axes des x et des y des positions telles, que l'équation de la surface du second degré donnée se réduise à

$$(1)\quad S = -Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxz + 2B'yz + 2Cz + D = 0.$$

Soient α et β les coordonnées du point m, et

$$(2)\qquad \beta = \omega(\alpha)$$

l'équation de la courbe plane donnée.

L'équation du cône Σ est

$$\Sigma = [\alpha(Ax + Bz) + \beta(A'y + B'z) + Cz + D]^2 \\ - S(A\alpha^2 + A'\beta^2 + D) = 0,$$

ou bien

$$(3)\qquad \Sigma = l\alpha^2 + m\beta^2 + 2n\alpha\beta + 2p\alpha + 2q\beta + r = 0,$$

l, m, n, p, q, r étant des fonctions indépendantes de α et de β.

En différentiant cette équation par rapport à α et à β, on a

$$(4)\qquad d\alpha(l\alpha + n\beta + p) + d\beta(m\beta + n\alpha + q) = 0,$$

équation que l'on rend homogène en posant

$$\alpha = \alpha' + \frac{qn - pm}{lm - n^2}, \quad \beta = \beta' + \frac{pn - ql}{lm - n^2},$$

et dont on obtient ensuite l'intégrale générale par de simples quadratures.

Soit

$$(5) \qquad \varphi(\alpha, \beta, x, y, z, \lambda) = 0$$

cette intégrale générale.

L'élimination de α et de β entre les équations (2), (3) et (5) donnera l'équation de la surface développable X, qui répond aux conditions générales du problème, cette surface étant particularisée par la valeur donnée à la constante λ.

Questions 1132 *et* 1133

(voir 2e série, t. XIII, p. 207);

PAR M. BOURGUET.

1132. *On donne trois droites quelconques* D_A, D_B, D_C, *un triangle dont les côtés sont* A, B, C *et un point* O *dans le plan de ce triangle.*

Par le point O, *on mène un plan quelconque qui coupe les trois droites données en* a, b, c. *Les plans* (A, a), (B, b), (C, c) *se coupent en un point* m, *dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier le plan qui passe par le point* O. (MANNHEIM.)

1133. *On donne un triangle dont les côtés sont* A, B, C, *un trièdre dont le sommet est un point du plan de ce triangle et un point quelconque* O.

Par le point O, *on mène une transversale quelconque qui coupe les faces du trièdre aux points* a, b, c.

Les plans (A, a), (B, b), (C, c) *se coupent en un* *point m, dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier la transversale qui passe en* O. (MANNHEIM.)

Prenons une droite quelconque MN et cherchons les points d'intersection de cette droite avec la surface. Pour cela, par le point M je mène deux plans (A, a), (B, b); le plan (C, c) correspondant déterminera un point N tel, qu'à un point M correspondra un seul point N.

Réciproquement, étant donné N, cherchons M : pour cela, je fais tourner le plan mobile autour de Oc; les deux plans (A, a), (B, b) correspondants formeront deux faisceaux homographiques, et leur intersection engendrera un cône du second degré et ce sont les intersections de ce cône par la droite MN qui seront le point M. On voit qu'à chaque point N correspondent deux points M; les points d'intersection de MN avec la surface sont ceux qui se correspondent à eux-mêmes : on sait qu'il y en a trois. Donc la surface est du troisième degré. Si le point O est dans le plan du triangle, l'un des trois points sera dans ce même plan, qui fera partie de la surface, et le reste de cette surface sera du second degré. Si l'on fait coïncider les deux plans (A, a), (B, b) avec le plan du triangle, les trois plans se couperont dans le cas général, suivant la droite C : donc les trois côtés du triangle font partie du lieu. Menons par le point O une droite ab coupant les deux droites D_A, D_B; il est évident que l'intersection des deux plans (A, a), (B, b) fera aussi partie du lieu. Ces six génératrices avec trois autres points détermineront la surface. Dans le cas particulier où O est dans le plan du triangle, la surface du second degré est déterminée par les trois dernières génératrices.

CORRÉLATIF. — *Étant donnés trois droites, un plan et un trièdre ayant son sommet dans le plan, par un point du plan et par les trois droites on fait passer trois* *plans qui coupent les arêtes du trièdre aux points a, b, c. L'enveloppe du plan abc est une surface du second degré, inscrite dans le trièdre. Il est facile de construire trois génératrices.*

Solution analogue pour la question 1133.

Corrélatif. — *Étant donnés un triangle, un trièdre ayant son sommet dans le plan du triangle et un plan quelconque, on trace une droite dans ce dernier plan : par cette droite et par les trois sommets du triangle on fait passer trois plans qui coupent les arêtes du triangle aux points a, b, c; l'enveloppe du plan abc est une surface du second degré inscrite dans le tétraèdre.*

Note. — Solutions géométriques analogues de MM. Chabanel, Dewulf et Genty. Solutions analytiques de MM. Gambey, Genty, Lemelle, Marquet et Moret-Blanc.

Question 1135

(voir 2e série, t. XIII, p. 207).

Par M. BOURGUET.

a et b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est égale à un nombre entier. (Catalan.)

Cette question peut se généraliser ainsi : prouver que

$$\frac{\Gamma(ka_1)\,\Gamma(ka_2)\ldots\Gamma(ka_k)}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_k)\,\Gamma(a_1+a_2+\ldots+a_k)}$$

est un nombre entier.

Cela revient à prouver que

$$\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_1}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_2}{p^x}\right)+\ldots+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_k}{p^x}\right)$$

$$\geqq\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_1}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_2}{p^x}\right)+\ldots+\sum_{z=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_k}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^x}\right),$$

ou, *a fortiori*,

$$\left(\frac{ka_1}{p^x}\right)+\left(\frac{ka_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{ka_k}{p^x}\right)$$

$$\geqq\left(\frac{a_1}{p^x}\right)+\left(\frac{a_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{a_k}{p^x}\right)+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^x}\right).$$

Soient $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ la partie entière du quotient de $a_1, \ldots, a_k$ par p^x et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les restes; cela revient à prouver que

$$\left(\frac{k\alpha_1}{p^x}\right)+\left(\frac{k\alpha_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{k\alpha_k}{p^x}\right)\geqq\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}{p^x}\right).$$

Ce qui est évident, puisque le terme le plus grand du premier membre est à lui seul plus grand que le second membre.

C'est une application de la formule de M. Désiré André, donnée dans la 2e série, t. XIII, p. 185.

Note. — Solution analogue de MM. L. Jacques, à Crémone; Moret-Blanc; J. de Virieu, à Lyon.

Question 1136

(voir 2e série, t. XIII, p. 206);

PAR M. MORET-BLANC.

Le nombre entier p étant la somme de quatre carrés entiers, on a

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, positifs ou négatifs, tels que la somme algébrique*

$$2p + P + Q + R + S$$

est égale à un carré, et l'on a aussi

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2,$$

P', Q', R', S' *étant des entiers dont la somme algébrique est égale à p.* (S. Realis.)

Soit

$$p = r^2 + s^2 + t^2 + u^2.$$

1° Si l'on pose

$$st + tu + su - r^2 = P,$$
$$tu + ru + rt - s^2 = Q,$$
$$ru + rs + su - t^2 = R,$$
$$rs + st + rt - u^2 = S,$$

on aura

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

et

$$2p + P + Q + R + S = (r + s + t + u)^2.$$

2° Si l'on pose

$$r^2 + st + su + tu = P',$$
$$s^2 - tu + rt - ru = Q',$$
$$t^2 - su + ru - rs = R',$$
$$u^2 - st + rs - rt = S',$$

on aura

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2$$

et

$$P' + Q' + R' + S' = p.$$

Cette dernière solution n'étant pas symétrique, on en déduit trois autres par la permutation circulaire des lettres r, s, t, u.

Il est évident qu'une autre décomposition du nombre p en somme de quatre carrés donnerait d'autres solutions.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Genocchi. — Votre collaborateur, M. Picart, dans le numéro de février de vos *Annales* (t. XIII, p. 81-82), cite M. Maximilien Marie au sujet de la limite à laquelle s'arrête la convergence de la série de Taylor, et qui n'est pas nécessairement la valeur de la variable offrant le plus petit module parmi celles qui rendent la fonction ou sa dérivée infinie.

Dans une Note publiée en 1873, dont j'ai l'honneur de vous adresser un exemplaire, j'ai montré que cette remarque doit être attribuée à mon compatriote M. Félix Chiò, qui l'a faite le premier expressément et avec toute la précision. Je ne me suis pas appuyé sur des documents rares ou inédits, mais sur le recueil des *Comptes rendus* et sur un Rapport rédigé par Cauchy lui-même, qui, après avoir rappelé son célèbre théorème sur la convergence de la série de Maclaurin, s'exprimait de la manière suivante :

« En appliquant ce même théorème, dans mes *Exercices d'Analyse,* à la série de Lagrange et en supposant cette série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'un paramètre variable, j'ai dit qu'elle demeure convergente quand le module du paramètre est inférieur au plus petit de ceux qui introduisent des racines égales dans l'équation donnée. Cette proposition est exacte; mais il convient d'ajouter, avec M. Chiò, que la série de Lagrange demeure convergente, quand le module du paramètre est inférieur au plus petit de ceux qui rendent égales deux racines, dont l'une est précisément la somme de la série. Telle est, en effet, la conséquence qui se déduit naturellement du simple énoncé du théorème général. » (*Comptes rendus*, t. XXXIV, p. 304-305.)

J'ai montré aussi dans la même Note que Cauchy avait, dès 1844, remarqué les exceptions que comporte la règle tirée des *racines égales* de l'équation et proposé de la remplacer par une autre règle relative aux valeurs infinies de la fonction ou de ses dérivées (*Comptes rendus*, t. XIX, p. 157), en ajoutant que cette dernière règle avait été adoptée par Chiò dans son Mémoire de la même année. Le calcul de Cauchy est identique à celui qu'a développé M. Puiseux dans son Rapport sur les Mémoires de M. Marie. Chiò a insisté sur la distinction précédente dans un Mémoire postérieur présenté à la Société Philomathique, et je vous prie, Monsieur, d'en agréer un exemplaire.

Ainsi la priorité de mon compatriote est, je pense, très-clairement établie. Je suis heureux d'ajouter que, dans deux lettres que M. Marie a bien voulu m'adresser, il a loyalement reconnu les droits de Félix Chiò, en regrettant que les sentiments d'admiration et de reconnaissance voués par ce dernier à Cauchy l'aient empêché de faire valoir ses droits exclusifs. « Son silence, dit M. Marie, a eu pour résultat définitif de tellement ensevelir sa découverte, que les disciples de Cauchy, ceux mêmes qui ont dû compulser ses moindres écrits, n'en eurent pas connaissance, puisqu'ils n'en ont pas profité, et qu'ainsi la Science en resta privée pendant une vingtaine d'années. » M. Marie ajoutait : « Je vous remercie de l'envoi du troisième Mémoire de M. Chiò que j'ai lu avec un vif intérêt et qui montre quelle rectitude de jugement M. Chiò apportait dans les difficiles recherches qui l'ont occupé. » Il finissait par ces mots : « Et maintenant je viens me mettre à votre disposition au sujet de ce qu'il conviendrait de faire dans l'intérêt de la mémoire de M. Chiò. »

Je vous demande donc, Monsieur, de vouloir bien faire une petite rectification à l'article de M. Picart. Ce sera une œuvre juste et pieuse dont nous serons infiniment reconnaissants, la famille de M. Chiò et moi. Je pourrais discuter quelque autre affirmation de M. Picart, mais je me borne à citer les paroles suivantes de M. Darboux : « Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de la série de Lagrange sont bien connues : elles ont été indiquées avec toute la netteté possible par Cauchy et par Félix Chiò. Il n'y a donc plus rien de nouveau à établir sur cette question, et ce qui a pu faire illusion, dans ces derniers temps, à quelques géomètres, c'est que, dans son beau Mémoire sur cette série, M. Rouché s'est contenté de donner une condition suffisante pour la convergence, mais nullement nécessaire. » (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. VI, p. 67, 1874.)

Omission. — C'est par erreur que nous avons oublié de mentionner M. Brocard comme ayant résolu la question 900.

QUESTIONS.

1156. On a une masse quelconque, attirant suivant la loi de la gravitation. Soit dv un élément infiniment petit de volume pris n'importe où dans l'espace. Si on le suppose rempli d'une matière homogène ayant pour densité 1, il supportera une attraction R de la part de la masse attirante. Soit r la distance de cet élément dv à un point fixe M, et φ l'angle que la direction de R fait avec la direction de la droite qui joint l'élément dv au point M. Si l'on fait la somme de toutes les expressions $\frac{R\cos\varphi}{r^2}$ qui se rapportent à tous les éléments dv de l'espace, le résultat sera égal au produit du potentiel de la masse attirante relativement au point M, par $4\pi f$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre et f la force d'attraction de deux points matériels de masse 1, situés à l'unité de distance. (F. Didon.)

1157. Étant donnés un système quelconque de points matériels et deux droites fixes dans l'espace, on demande le lieu des droites qui rencontrent les deux droites fixes et qui sont axes principaux d'inertie par rapport à un de leurs points. Lieu de ce point. On examinera en particulier le cas où l'une des droites fixes passe par le centre de gravité du système, et aussi le cas où l'une de ces droites est axe principal d'inertie relativement au centre de gravité. (F. Didon.)

1158. Étant donnée une masse quelconque dont chaque molécule attire suivant une loi qu'on suppose être représentée par une simple fonction de la distance au point attiré, on peut se proposer de trouver toutes les surfaces jouissant de cette propriété, que les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions de la masse sur des points matériels placés en tous les points de l'une quelconque d'entre elles soient normales à une même surface. Démontrer que, pour chacune des surfaces cherchées, il existe une relation constante $f(R, V) = 0$ entre le potentiel de la masse relatif à chaque point de cette surface et la grandeur R de l'attraction de la masse sur ce point. Si la relation ne contient pas R, elle donne des surfaces de niveau; si elle ne contient pas V, elle donne ce qu'on peut appeler des *surfaces d'égale attraction*. (F. Didon.)

1159. Lorsqu'un angle constant 2φ se déplace en restant tangent à une courbe plane convexe et fermée d'un périmètre S, la bissectrice extérieure de cet angle enveloppe une courbe fermée dont le périmètre est $\frac{S}{\sin\varphi}$.

En faisant varier l'angle 2φ et réduisant par l'homothétie chacune des courbes obtenues dans un rapport égal à $\sin\varphi$, on forme une série de courbes fermées isopérimètres. Quelle est celle de ces courbes qui comprend la plus grande aire? (G. Fouret.)

1160. Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, on les coupe par une de leurs sphères orthogonales, et l'on prend les circonférences obtenues comme bases d'autant de cônes ayant pour sommet commun un point de l'axe radical. Chacun de ces cônes coupe la sphère correspondante suivant une deuxième circonférence : toutes ces circonférences sont situées sur une même sphère orthogonale aux sphères données. Réciproque. (G. Fouret.)

1161. Si, d'un point M pris sur une branche d'hyperbole, on mène une tangente MT au cercle bitangent à la courbe selon son axe transverse, et si, du même point M, on mène une parallèle à l'asymptote jusqu'à son point d'intersection Q avec l'axe transverse de l'hyperbole, le triangle MTQ est isoscèle.

(L.-A. Levat.)

1162. Construire une hyperbole, étant donné l'axe transverse AA′ et un point M de la courbe.

(L.-A. Levat.)

DÉTERMINATION DES DIVISEURS A COEFFICIENTS COMMENSURABLES, D'UN DEGRÉ DONNÉ, D'UN POLYNOME ENTIER EN x A COEFFICIENTS COMMENSURABLES;

Par M. L. MALEYX.

I. Deux diviseurs d'un polynôme entier en x qui ne diffèrent que par un coefficient constant, ayant la même composition algébrique, ne sont pas considérés comme distincts.

II. En multipliant un polynôme entier en x, à coefficients commensurables, par un multiple commun des dénominateurs de ses coefficients, et en divisant les coefficients du produit par leur plus grand commun diviseur, on forme un nouveau polynôme à coefficients entiers premiers entre eux; le nouveau polynôme, qui ne diffère du premier que par un coefficient constant, admet les mêmes diviseurs que lui, et conserve la qualité de diviser exactement tous ceux que le premier divisait lui-même.

III. De là résulte que la recherche de tous les diviseurs à coefficients commensurables d'un polynôme entier en x à coefficients commensurables se ramène à celle de tous les diviseurs à coefficients entiers premiers entre eux d'un polynôme entier en x jouissant des mêmes propriétés.

IV. Le produit d'un polynôme entier en x à coefficients entiers premiers entre eux par un polynôme entier dont certains coefficients sont des nombres fractionnaires irréductibles ne peut être un polynôme à coefficients entiers.

Réduisons tous les coefficients du polynôme multiplicateur à leur plus petit dénominateur commun, et soit α l'un des facteurs premiers de ce dénominateur que nous représenterons par $\alpha \times m$; le polynôme multiplicateur est de la forme

$$\frac{\alpha \times P + Q}{\alpha \times m},$$

$\alpha \times P$ étant la somme des numérateurs des termes dont le coefficient est divisible par α, et Q la somme de ceux dont aucun coefficient n'est divisible par α. Mettons de même le multiplicande sous la forme

$$\alpha \times P_1 + Q_1;$$

Q contient au moins un terme différent de zéro, sans quoi $\alpha \times m$ ne serait pas le plus petit dénominateur commun des coefficients du multiplicateur, et Q_1 contient aussi au moins un terme, puisque les coefficients du multiplicande sont premiers entre eux.

Cela posé, effectuons le produit; on trouve

$$\frac{\alpha^2 PP_1 + \alpha P_1 Q + \alpha PQ_1 + QQ_1}{\alpha \times m},$$

et, pour démontrer que tous les coefficients du produit ne sont pas entiers, il suffit de montrer que l'un au moins des coefficients du numérateur n'est pas divisible par le facteur α qui entre au dénominateur.

Or, parmi les termes du produit $Q \times Q_1$, il en existe au moins un qui ne se réduit pas avec les autres et dont le coefficient n'est pas divisible par α, puisqu'il est le produit de deux nombres dont aucun n'est divisible par le nombre premier α. Ce terme ne peut admettre de semblables que parmi ceux des produits $\alpha^2 PP_1$, $\alpha P_1 Q$, αPQ_1, qui sont tous divisibles par α; le coefficient du terme résultant de leur réduction étant la somme de plusieurs nombres divisibles par α et d'un seul qui ne l'est pas ne saurait être divisible par α.

Il en résulte que la division d'un polynôme à coefficients entiers par un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux ne peut se faire exactement que tout autant que le quotient est un polynôme à coefficients entiers.

V. Soient

$$F(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

un polynôme entier en x et à coefficients entiers;

$$\varphi(x) = ax^p + bx^{p-1} + \ldots + l$$

un second polynôme entier en x, à coefficients entiers premiers entre eux et diviseur du premier; $\psi(x)$ le quotient dont les coefficients doivent être des nombres entiers d'après le numéro précédent; on aura

$$F(x) = \varphi(x) \times \psi(x).$$

Remplaçons-y x par $\frac{\alpha}{\beta}$, et multiplions les deux membres par β^m; on aura

$$\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \beta^p \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \times \beta^{m-p} \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &A\alpha^m + A_1 \alpha^{m-1}\beta + \ldots + A_m \beta^m \\ &\quad = (a\alpha^p + b\alpha^{p-1}\beta + \ldots + l\beta^p)K, \end{aligned}$$

K étant un nombre entier.

D'après cela, $a\alpha^p + b\alpha^{p-1}\beta + \ldots + l\beta^p$ doit être un diviseur arithmétique du nombre

$$A\alpha^m + A_1\alpha^{m-1}\beta + \ldots + A_m\beta^m.$$

Désignons ce diviseur par M, on aura l'équation du premier degré

$$a\alpha^p + b\alpha^{p-1}\beta + \ldots + l\beta^p = M$$

entre les $p+1$ coefficients inconnus $a, b, \ldots, l$ du polynôme cherché.

Si l'on donne à $\frac{\alpha}{\beta}$ $p+1$ valeurs distinctes $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_p}{\beta_p}$; si l'on désigne généralement par M_t un diviseur convenablement choisi de $\beta_t^m F\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}\right)$, la résolution du système des $p+1$ équations

$$\begin{aligned}
a\alpha^p + b\alpha^{p-1}\beta\ \ + \ldots + l\beta^p &= M,\\
a\alpha_1^p + b\alpha_1^{p-1}\beta_1 + \ldots + l\beta_1^p &= M_1,\\
a\alpha_2^p + b\alpha_2^{p-1}\beta_2 + \ldots + l\beta_2^p &= M_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots,\\
a\alpha_p^p + b\alpha_p^{p-1}\beta_p + \ldots + l\beta_p^p &= M_p
\end{aligned}$$

fera connaître les $p+1$ coefficients du diviseur $\varphi(x)$.

VI. Désignons maintenant par m_t le nombre des diviseurs de $\beta_t^m F\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}\right)$. Si l'on donne à M_t successivement les valeurs de tous ces diviseurs dans le système des $p+1$ équations du numéro précédent, on formera un nombre de systèmes analogues égal à

$$m \times m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_p.$$

En résolvant chacun de ces systèmes, on déterminera les coefficients d'un nombre égal de polynômes de degré p, parmi lesquels figureront tous les diviseurs de degré p à coefficients entiers premiers entre eux du polynôme $F(x)$.

Mais en même temps qu'on obtiendrait ainsi les coefficients de tous les polynômes cherchés, on obtiendrait aussi ceux d'un nombre considérable de polynômes qui ne conviendraient pas à la question, et qu'il faut chercher à exclure.

VII. On peut exclure tout système de valeurs de M, $M_1, \ldots, M_p$, pour lequel :

1° L'un de ces coefficients désignés d'avance, M par exemple, aurait une valeur négative; en effet, en changeant simultanément les signes de M, $M_1, \ldots, M_p$, on pourrait rendre M positif, et l'on ne ferait ainsi que changer les signes de $a, b, \ldots, l$, ce qui n'altérerait pas le diviseur correspondant;

2° On trouverait des valeurs fractionnaires de a, $b, \ldots, l$;

3° On trouverait des valeurs entières de $a, b, \ldots, l$, admettant un facteur commun;

4° On trouverait des valeurs de $a, b, \ldots, l$, ne rendant pas $\beta_{p+1}^p \varphi\left(\frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}\right)$ diviseur de $\beta_{p+1}^m F\left(\frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}\right)$, $\frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}$ étant distincte des $p+1$ valeurs déjà données à $\frac{\alpha}{\beta}$.

5° On trouverait des valeurs de $a, b, \ldots, l$ ne rendant pas $\varphi(x)$ diviseur de $F(x)$, ce qui arriverait nécessairement si l'on était conduit à mettre un coefficient fractionnaire au quotient.

VIII. Ces différents moyens d'exclusion peuvent se combiner et s'appliquer diversement suivant les valeurs de p, α, β; nous nous bornerons dans ce qui suit à exposer quelques procédés réguliers conduisant au résultat quand p a l'une des valeurs 1, 2, 3, puis à indiquer d'une façon générale comment on pourrait opérer pour les degrés supérieurs.

Diviseurs du premier degré.

IX. Tout diviseur du premier degré d'un polynôme entier en x est de la forme $ax + b$, a étant un diviseur du coefficient A du premier terme du polynôme considéré, b un diviseur de son dernier terme A_m.

Nous supposerons que nous ayons préalablement supprimé dans $F(x)$ les diviseurs $x - 1$ ou $x + 1$ s'ils y étaient contenus.

On peut, d'après ce qu'on a vu n° VII, exclure comme valeurs de a les diviseurs négatifs de A, l'association dans un même binôme d'un diviseur de A et d'un diviseur de A_m admettant un facteur commun.

Un système de valeurs de a et de b ne peut être accepté que tout autant que leur somme, résultat de la substitution de 1 dans le binôme $ax + b$, et que leur différence, résultat de la substitution de -1 dans le même binôme, seront des diviseurs respectifs de $F(1)$ et de $F(-1)$ qui ne sont pas nuls.

On formera tous les binômes ne satisfaisant pas à ces conditions d'exclusion et on les essayera par la division, en prenant soin de l'ordonner de manière que le premier terme du diviseur ait le plus grand coefficient.

Pour faciliter ces opérations, on forme d'abord le tableau des valeurs possibles de $a + b$ qu'on compare à celui des diviseurs de $F(1)$, puis le tableau des valeurs possibles de $a - b$ qu'on compare à celui des diviseurs de $F(-1)$.

Soit, pour exemple, le polynôme

$$F(x) = 15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6.$$

I		II		III	IV		V
a	b	$a+b$		$F(1)=-14$	$a-b$		$F(-1)=-36$
15	6	15+2	17	14	15+1	16	36
5	3	15+1	16	7	5—2	3	18
3	2	15—1	14	2	5+3	8	12
1	1	15—2	13	1	5+6	11	9
	—1	5+6	11		3+1	4	6
	—2	5+3	8		3+2	5	4
	—3	5+2	7		1—6	— 5	3
	—6	5+1	6		1+2	3	2
		5—1	4		1+3	4	1
		5—2	3				
		5—3	2				
		5—6	— 1				
		3+2	5				
		3+1	4				
		3—1	2				
		3—2	1				
		1+6	7				
		1+3	4				
		1+2	3				
		1—2	— 1				
		1—3	— 2				
		1—6	— 5				

On inscrit d'abord dans un premier tableau I les diviseurs positifs de 15 qui sont les valeurs possibles de a, et à côté tous les diviseurs de six valeurs possibles de b.

Dans un deuxième tableau II, on inscrit les sommes de chaque valeur de a avec chaque valeur de b première avec celle de a, et les résultats effectués de ces additions.

En comparant ces résultats avec les diviseurs de F(1) disposés dans un troisième tableau III, on reconnaît qu'on ne peut accepter que neuf associations possibles d'une valeur de a et d'une valeur correspondante de b.

Dans un quatrième tableau IV, on inscrit les neuf valeurs correspondantes de la différence $a - b$, et les résultats effectués de ces soustractions.

La comparaison de ces résultats avec les diviseurs de $F(-1)$ contenus dans un cinquième tableau V permet de réduire à quatre le nombre des associations possibles d'une valeur de a et d'une valeur de b.

Il ne peut donc exister que quatre diviseurs du premier degré du polynôme proposé : ces diviseurs sont

$$5x+2,\quad 3x-1,\quad x-2,\quad x-3;$$

vérifiés par la division, il n'en reste que deux d'acceptables, à savoir : $5x+2$, $3x-1$.

Tel est le procédé à peu près suivi dans toutes les Algèbres pour la détermination des racines commensurables, et qui résout la question proposée.

Diviseurs du second degré.

X. Tout diviseur du second degré d'un polynôme entier $F(x)$ a la forme ax^2+bx+c. D'après le n° V et en désignant par M, M_1, M_2, M_3 des diviseurs convenablement choisis et respectifs de $\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\beta^m F\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\alpha^m F\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\alpha^m F\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$, on doit avoir

$$\begin{aligned}
a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 &= M,\\
a\alpha^2 - b\alpha\beta + c\beta^2 &= M_1,\\
a\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2 &= M_2,\\
a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2 &= M_3.
\end{aligned}$$

Trois de ces équations suffisent pour déterminer a, b, c; la quatrième sera une équation de condition servant de moyen d'exclusion d'après le n° VII. Or, pour qu'un système de valeurs de M, M_1, M_2, M_3 puisse fournir pour a, b, c des valeurs entières satisfaisant aux quatre équations précédentes, il faut que $M+M_3$ soit un multiple de $\alpha^2+\beta^2$; qu'il en soit de même de M_1+M_2; que $M+M_3=M_1+M_2$; que $M-M_1$ soit un multiple de $2\alpha\beta$; qu'enfin $M-M_2$ le soit de $\alpha^2-\beta^2$. Les systèmes de valeurs de M, M_1, M_2, M_3, qui satisferont à ces conditions, seront généralement assez peu nombreux pour qu'on puisse tenter la résolution des systèmes d'équations correspondants.

Pour déterminer les valeurs de M, M_1, M_2 qui satisfont à ces conditions, on formera un tableau composé de neuf colonnes verticales; dans la deuxième, on inscrira l'une au-dessous de l'autre toutes les valeurs possibles de M, c'est-à-dire des diviseurs de $\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$; dans la première et la troisième, on inscrira respectivement, à gauche et à droite de chaque valeur de M, les restes positifs de ses divisions par $\alpha^2-\beta^2$ et par $2\alpha\beta$. De même, on placera dans la cinquième, et les unes au-dessous des autres, les valeurs de M_1, diviseurs de $\beta^m F\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$, et dans les quatrième et sixième colonnes, à gauche et à droite de chaque valeur de M_1, les restes positifs de ses divisions par $2\alpha\beta$ et par $\alpha^2+\beta^2$. Enfin, dans la huitième colonne, on placera l'une au-dessous de l'autre toutes les valeurs de M_2, diviseurs de $\alpha^m F\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, et dans les septième et neuvième, à gauche et à droite de chaque valeur de M_2, les restes positifs de ses divisions par $\alpha^2+\beta^2$ et par $\alpha^2-\beta^2$.

Pour qu'un système de valeurs de M, M_1, M_2 soit acceptable, il faut que $M-M_1$ soit multiple de $2\alpha\beta$, c'est-à-dire que les restes des divisions de M et M_1 par $2\alpha\beta$ soient égaux, ce qu'on constate à l'aide des nombres des troisième et quatrième colonnes; que M_1+M_2 soit un multiple de $\alpha^2+\beta^2$, c'est-à-dire que les restes des divisions de M_1 et M_2 par $\alpha^2+\beta^2$ forment une somme égale à $\alpha^2 + \beta^2$, ce que l'on constate à l'aide des nombres contenus dans les sixième et septième colonnes; enfin que $M - M_2$ soit un multiple de $\alpha^2 - \beta^2$, ce qui se voit à l'aide des restes des première et neuvième colonnes.

5	M	12	12	M_1	13	13	M_2	5
4	399	3	9	1089	10	10	816	1
3	133	1	3	363	12	5	408	3
2	57	9	1	121	4	12	272	2
1	21	9	3	99	8	9	204	4
4	19	7	9	33	7	6	136	1
2	7	7	11	11	11	11	102	2
3	3	3	9	9	9	3	68	3
1	1	1	3	3	3	12	51	1
4	— 1	11	1	1	1	9	48	3
2	— 3	9	11	— 1	12	8	34	4
3	— 7	5	9	— 3	10	11	24	4
1	— 19	5	3	— 9	4	4	17	2
4	— 21	3	1	— 11	2	3	16	1
3	— 57	3	3	— 33	6	12	12	2
2	—133	11	9	— 99	5	8	8	3
1	—399	9	11	— 121	9	6	6	1
			9	— 363	1	4	4	4
			3	—1089	3	3	3	3
						2	2	2
						1	1	1

M	M_1	M_2
399	— 9	204
133	121	48
57	9	17
57	— 363	272
57	— 363	12
21	1089	16
21	33	136
21	33	6
21	— 3	16
21	— 363	51
3	99	408
1	— 9	48
1	1	51
— 1	— 121	4
— 3	9	17
— 3	— 363	272
— 3	— 363	12
— 21	— 9	204
— 57	99	408
— 57	— 9	48
—133	11	2
—133	— 121	17
—399	1089	16
—399	33	136
—399	33	6
—399	— 3	16
—399	— 363	51

M	M_1	M_2
133	121	48
21	33	6
3	— 9	48
— 1	—121	4
— 3	9	17
— 3	—363	12
—133	—121	17
—399	—363	51

Pour éclaircir ce qui précède, prenons pour exemple le polynôme considéré dans le n° IX

$$F(x) = 15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6.$$

Posons $\alpha = 3$, $\beta = 2$; on a

$$\begin{aligned} 2^4 F(\tfrac{3}{2}) &= 399 = 3 \times 7 \times 19, \\ -2^4 F(-\tfrac{3}{2}) &= 1089 = 3^2 \times 11^2, \\ -3^4 F(\tfrac{2}{3}) &= 816 = 2^4 \times 3 \times 17, \\ -3^4 F(-\tfrac{2}{3}) &= 1044 = 2^2 \times 3^2 \times 29, \end{aligned}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 5, \quad 2\alpha\beta = 12, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 13.$$

Formons le tableau à neuf colonnes dont nous venons de nous occuper, et dans un second tableau à trois colonnes, et placé à droite du premier, nous disposerons par lignes horizontales les systèmes de valeurs de M, M_1, M_2 qui peuvent se correspondre d'après nos vérifications.

Pour un motif donné, il suffit d'inscrire dans le premier tableau les valeurs positives possibles de l'une des trois quantités M, M_1, M_2, soit de M_2.

Le tableau étant constitué, nous prenons l'une des valeurs de M, 399 par exemple. Le reste de sa division par 12 étant 3, les seules valeurs de M_1 qui puissent correspondre sont 363, 99, 3, —9, —33, —1089; le reste de la division de 363 par 13 étant 12, les seules valeurs de M_2 qui puissent lui correspondre sont celles qui, divisées par 13, fournissent pour reste 1, soit 1; mais comme cette valeur de M_2 divisée par 5 donne pour reste 1, tandis que 399 donne le reste différent 4, elle est à rejeter. On reconnaît de même que 399 ne peut s'associer à 99 ni à 3. — 9 divisé par 13 donne pour reste 4 et peut s'associer aux valeurs de M_2, qui, divisées par 13, donnent pour reste 9; ces valeurs sont 204, 48; la première seule divisée par 5 donne le même reste que 399, et par conséquent est la seule acceptable. Nous inscrirons donc dans le second tableau comme pouvant se correspondre les valeurs de M, M_1, M_2 respectivement égales à 399, -9, 204. On voit par ce moyen que 399 ne peut s'associer ni à -33 ni à -1089.

En répétant successivement les mêmes opérations pour chacune des valeurs de M, on constitue le tableau complet des valeurs de M, M_1, M_2 qui peuvent être associées en groupes, au nombre de 27, et consignées dans le second tableau.

Le nombre de ces associations peut être diminué en observant que $M_1 + M_2 = M + M_3$; on ne devra donc retenir que les systèmes pour lesquels $M_1 + M_2 - M$ sera un diviseur de $3^4 F\left(-\frac{2}{3}\right)$; il est facile de juger s'il en est ainsi en formant les différentes valeurs de $M_1 + M_2 - M$ prises dans le second tableau et en les comparant au tableau des diviseurs de $3^4 F\left(-\frac{2}{3}\right)$.

On reconnaît ainsi qu'il n'y en a que huit qui sont acceptables, et on les a placés dans un troisième tableau voisin des deux premiers.

De la résolution des huit systèmes d'équations correspondants on déduit les huit trinômes diviseurs possibles

$$\begin{array}{ll} 15x^2 + x - 2, & x^2 + x - 3, \\ 3x^2 - x, & 15x^2 - 30x + 12, \\ 3x^2 - x - 6, & 19x^2 + x - 11, \\ 5x^2 - 10x + 4, & 57x^2 + 3x - 33. \end{array}$$

On reconnaît qu'on peut rejeter *a priori* le sixième et le huitième comme n'ayant pas leurs coefficients premiers entre eux; le septième, dont le coefficient du premier terme, 19, ne divise pas le coefficient 15 du premier terme de $F(x)$; le deuxième et le quatrième, dont les termes indépendants 0, 4 ne divisent pas le terme indépendant 6 du polynôme $F(x)$. Il ne reste donc à essayer par la division que le premier, le troisième et le cinquième; le premier et le cinquième sont les seuls pour lesquels elle se fasse. Le polynôme proposé n'admet donc que deux diviseurs du second degré à coefficients commensurables premiers entre eux

$$15x^2 + x - 3,$$
$$x^2 + x - 3.$$

XI. On sait qu'une équation algébrique de degré m, à coefficients commensurables, qui admet une racine incommensurable d'une équation du second degré à coefficients commensurables, admet aussi la seconde racine de cette équation; la détermination des diviseurs du second degré à coefficients commensurables d'un polynôme de degré m ayant la même propriété permet de déterminer les racines incommensurables de la forme $a + \sqrt{b}$ d'une équation algébrique à coefficients commensurables.

Diviseurs du troisième degré.

XII. Les diviseurs du troisième degré d'une fonction entière $F(x)$ ont la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

et, toujours d'après le n° V, en désignant par M, M_1, M_2, M_3 des diviseurs convenablement choisis et respectifs de

$$\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \beta^m F\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \alpha^m F\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \alpha^m F\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

on a

$$a\alpha^3 + b\alpha^2\beta + c\alpha\beta^2 + d\beta^3 = M,$$
$$a\alpha^3 - b\alpha^2\beta + c\alpha\beta^2 - d\beta^3 = M_1,$$
$$a\beta^3 + b\alpha\beta^2 + c\alpha^2\beta + d\alpha^3 = M_2,$$
$$a\beta^3 - b\alpha\beta^2 + c\alpha^2\beta - d\alpha^3 = M_3.$$

La résolution de ces quatre équations fera connaître les valeurs inconnues et cherchées de a, b, c, d. Recherchons d'abord, comme dans le n° X, des conditions simples auxquelles soient assujettis M, M_1, M_2, M_3, pour pouvoir se correspondre. Ces conditions se déduisent en général de la propriété que doit avoir un système de valeurs de M, M_1, M_2, M_3, de fournir pour a, b, c, d des valeurs entières.

Multiplions la première de ces quatre équations par $\alpha+\beta$, la deuxième par $\alpha-\beta$, la troisième par $\alpha+\beta$, la quatrième par $\beta-\alpha$; elles deviennent

$$a\alpha^4+(a+b)\alpha^3\beta+(b+c)\alpha^2\beta^2 \\ +(c+d)\alpha\beta^3+d\beta^4=\mathrm{M}\,(\alpha+\beta),$$

$$a\alpha^4-(a+b)\alpha^3\beta+(b+c)\alpha^2\beta^2 \\ -(c+d)\alpha\beta^3+d\beta^4=\mathrm{M}_1(\alpha-\beta),$$

$$a\beta^4+(a+b)\alpha\beta^3+(b+c)\alpha^2\beta^2 \\ +(c+d)\alpha^3\beta+d\alpha^4=\mathrm{M}_2(\alpha+\beta),$$

$$a\beta^4-(a+b)\alpha\beta^3+(b+c)\alpha^2\beta^2 \\ -(c+d)\alpha^3\beta+d\alpha^4=\mathrm{M}_3(\beta-\alpha).$$

Retranchons maintenant la seconde de la première, la troisième de la seconde, la quatrième de la troisième, la première de la quatrième, on a

$$\mathrm{M}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{M}_1(\alpha-\beta)=2\alpha\beta[\alpha^2(a+b)+\beta^2(c+d)],$$

$$\mathrm{M}_1(\alpha-\beta)-\mathrm{M}_2(\alpha+\beta) \\ =(\alpha^2+\beta^2)[(a-b)(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\beta(a+b+c+d)],$$

$$\mathrm{M}_2(\alpha+\beta)-\mathrm{M}_3(\beta-\alpha)=2\alpha\beta[\beta^2(a+b)+\alpha^2(c+d)],$$

$$\mathrm{M}_3(\beta-\alpha)-\mathrm{M}\,(\alpha+\beta) \\ =(\alpha^2+\beta^2)[(a-d)(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\beta(a+b+c+d)].$$

On voit, d'après cela, que, pour qu'un système de valeurs de M, M_1, M_2, M_3 puisse être acceptable, il faut que $M(\alpha + \beta)$ et $M_1(\alpha - \beta)$ divisés par $2\alpha\beta$ donnent le même reste; qu'il en soit de même de $M_1(\alpha - \beta)$ et $M_2(\alpha + \beta)$, divisés par $\alpha^2 + \beta^2$; $M_2(\alpha + \beta)$ et $M_3(\beta - \alpha)$, divisés par $2\alpha\beta$; $M_3(\beta - \alpha)$ et $M(\alpha + \beta)$, divisés par $\alpha^2 + \beta^2$.

On vérifie aussi facilement sur les quatre équations initiales que $M + M_2$ et que $M_1 + M_3$ sont des multiples de $\alpha + \beta$; donc M et $-M_2$, divisés par $\alpha + \beta$, doivent fournir le même reste; il en est de même de M_1 et $-M_3$. Pour faciliter la vérification de ces conditions, on formera un tableau composé de seize colonnes verticales. Dans la seconde, on écrira tous les diviseurs de $\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ l'un au-dessous de l'autre; cette colonne renferme ainsi les valeurs possibles de M, à gauche de chaque valeur de M, et dans la première colonne on placera le reste de la division de $M(\alpha + \beta)$ par $\alpha^2 + \beta^2$; à droite de chaque valeur de M on placera dans la troisième colonne le reste de sa division par $\alpha + \beta$, et dans la quatrième colonne le reste de la division de $M(\alpha + \beta)$ par $2\alpha\beta$.

La sixième colonne renfermera les valeurs de M_1, chacune précédée dans la cinquième colonne du reste de la division de $M_1(\alpha - \beta)$ par $2\alpha\beta$, et suivie dans la septième du reste de la division de M_1 par $\alpha + \beta$, et dans la huitième du reste de la division de $M_1(\alpha - \beta)$ par $(\alpha^2 + \beta^2)$.

Dans la dixième, on placera les valeurs de M_2; à gauche de chaque valeur de M_2, dans la neuvième colonne, on mettra le reste de la division de $M_2(\alpha + \beta)$ par $\alpha^2 + \beta^2$; à droite dans la onzième, le reste de la division de $-M_2$

par $\alpha + \beta$, et dans la douzième le reste de la division de $M_2(\alpha + \beta)$ par $2\alpha\beta$.

Enfin la quatorzième colonne renfermera les valeurs de M_3 ; à gauche de chacune d'elles, on placera dans la treizième colonne le reste de la division de $M_3(\beta - \alpha)$ par $2\alpha\beta$; à droite dans la quinzième le reste de la division de $-M_3$ par $\alpha + \beta$, et dans la seizième le reste de la division de $M_3(\beta - \alpha)$ par $\alpha^2 + \beta^2$.

Il est toujours entendu, pour un motif donné, qu'on peut n'inscrire dans ce tableau que les valeurs positives de l'une des quatre quantités M, M_1, M_2, M_3.

Par le moyen de ce tableau, on détermine les systèmes de valeurs de M, M_1, M_2, M_3, qui peuvent se correspondre d'après les conditions qu'on vient d'établir, et on les consignera dans un second tableau. Si le nombre de ces systèmes est considérable, on pourra éliminer ceux qui fournissent une valeur de a, qui ne divise pas A, ou une valeur de d qui ne divise pas A_m. Les valeurs de a et de d sont assez simples; on trouve, en ajoutant et retranchant la première et la deuxième des équations considérées, ainsi que la troisième et la quatrième,

$$2a\alpha^3 + 2c\alpha\beta^2 = M + M_1, \quad 2b\alpha^2\beta + 2d\beta^3 = M - M_1,$$

$$2a\beta^3 + 2c\alpha^2\beta = M_2 + M_3, \quad 2b\alpha\beta^2 + 2d\alpha^3 = M_2 - M_3,$$

d'où l'on déduit facilement

$$a = \frac{\alpha(M + M_1) - \beta(M_2 + M_3)}{2(\alpha^4 - \beta^4)},$$

$$d = \frac{\alpha(M_2 - M_3) - \beta(M - M_1)}{2(\alpha^4 - \beta^4)}.$$

Si l'on accepte comme convenable un système de valeurs de M, M_1, M_2, M_3, et qu'on veuille faire le calcul des valeurs correspondantes de a, b, c, d, au lieu de les calculer directement, il peut être plus commode de faire le calcul initial des quantités $a+c$, $a-c$, $b+d$, $b-d$, définies par les formules suivantes, se déduisant facilement de celles qui précèdent :

$$a+c = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left(\frac{M+M_1}{\alpha}+\frac{M_2+M_3}{\beta}\right),$$

$$a-c = \frac{1}{2(\alpha^2-\beta^2)}\left(\frac{M-M_1}{\alpha}-\frac{M_2-M_3}{\beta}\right),$$

$$b+d = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left(\frac{M-M_1}{\beta}+\frac{M_2-M_3}{\alpha}\right),$$

$$b-d = \frac{1}{2(\alpha^2-\beta^2)}\left(\frac{M-M_1}{\beta}-\frac{M_2-M_3}{\alpha}\right).$$

XIII. Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple. Prenons

$$\begin{aligned} F(x) = 18x^7 + 79x^6 - 55x^5 - 310x^4 \\ + 20x^3 + 307x^2 + 29x - 40. \end{aligned}$$

Posons

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2,$$

on a

$$2\alpha\beta = 12, \quad \alpha^2+\beta^2 = 13, \quad \alpha+\beta = 5,$$
$$\alpha-\beta = 1, \quad \beta-\alpha = -1;$$

de plus, on trouve

$$-2^7 F\left(\frac{3}{2}\right) = 2288, \quad -2^7 F\left(-\frac{3}{2}\right) = 2516,$$

$$3^7 F\left(\frac{2}{3}\right) = 133878, \quad 3^7 F\left(-\frac{2}{3}\right) = 50466.$$

Formons sur ces nombres les deux tableaux dont on a donné l'explication générale dans le numéro précédent.

5/13	M	5	5/12	12	M₁	5	13	5/13	M₂	—1/5	5/12	—1/12	M₃	—1/5	—1/13
0	2288	3	4	8	2516	1	7	7	133878	2	6	6	50466	4	0
0	1144	4	8	10	1258	3	10	10	66939	1	3	3	25233	2	0
0	572	2	4	5	629	4	5	11	44626	4	2	2	16822	3	0
0	286	1	2	4	148	3	5	12	22313	2	1	1	8411	4	0
0	208	3	8	2	74	4	9	7	2526	4	6	6	3882	3	5
9	176	1	4	8	68	3	3	10	1263	2	3	3	1941	4	9
0	143	3	7	1	37	2	11	11	842	3	10	2	1294	1	6
0	104	4	4	10	34	4	8	12	421	4	5	1	647	3	3
11	88	3	8	5	17	2	4	4	318	2	6	6	78	2	0
0	52	2	8	4	4	4	4	2	159	1	3	9	39	1	0
12	44	4	4	2	2	2	2	10	106	4	2	10	26	4	0
0	26	1	10	1	1	1	1	5	53	2	1	11	13	2	0
6	22	2	2	11	— 1	4	12	4	6	4	6	6	6	4	7
2	16	1	8	10	— 2	3	11	2	3	2	3	9	3	2	10
0	13	3	5	8	— 4	1	9	10	2	3	10	10	2	3	11
3	11	1	7	7	— 17	3	9	5	1	4	5	11	1	4	12
1	8	3	4	2	— 34	1	5	8	— 1	1	7	1	— 1	1	1
7	4	4	8	11	— 37	3	2	3	— 2	2	2	2	— 2	2	2
10	2	2	10	4	— 68	2	10	11	— 3	3	9	3	— 3	3	3
5	1	1	5	10	— 74	1	4	9	— 6	1	6	6	— 6	1	6
				8	— 148	2	8	8	— 53	3	11	1	— 13	3	0
				7	— 629	1	8	3	— 106	1	10	2	— 26	1	0
				2	—1258	2	3	11	— 159	4	9	3	— 39	4	0
				4	—2516	4	6	9	— 318	3	6	6	— 78	3	0
								1	— 421	1	7	11	— 647	2	10
								2	— 842	2	2	10	— 1294	4	7
								3	— 1263	3	9	9	— 1941	1	4
								6	— 2526	1	6	6	— 3882	2	8
								1	— 22313	3	11	11	— 8411	1	0
								2	— 44626	1	10	10	—16822	2	0
								3	— 66939	4	9	9	—25233	3	0
								6	—133878	3	6	6	—50466	1	0

M	M_1	M_2	M_3
2288	— 68	2	—16822
2288	—2516	—133878	50466
1144	2516	2526	—50466
1144	68	— 66939	—25233
572	148	53	— 13
572	4	318	50466
572	— 68	1263	25233
286	74	— 6	50466
286	2	159	25233
286	2	— 44626	—16822
286	—1258	— 106	—16822
208	68	— 1263	—25233
208	— 4	— 318	—50466
208	— 148	— 53	13
143	— 17	— 318	— 78
143	— 629	— 53	— 8411
104	4	6	50466
52	2516	133878	—50466
52	68	— 2	16822

M	M_1	M_2	M_3
208	— 148	— 53	13
143	— 17	— 318	— 78

a	*b*	*c*	*d*
2	13	— 2	— 7
9	8	—15	— 8

Après avoir formé nos tableaux, prenons dans le premier une des valeurs de M, 2288 par exemple; le reste de la division de son quintuple par 12 étant 4, il ne peut y avoir de valeurs correspondantes de M_1 que celles qui, divisées par 12, donnent pour reste 4, à savoir 148, 4, — 68, — 2516, que nous allons examiner séparément.

148 divisé par 13 donnant pour reste 5, et 2288 divisé par 5 donnant pour reste 3, on ne peut accepter de valeurs correspondantes de M_2 que celles dont le quintuple divisé par 13 donne pour reste 5, et dont le produit par —1 donne le reste 3. Or il n'en existe pas : donc 148 ne peut s'associer à 2288. Passons à 4 qui, divisé par 13, donne le reste 4; les valeurs de M_2 qui peuvent correspondre ont un quintuple qui, divisé par 13, donne pour reste 4, et un produit par —1 qui, divisé par 5, donne

8.

pour reste 3 : on reconnaît, comme pour 148, qu'il n'en existe pas.

— 68 divisé par 13 donne pour reste 10 ; on ne peut prendre de valeurs correspondantes de M_2 que celles dont le quintuple divisé par 13 donne le reste 10, et dont le produit par — 1, divisé par 5, donne le reste 3. Il n'y a que 2 qui jouisse de cette propriété ; le quintuple de 2 divisé par 12 donne le reste 10, — 68 divisé par 5 donne pour reste 2, le quintuple de 2288 divisé par 13 donne pour reste zéro ; une valeur de M_3 ne peut s'associer à

$$M = 2288, \quad M_1 = -68, \quad M_2 = 2,$$

que tout autant que son produit par — 1, divisé par 12 donne le reste 10, divisé par 5 donne pour reste 2, divisé par 13 donne pour reste zéro ; il n'y a parmi les valeurs de M_3 que — 16822 qui jouisse de cette propriété. On peut donc accepter le système

$$M = 2288, \quad M_1 = -68, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = -16822,$$

consigné dans la première ligne horizontale du second tableau. On reconnaît de même que $M_1 = 2288$ peut s'associer à

$$M_1 = -2516, \quad M_2 = -133878, \quad M_3 = 50466,$$

et qu'il ne peut être réuni à aucun autre système de valeurs de M_1, M_2, M_3.

En répétant les mêmes vérifications sur chacune des valeurs de M, on reconnaît qu'on ne peut accepter que dix-neuf systèmes de valeurs de M, M_1, M_2, M_3, systèmes inscrits dans le second tableau. Le nombre de ces systèmes étant encore assez considérable, nous allons calculer la valeur de a, relative à chacun d'eux, d'après une formule connue, et nous ne retiendrons que ceux pour lesquels a sera un diviseur de 18, coefficient du premier terme de $F(x)$.

On trouve ainsi qu'il n'existe que deux systèmes acceptables inscrits dans un troisième tableau, placé au-dessous du second; et dans un quatrième tableau, on a inscrit les valeurs correspondantes de a, b, c, d.

Le premier des systèmes de valeurs de a, b, c, d ne convient pas, parce que la valeur de $d = -7$ ne divise pas -40, terme indépendant de $F(x)$. Le seul diviseur du troisième degré à coefficients entiers premiers entre eux que puisse admettre $F(x)$ est donc

$$9x^3 + 8x^2 - 15x - 8.$$

Effectuant la division, elle réussit, et l'on trouve pour quotient

$$2x^4 + 7x^3 - 9x^2 - 13x + 5.$$

XIV. On peut, par des moyens analogues, déterminer les diviseurs à coefficients commensurables premiers entre eux de tous les degrés d'un polynôme donné; seulement la longueur des opérations croît avec le degré, c'est-à-dire avec le nombre des coefficients à déterminer dans le diviseur. On a vu, dans les trois cas examinés, que généralement la question se résume à déterminer les associations possibles des diviseurs désignés par M, $M_1, \ldots,$ M_p dans le n° V, et à rejeter les autres; et qu'on y est parvenu par un moyen qui permet de voir facilement si deux quelconques de ces diviseurs peuvent faire partie d'un même groupe. Or on peut toujours trouver un tel moyen de la manière suivante; considérons les deux égalités

$$a\alpha_g^p + b\alpha_g^{p-1}\beta_g + \ldots + l\beta_g^p = M_g,$$
$$a\alpha_k^p + b\alpha_k^{p-1}\beta_k + \ldots + l\beta_k^p = M_k;$$

multiplions la première par β_k^p, la seconde par β_g^p, et retranchons-les, on a

$$a\left(\alpha_g^p \beta_k^p - \alpha_k^p \beta_g^p\right) + b\beta_k\beta_g\left(\alpha_g^{p-1}\beta_k^{p-1} - \alpha_k^{p-1}\beta_g^{p-1}\right)$$
$$+ c\beta_k^2\beta_g^2\left(\alpha_g^{p-2}\beta_k^{p-2} - \alpha_g^{p-2}\beta_g^{p-2}\right) + \ldots = M_g\beta_k^p - M_k\beta_g^p.$$

On en conclut que $M_g\beta_k^p - M_k\beta_g^p$ est divisible par $\alpha_g\beta_k - \alpha_k\beta_g$; en conséquence, les restes des divisions de $M_g\beta_k^p$ et de $M_k\beta_g^p$ par $\alpha_g\beta_k - \alpha_k\beta_g$ doivent être égaux; de là une vérification permettant de reconnaître, au moyen d'un tableau analogue à ceux dont nous nous sommes déjà servis, si les diviseurs M_g, M_k peuvent être associés.

XV. On établit en Algèbre qu'une équation à coefficients commensurables, dont le degré ne surpasse pas cinq et qui n'a pas de racines commensurables, ne peut avoir de racines multiples, à moins qu'elle ne soit du quatrième degré et que son premier membre ne soit un carré parfait. En d'autres termes, si un polynôme à coefficients commensurables, dont le degré ne surpasse pas cinq, n'admet aucun facteur du premier degré à coefficients commensurables, il n'est divisible par aucun facteur à coefficients commensurables élevé à une puissance supérieure à la première, à moins qu'il ne soit du quatrième degré et carré parfait.

De même, si un polynôme à coefficients commensurables, dont le degré ne surpasse pas huit, n'admet pas de facteurs du premier ou du second degré à coefficients commensurables, il n'est divisible par aucun facteur à coefficients commensurables élevé à une puissance supérieure à la première, à moins qu'il ne soit du sixième ou du huitième degré, et dans ces deux cas carré parfait, c'est-à-dire que l'équation formée en égalant ce polynôme à zéro ne peut avoir de racines égales à moins que son premier membre ne soit un carré.

En effet, dans les hypothèses faites, le facteur multiple qui pourrait entrer dans le polynôme considéré serait au moins du troisième degré et devrait entrer dans le polynôme au moins deux fois, ce qui exigerait que ce polynôme fût au moins du sixième degré; dans ce cas, le polynôme serait un carré. Si le polynôme était du septième ou du huitième degré, et divisible par le carré d'un facteur du troisième à coefficients commensurables, le quotient serait aussi un diviseur du premier ou du second degré à coefficients commensurables, ce qui est contraire à l'hypothèse; si le facteur multiple était du quatrième degré, le polynôme proposé, dont le degré ne surpasse pas huit, serait le carré de ce facteur multiple. On voit, par un raisonnement analogue, qu'un polynôme à coefficients commensurables dont le degré ne surpasse pas onze, n'admettant pas de diviseur à coefficients commensurables des degrés un, deux, trois, ne peut admettre de facteur multiple, à moins qu'il ne soit des degrés huit ou dix et dans les deux cas carré parfait.

XVI. Il est facile d'appliquer ce qui a été dit dans les numéros de I à XIV à la recherche des communs diviseurs d'un degré donné, de deux ou plusieurs polynômes à coefficients commensurables. Cette recherche serait même simplifiée, car, si l'on désigne par $F(x)$, $F_1(x)$,... ces différents polynômes, on ne devrait accepter pour M que les valeurs des diviseurs communs de

$$\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \beta^{m'} F_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \ldots .$$

XVII. La recherche des facteurs multiples, d'un degré donné, d'un polynôme à coefficients commensurables, peut encore se déduire de ce qui précède par une modification encore plus restrictive; en effet, si l'on suppose que le polynôme cherché doive entrer à la puissance p dans le polynôme $F(x)$, on ne devra accepter pour M qu'un diviseur commun des nombres

$$\beta^m F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),\quad \beta^{m-1} F'\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),\ldots,\quad \beta^{m-p+1} F^{p-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right);$$

le diviseur devant entrer p fois dans le premier, $(p-1)$ fois dans le second,..., une fois dans le dernier.

En usant convenablement de ces principes, on peut arriver plus facilement à la détermination des facteurs multiples, des degrés différents, qui peuvent entrer dans un polynôme à coefficients commensurables, que par le procédé du plus grand commun diviseur algébrique.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER PAR LES LIGNES DE COURBURE DE L'HYPERBOLOÏDE RÉGLÉ.

PAR M. FLOQUET,
Professeur au lycée de Belfort.

Soit l'hyperboloïde réglé

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

où nous supposons $a > b$.

Coordonnées u et v.

Considérons les deux couples d'équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}\cos u+\sin u, \\[2ex] \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\sin u-\cos u; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}\cos v-\sin v, \\[2ex] \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\sin v+\cos v. \end{cases}$$

u variant de zéro à 2π, le couple (1) représente successivement toutes les génératrices de l'un des systèmes, et, v variant de zéro à 2π, le couple (2) donne toutes les génératrices de l'autre. Or nous pouvons prendre comme lignes coordonnées d'un point de la surface les deux génératrices qui passent par ce point; mais ces deux génératrices sont définies par un couple de valeurs des paramètres angulaires u et v : donc nous dirons que les deux coordonnées d'un point de l'hyperboloïde sont u et v.

Transformation des coordonnées.

Évaluons les coordonnées x, y, z d'un point de la surface en fonction de son u et de son v. Il nous suffit, pour cela, de résoudre par rapport à x, y, z les quatre équations (1) et (2), lesquelles se réduisent à trois. Nous trouvons ainsi

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= a\,\frac{\cos\dfrac{u+v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}},\\ y &= b\,\frac{\sin\dfrac{u+v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}},\\ z &= c\,\frac{\cos\dfrac{u-v}{2}}{\sin\dfrac{u-v}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Problème. — *Trouver les deux équations en u et v qui représentent les deux lignes de courbure passant par le point* $(u = 0, v = v_0)$.

Pour résoudre la question, nous pouvons opérer de deux façons : 1° soit en remplaçant simplement x et y par les valeurs (3) dans l'équation connue de la projection d'une ligne de courbure sur le plan des xy, puis déterminant convenablement la constante; 2° soit en suivant la marche directe.

Premier procédé. — L'équation (voir *Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. II, p. 509) de la projection d'une ligne de courbure sur le plan des xy est

$$\begin{aligned} &a^2(b^2+c^2)x^2C'^2 \\ &\quad+[b^2(a^2+c^2)x^2-a^2(b^2+c^2)y^2-a^2b^2(a^2-b^2)]C' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -b^2(a^2+c^2)y^2=0. \end{aligned}$$

Or les formules (3) donnent

$$x^2=a^2\frac{1+\cos(u+v)}{1-\cos(u-v)},\quad y^2=b^2\frac{1-\cos(u+v)}{1-\cos(u-v)}.$$

Substituons

$$\begin{aligned} &a^4\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}[1+\cos(u+v)]C'^2 \\ &\quad+a^2b^2\left\{1+\cos(u+v)-\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}[1-\cos(u+v)]\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}[1-\cos(u-v)]\right\}C' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -b^4[1-\cos(u+v)]=0. \end{aligned}$$

Mais si nous posons

$$C'=\frac{b^2}{a^2}C,\quad \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}=k^2\quad (k \text{ compris entre zéro et } 1),$$

l'équation précédente s'écrira

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-k^2)[1+\cos(u+v)]C^2 \\ &\quad-2[(1-k^2)\sin u\sin v-\cos u\cos v]C \\ &\qquad\qquad -[1-\cos(u+v)]=0. \end{aligned}\right.$$

Déterminons maintenant la constante C, de façon que, pour $u=0$, on ait $v=v_0$,

$$(5)\quad (1-k^2)(1+\cos v_0)C^2+2\cos v_0 . C-(1-\cos v_0)=0;$$

puis éliminons C : le résultat de l'élimination de C entre les deux équations du second degré (4) et (5) est, d'après la formule ordinaire,

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \cos v_0 [1 + \cos(u+v)] \\
&\qquad + (1+\cos v_0)[(1-k^2)\sin u \sin v - \cos u \cos v] \Big\} \\
&\qquad \times \Big\{ \cos v_0 [1 - \cos(u+v)] \\
&\qquad\qquad + (1-\cos v_0)[(1-k^2)\sin u \sin v - \cos u \cos v] \Big\} \\
&\qquad\qquad = (1-k^2)[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2.
\end{aligned}$$

Ce résultat se met successivement sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1-k^2)[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2 \\
&\quad = [\cos v_0 - \cos(u+v) - k^2 \sin u \sin v]^2 - k^4 \cos^2 v_0 \sin^2 u \sin^2 v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k^2[\cos v_0 - \cos(u+v)]^2 \\
&\quad - 2k^2[\cos v_0 - \cos(u+v)]\sin u \sin v + k^4 \sin^2 v_0 \sin^2 u \sin^2 v = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v)\sin^2 v_0 - \cos(u+v)\cos(u-v) - 1 \\
&\quad = -2\cos u \cos v \cos v_0.
\end{aligned}$$

Élevons maintenant les deux membres au carré, et remplaçons $\cos^2 v_0$ par $1 - \sin^2 v_0$:

$$\begin{aligned}
&[(1 - k^2\sin^2 u \sin^2 v)\sin^2 v_0 - \cos(u+v)\cos(u-v) - 1]^2 \\
&\quad = 4\cos^2 u \cos^2 v (1 - \sin^2 v_0).
\end{aligned}$$

Ordonnons par rapport à $\sin v_0$:

$$\begin{aligned}
&(1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v)^2 \sin^4 v_0 \\
&\quad + 2\Big\{ 2\cos^2 u \cos^2 v - (1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v) \\
&\qquad\qquad \times [1 + \cos(u+v)\cos(u-v)] \Big\} \sin^2 v_0 \\
&\qquad\qquad + [\cos(u+v)\cos(u-v) + 1]^2 - 4\cos^2 u \cos^2 v = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, remarquant les deux identités

$$\begin{aligned}
&2\cos^2 u \cos^2 v - (1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v)[1 + \cos(u+v)\cos(u-v)] \\
&\quad = -[\sin^2 u (1 - k^2 \sin^2 v)\cos^2 v + \sin^2 v (1 - k^2 \sin^2 u)\cos^2 u],
\end{aligned}$$

$$[\cos(u+v)\cos(u-v) + 1]^2 - 4\cos^2 u \cos^2 v = (\cos^2 u - \cos^2 v)^2,$$

nous écrirons notre équation

$$\begin{aligned}(1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v)^2 \sin^4 v_0 \\ - 2[\sin^2 u\,(1 - k^2 \sin^2 v) \cos^2 v + \sin^2 v\,(1 - k^2 \sin^2 u) \cos^2 u] \\ \times \sin^2 v_0 + (\cos^2 u - \cos^2 v)^2 = 0.\end{aligned}$$

Elle est alors de la forme bicarrée

$$\alpha^2 \sin^4 v_0 - 2\beta \sin^2 v_0 + \gamma^2 = 0.$$

Résolvons par rapport à $\sin v_0$

$$\sin v_0 = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta + \alpha\gamma}{2}} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta - \alpha\gamma}{2}};$$

mais on a

$$\frac{\beta + \alpha\gamma}{2} = \sin^2 v \cos^2 u (1 - k^2 \sin^2 u),$$

$$\frac{\beta - \alpha\gamma}{2} = \sin^2 u \cos^2 v (1 - k^2 \sin^2 v).$$

Donc la valeur de $\sin v_0$ est

$$(6) \quad \sin v_0 = \frac{\pm \sin v \cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \pm \sin u \cos v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2 v}.$$

Il semblerait, d'après cela, que $\sin v_0$ a quatre valeurs; mais il n'en est rien : deux seulement répondent à la question. L'équation (5) exprime, en effet, non pas que, pour $u = 0$, on a $v = v_0$, comme il le faudrait, mais simplement que, pour $u = 0$, on a $\cos v = \cos v_0$, c'est-à-dire $v = v_0$ ou $v = 2\pi - v_0$. De là l'introduction de deux valeurs étrangères au problème, puisqu'elles appartiennent à $\sin(2\pi - v_0)$ ou $-\sin v_0$, et non à $+\sin v_0$. Il est facile de distinguer ces deux solutions étrangères; car, dans la formule (6), faisons les hypothèses $u = 0$ et $v = v_0$, nous trouvons

$$\sin v_0 = \pm \sin v_0 \pm 0.$$

C'est donc le signe — du premier signe $\pm$ qu'il faut supprimer pour les éliminer, de sorte que, finalement, les deux équations en u et v qui représentent les deux lignes de courbure passant par le point $(u=0,\ v=v_0)$ sont

$$(7)\quad \sin v_0 = \frac{+\sin v\cos u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\pm\sin u\cos v\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}{1-k^2\sin^2 u\sin^2 v}.$$

Second procédé. — Suivons la marche directe. Calculons dx, dy, dz :

$$dx = a\frac{\cos u\,dv - \cos v\,du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}},\qquad dy = b\,\frac{\sin u\,dv - \sin v\,du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}},$$

$$dz = c\,\frac{dv - du}{2\sin^2\frac{u-v}{2}};$$

puis écrivons que $(p\,dx + q\,dy - dz)$ est nul

$$(a\cos u.p + b\sin u.q - c)\,dv - (a\cos v.p + b\sin v.q - c)\,du = 0,$$

ce qui donne

$$a\cos u.p + b\sin u.q = c,$$
$$a\cos v.p + b\sin v.q = c.$$

De là déduisons p et q :

$$p = \frac{c}{a}\,\frac{\cos\frac{u+v}{2}}{\cos\frac{u-v}{2}},\qquad q = \frac{c}{b}\,\frac{\sin\frac{u+v}{2}}{\cos\frac{u-v}{2}}.$$

Remplaçons enfin, dans l'égalité

$$\frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq},$$

les lettres x, y, z, p, q par leurs valeurs en u et v, et, toutes réductions faites, nous obtenons l'équation

$$(8)\qquad \frac{du^2}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + c^2} = \frac{dv^2}{a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v + c^2},$$

qui est l'équation différentielle des lignes de courbure de l'hyperboloïde proposé. Or, si nous désignons toujours $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}$ par k^2, l'équation (8) s'écrit

$$(9) \qquad \frac{du^2}{1 - k^2 \sin^2 u} = \frac{dv^2}{1 - k^2 \sin^2 v};$$

donc l'équation différentielle à intégrer n'est autre chose que l'équation d'Euler. Si nous posions

$$\sin u = X, \quad \sin v = Y,$$

nous l'aurions sous sa forme ordinaire, savoir :

$$(10) \qquad \frac{dX^2}{(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)} = \frac{dY^2}{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}.$$

En intégrant alors cette équation par une des méthodes connues, nous achèverions la solution du problème.

Intégration de l'équation d'Euler.

Le rapprochement des deux procédés de solution donne l'intégrale de l'équation d'Euler et en fournit une méthode d'intégration. Il est évident, en effet, que l'équation (7) est l'intégrale de l'équation différentielle (9), et par suite que l'équation

$$Z = \frac{+ Y\sqrt{1 - X^2}\sqrt{1 - k^2 X^2} \pm X\sqrt{1 - Y^2}\sqrt{1 - k^2 Y^2}}{1 - k^2 X^2 Y^2}$$

est l'intégrale de l'équation différentielle (10), $\sin u$, $\sin v$ et $\sin v_0$ ayant été remplacés par X, Y et Z. Ainsi le problème proposé conduit à l'intégrale algébrique d'Euler.

L'équation (10) se décompose en deux, il est vrai,

$$(11) \qquad \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)}} = \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}},$$

$$(12) \qquad \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)}} + \frac{dY}{\sqrt{(1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2)}} = 0;$$

mais il n'en résulte aucun inconvénient, et l'on voit facilement que (11) intègre

$$(13)\quad Z = \frac{+Y\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-k^2X^2} - X\sqrt{1-Y^2}\sqrt{1-k^2Y^2}}{1-k^2X^2Y^2},$$

tandis que (12) intègre

$$(14)\quad Z = \frac{+Y\sqrt{1-X^2}\sqrt{1-k^2X^2} + X\sqrt{1-Y^2}\sqrt{1-k^2Y^2}}{1-k^2X^2Y^2}.$$

Si, en effet, nous supposons $k=0$, l'ellipse de gorge devient circulaire, mais les termes des équations (11) et (12) aussi, de sorte qu'on les intègre de suite.

(11) devient $du = dv$, et donne, par conséquent, $v_0 = v - u$ (parallèle), ce que fournit précisément (7) quand on y garde le signe —, c'est-à-dire ce que fournit (13).

(12) devient $du + dv = 0$, et donne, par conséquent, $v_0 = v + u$ (méridien), ce que fournit précisément (7) quand on y garde le signe +, c'est-à-dire ce que fournit (14).

Ainsi (11) est l'intégrale de (13), et (12) celle de (14).

En résumé, on voit que l'équation en u et v de la ligne de courbure d'un hyperboloïde réglé est précisément l'intégrale algébrique d'Euler où l'on a introduit les amplitudes. Les lignes de courbure de cette surface intègrent donc l'équation différentielle d'Euler, grâce à l'emploi de ces coordonnées u et v; et même l'intégrale s'amène facilement à la forme qu'on lui donne d'habitude.

SUR LA DIACAUSTIQUE D'UNE SURFACE PLANE;

PAR M. J. MOUTIER.

Soient deux milieux réfringents séparés par une surface plane, A un point lumineux, MN l'intersection de cette surface par un plan perpendiculaire mené par le point A. Les rayons lumineux partant du point A se réfractent à la surface de séparation des deux milieux; l'enveloppe des rayons réfractés est la caustique par réfraction ou la *diacaustique*. La forme de cette courbe peut se déterminer par des considérations géométriques assez simples.

1° Supposons le point lumineux A placé dans le milieu le plus réfringent; l'indice de réfraction n est alors inférieur à l'unité.

Soient AB un rayon incident, BR le rayon réfracté, A′ le point symétrique du point lumineux A par rapport à MN, C le point où le prolongement du rayon réfracté BR coupe AA′. L'angle $BAA' = i$ est l'angle d'incidence; l'angle $BCA' = r$ est l'angle de réfraction.

Construisons le cercle qui passe par les trois points A, B, A′; la droite BC prolongée coupe la circonférence au point P. Cette droite est la bissectrice de l'angle APA′; l'angle BPA′ est inscrit dans le même segment que l'angle BAA′; on a donc

$$BPA' = APC = i.$$

Dans les triangles APC, A′PC, on a

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

$$\frac{A'C}{A'P} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

On déduit de là

$$\frac{AC + A'C}{AP + A'P} = n.$$

La somme des rayons vecteurs AP et A'P est constante : le lieu des points P est donc une ellipse, qui a pour foyers les points A et A', pour excentricité l'indice de réfraction.

Le prolongement du rayon réfracté BP, qui divise l'angle APA' en deux parties égales, est donc la normale à l'ellipse au point P ; par suite la diacaustique est la développée de cette ellipse.

2° Supposons le point lumineux A placé dans le milieu le moins réfringent ; l'indice de réfraction n est alors supérieur à l'unité.

Soient AB un rayon incident, BR le rayon réfracté, A' le point symétrique du point lumineux A par rapport à MN, C le point où le prolongement du rayon réfracté BR coupe la droite AA' prolongée. L'angle $BAA' = i$ est l'angle d'incidence ; l'angle $BCA' = r$ est l'angle de réfraction.

Construisons le cercle qui passe par les trois points A, B, A' ; la droite BC coupe la circonférence au point P. Cette droite est la bissectrice de l'angle formé par la droite PA avec le prolongement de la droite PA' ; l'angle BPA' est inscrit dans le même segment que l'angle BAA' : on a donc

$$BPA' = APC = i.$$

Dans les triangles APC, A'PC, on a

$$\frac{AC}{AP} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

$$\frac{A'C}{A'P} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

On déduit de là

$$\frac{A'C - AC}{A'P - AP} = n.$$

La différence des rayons vecteurs A'P et AP est constante; le lieu des points P est donc une hyperbole qui a pour foyers les points A et A', pour excentricité l'indice de réfraction.

Le prolongement du rayon réfracté BP, qui divise en deux parties égales l'angle formé par AP et le prolongement de A'P, est donc la normale à l'hyperbole au point P; par suite la diacaustique est la développée de cette hyperbole.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1140

(voir 2e série, t. XIII, p. 208);

PAR M. MEŸL,

Ancien officier d'Artillerie à la Haye (Hollande).

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans un cercle, on mène des parallèles aux côtés opposés; elles rencontrent la circonférence en des points* A', B', C'. *On prolonge les cordes* A'B', A'C', B'C', *qui coupent respectivement les côtés* AB, AC, BC *du triangle donné aux points* c, b, a.

Démontrer que le point de rencontre des hauteurs du triangle abc *est le centre du cercle donné.*

(BROCARD.)

On sait que les droites AA', BB', CC', suffisamment prolongées, forment un triangle $\alpha\beta\gamma$ semblable à ABC, et que le cercle donné est le cercle des neuf points de ce triangle. Or je dis que les points α, β, γ sont respectivement en ligne droite avec bc, ac, ab.

Soit, par exemple, pour le point γ et ab; il suffit de montrer que les triangles baC et $b\gamma$A sont semblables, puisque CbA est une droite et aC parallèle à Aγ.

On a, dans les triangles bCC' et aCC',

$$bC : CC' = \sin C : \sin(A - C),$$
$$CC' : aC = \sin(B - C) : \sin(C);$$

d'où

$$(1) \qquad bC : Ca = \sin(B - C) : \sin(A - C),$$

et, dans le triangle bAA',

$$bA : AA' = \sin(B + C) \quad \text{ou} \quad \sin A : \sin(A - C).$$

Mais on sait que

$$AA' = 2 \sin(B - C) \quad \text{et} \quad A\gamma = BC = 2 \sin A$$

(le rayon du cercle pris pour unité); par conséquent

$$bA : 2 \sin(B - C) = \tfrac{1}{2} A\gamma : \sin(A - C)$$

ou

$$bA : A\gamma = \sin(B - C) : \sin(A - C),$$

et, à cause de l'équation (1),

$$bC : Ca = bA : A\gamma;$$

donc ab et γ sont en ligne droite.

Considérons maintenant l'hexagone inscrit

$$ACBA'C'B'A,$$

dont les côtés opposés AC et A'C', CB et C'B', BA et B'A se rencontrent respectivement aux points b, a, γ'. Il s'ensuit que γ' est aussi sur la droite ab; mais, dans le quadrilatère inscrit AA'B'B, le point c est le pôle de $\gamma'\gamma$ ou de ab.

On en conclut que les sommets du triangle *abc* sont les pôles des côtés opposés, par rapport au cercle donné; donc les hauteurs de ce triangle doivent passer par le centre du cercle. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue, à l'aide des équipollences, par M. L. Bourguet; géométriquement, par M. Chadu; analytiquement, par MM. Lez et Moret-Blanc.

Question 1143

(voir 2e série, t. XIII, p. 303);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine au 37e d'Artillerie.

Construire une parabole connaissant le sommet, une tangente et un point. (LAISANT.)

La solution de ce problème est une conséquence de la propriété suivante, qui peut se démontrer aisément :

Dans toute parabole, les longueurs dont le pôle et les extrémités d'une corde quelconque sont distants d'une tangente également quelconque sont telles, que la première est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

Alors, soient A et M le sommet et le point donnés et I le milieu de la corde AM; le pôle de cette corde est situé, d'une part, sur la circonférence de cercle décrite sur AI comme diamètre, et, d'autre part, sa distance à la tangente donnée est connue par le théorème précédent. Ce point peut donc être déterminé facilement, et, en le joignant au point A, on a la tangente au sommet, etc. (Les deux points A et M doivent être situés d'un même côté de la tangente donnée.)

Il y a en général quatre solutions.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Charles Chabanel; J. Murent, licencié ès sciences; E. Momy, élève du lycée de Bordeaux.

Question 1145

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 304);

PAR M. GENTY.

On donne une surface du second degré et deux points e et e' : par le point e on mène une transversale quelconque rencontrant la surface aux points a et b; par le point e', on mène une parallèle à la transversale; cette parallèle rencontre aux points a' et b' les plans tangents aux points a et b.

Si D *est le diamètre parallèle à la transversale, l'expression*

$$\frac{ea\,.\,e'b' + eb\,.\,e'a'}{D^2}$$

a une valeur constante, quelle que soit la direction de la transversale. (FAURE.)

Soient X, Y, Z les coordonnées du point e; X', Y', Z' celles du point e'; α, β, α', β' les distances ea, eb, $e'a'$ et $e'b'$ respectivement.

Soient enfin

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de la surface rapportée à ses trois plans principaux, et λ, μ et ν les angles que la transversale fait avec les axes.

Les longueurs α et β seront les racines de l'équation

$$A(X + x\cos\lambda)^2 + B(Y + x\cos\mu)^2 + C(Z + x\cos\nu)^2 = 1$$

ou

$$(1) \qquad x^2 + 2KD^2x - ID^2 = 0,$$

en remarquant que

$$A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu = \frac{1}{D^2}$$

et en posant

$$K = AX\cos\lambda + BY\cos\mu + CZ\cos\nu,$$
$$I = 1 - AX^2 - BY^2 - CZ^2.$$

L'équation du plan tangent à la surface au point a sera

$$Ax(X + \alpha\cos\lambda) + By(Y + \alpha\cos\mu) + Cz(Z + \alpha\cos\nu) = 1;$$

et la distance a' sera déterminée par l'équation

$$A(X' + \alpha'\cos\lambda)(X + \alpha\cos\lambda) + \ldots = 1$$

ou

$$\alpha'\left(K + \frac{\alpha}{D^2}\right) = I_1 - \alpha K',$$

en posant pour abréger

$$I_1 = 1 - AXX' - BYY' - CZZ'$$
$$K' = AX'\cos\lambda + BY'\cos\mu + CZ'\cos\nu.$$

De l'équation ci-dessus on tire

$$\alpha' = \frac{D^2(I_1 - \alpha K')}{\alpha + KD^2};$$

on trouverait de même

$$\beta' = \frac{D^2(I_1 - \beta K')}{\beta + KD^2}.$$

Or l'équation (1) donne

$$KD^2 = -\frac{\alpha + \beta}{2};$$

donc on a

$$\alpha' = 2\,\frac{D^2(I_1 - \alpha K')}{\alpha - \beta},$$
$$\beta' = 2\,\frac{D^2(I_1 - \beta K')}{\beta - \alpha}$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{D^2} = -2I_1 = +2(AXX' + BYY' + CZZ' - 1).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Charles Chabanel.

Question 1146
(voir 2e série, t. XIII, p. 304);

PAR M. CHARLES CHABANEL.

On donne une surface du second degré et deux droites L, M. *Sur la première* L *on prend deux points arbitraires* a, b, *et l'on trace les plans polaires de ces points. Désignons par* c *et* d *les points d'intersection de ces plans avec la seconde* M; *par* e *et* f *les points d'intersection de ces mêmes plans avec le diamètre parallèle à* M : *l'expression*

$$\mathrm{O}e.\mathrm{O}f\,\frac{ab}{cd},$$

dans laquelle O *est le centre de la surface, a une valeur constante.* (FAURE.)

Les plans polaires de tous les points situés sur la droite L passent par une droite fixe P; réciproquement, les pôles de tous les plans qui tournent autour de la droite P sont sur la droite L. Soient donc Q, R deux plans dont la droite P est l'intersection, et qui sont rencontrés par la droite M en des points q, r. Les pôles de ces plans sont deux points s, t situés sur la droite L.

Le rapport anharmonique des points s, t, a, b de la droite L est égal au rapport anharmonique des plans polaires de ces points. Ces plans polaires rencontrent respectivement la droite M en q, r, c, d; on a donc

$$\frac{qc}{qd}:\frac{rc}{rd}=\frac{sa}{sb}:\frac{ta}{tb}. \tag{1}$$

Si l'on fait passer le plan Q par le centre O, le pôle s de ce plan sera à l'infini de la droite L; on aura, par suite, $\frac{sa}{sb}=1$. Si le plan R devient parallèle à la droite M, le point r sera à l'infini de cette droite, et l'on aura alors $\frac{rc}{rd} = 1$. Pour ces directions particulières des plans Q, R, l'équation (1) se réduit à

$$(2) \qquad \frac{qc}{qd} = \frac{tb}{ta}.$$

De cette égalité de rapports on déduit

$$\frac{qc - qd}{qd} = \frac{tb - ta}{ta},$$

ou

$$\frac{dq + qc}{qd} = \frac{at + tb}{ta},$$

ce qui donne

$$(3) \qquad ta = - qd \frac{ab}{cd},$$

puis

$$(4) \qquad tb = - qc \frac{ab}{cd}.$$

Concevons que le point a soit fixe en a_1, et que l'on fasse varier le point b sur la droite L; soit c_1 la position du point c correspondant à a_1. Dans cette hypothèse, le premier membre de l'équation (3) a une valeur invariable : il en est de même de l'expression

$$qd \frac{a_1 b}{c_1 d}$$

et aussi de celle

$$qc_1 . dq \frac{a_1 b}{c_1 d}.$$

Si donc b_1, b_2 sont deux positions arbitraires du point b, on a, en désignant par d_1, d_2 les positions correspondantes du point d,

$$(5) \qquad qc_1 . qd_1 \frac{a_1 b_1}{c_1 d_1} = qc_1 . qd_2 \frac{a_1 b_2}{c_1 d_2}.$$

Supposons maintenant que le point b soit fixe en b_2; à cause de l'équation (4), l'expression

$$qc.qd_2\,\frac{ab_2}{cd_2}$$

sera constante pour toutes les positions du point a; en donnant à ce point deux positions a_1, a_2, et en désignant par c_1, c_2 les positions correspondantes du point c, on a

$$(6) \qquad qc_1.qd_2\,\frac{a_1b_2}{c_1d_2} = qc_2.qd_2\,\frac{a_2b_2}{c_2d_2}.$$

Des équations (5) et (6) on conclut que

$$(7) \qquad qc_1.qd_1\,\frac{a_1b_1}{c_1d_1} = qc_2.qd_2\,\frac{a_2b_2}{c_2d_2},$$

équation qui fait voir que la valeur de l'expression $qc.qd\,\frac{ab}{cd}$ est indépendante de la position arbitraire des points a, b.

Soit I le point où la droite P perce le plan déterminé par la droite M et le centre O. Choisissons ce plan pour plan de la figure.

Les plans polaires des points a, b sont coupés suivant les droites $\mathrm{I}c$, $\mathrm{I}d$, qui rencontrent en e, f le diamètre parallèle à la droite M. On sait que le plan Q passe par le centre O; par suite, ce point est situé sur la droite $\mathrm{I}q$. Les triangles $\mathrm{IO}e$, $\mathrm{I}qc$ sont semblables, ainsi que ceux $\mathrm{IO}f$, $\mathrm{I}qd$. On a donc les égalités de rapports

$$\frac{\mathrm{O}e}{qc} = \frac{\mathrm{O}f}{qd} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{O}e.\mathrm{O}f = \left(\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q}\right)^2 qc.qd,$$

puis

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{O}e.\mathrm{O}f\,\frac{ab}{cd} = \left(\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q}\right)^2 qc.qd\,\frac{ab}{cd}.$$

Or le rapport $\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{I}q}$ est indépendant de la position arbitraire des points a, b; on a vu qu'il en est de même de $qc.qd\,\frac{ab}{cd}$. Par suite, l'expression proposée a une valeur constante.

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty, Gambey et Moret-Blanc.

Question 1148

(voir 2e série, t. XIII, p. 399);

PAR M. C. CHADU.

1° *Soient* O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC; H *le point de concours des hauteurs;* I *le centre du cercle inscrit;* R *le rayon du cercle circonscrit à* ABC; *on a*

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{R}^2\left(1 - 8\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right), \\ \overline{\mathrm{OH}}^2 = \mathrm{R}^2(1 - 8\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}), \\ \overline{\mathrm{IH}}^2 = \mathrm{R}^2\left(8\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2} - \cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\right). \end{cases}$$

2° *Si* r *est le rayon du cercle inscrit au triangle* ABC, *et* R′ *le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes en* A, B, C, *on a*

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r \quad \text{(relation connue)}, \\ \overline{\mathrm{OH}}^2 = \mathrm{R}^2 - 2\frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'}, \\ \overline{\mathrm{IH}}^2 = 2r^2 - \frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'}. \end{cases}$$

(L. PAINVIN.)

I. Remarquons que l'angle OAH est égal à $B - C$, et que la ligne AI est la bissectrice de cet angle. De plus on a

$$AH = 2R\cos A,$$

$$AI = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Cela posé, le triangle OAI donne

$$\overline{OI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AI}^2 - 2\,OA.AI\cos\frac{B-C}{2},$$

par suite

$$\overline{OI}^2 = R^2 + 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

En développant $\cos\frac{B-C}{2}$ et réduisant, il vient

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\overline{IO}^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

Le triangle OAH donne

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,OA\,.\,AH\cos(B - C),$$

par suite

$$\overline{OH}^2 = R^2 + 4R^2\cos^2 A - 4R^2\cos A\cos(B - C),$$

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

Le triangle IAH donne

$$\overline{IH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AI}^2 - 2\,AH.AI\cos\frac{B-C}{2},$$

par suite

$$\overline{\mathrm{IH}}^2 = 4\mathrm{R}^2\cos^2\mathrm{A} + 16\mathrm{R}^2\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$- 16\mathrm{R}^2\cos\mathrm{A}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2},$$

$$= 4\mathrm{R}^2\left(\cos^2\mathrm{A} + 4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}\right.$$

$$\left. - \cos\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C} - 4\cos\mathrm{A}\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}\right),$$

$$= 4\mathrm{R}^2\left[\cos\mathrm{A}(\cos\mathrm{A} - \sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C})\right.$$

$$\left. + 4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}(1 - \cos\mathrm{A})\right],$$

$$= 4\mathrm{R}^2\left(8\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2} - \cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\right).$$

II. Pour établir les secondes formules, cherchons la relation qui existe entre R et le rayon R′ du triangle A′B′C′ formé par les tangentes en A, B, C.

On a

$$\mathrm{C'B} = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C},$$

$$\mathrm{A'B} = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{A},$$

par suite,

$$b' = \mathrm{R}(\mathrm{tang}\,\mathrm{A} + \mathrm{tang}\,\mathrm{C}).$$

D'un autre côté, on a

$$b' = 2\mathrm{R'}\sin\mathrm{B'} = 2\mathrm{R'}\sin 2\mathrm{B},$$

d'où

$$\mathrm{R}(\mathrm{tang}\,\mathrm{C} + \mathrm{tang}\,\mathrm{A}) = 2\mathrm{R'}\sin 2\mathrm{B}$$

et

$$\mathrm{R} = 4\mathrm{R'}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle ABC, la relation

$$\mathrm{R} = \frac{r}{4\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}};$$

de ces relations on tire

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{R}{4R'},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}.$$

En remplaçant ces produits par leurs valeurs dans les relations (1), on en déduit immédiatement les relations (2).

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Moret-Blanc; E. Rebuffel, élève du lycée de Rennes; E. Kruschwitz; B. Launoy; P. S., de Cherbourg; Genty; Gambey; Ch. Contet; Étienne Gatti, étudiant à l'Université de Turin.

Question 1151

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 400);

PAR M. SOUBEIRAN,

Élève du lycée Fontanes.

Deux sommets A, B *d'un triangle* ABC *sont supposés fixes; le troisième sommet* C *se déplace dans le plan du triangle de façon que le pied de la bissectrice de l'angle* A *décrive une droite donnée. Trouver le lieu géométrique du point* C.

(HARKEMA.)

Nous emploierons les coordonnées trilinéaires.

Nous prendrons comme triangle de référence le triangle formé par la droite donnée $\alpha = 0$ ou DE, par la droite $\beta = 0$ ou AB, et par la perpendiculaire en A au côté AB; soit $\gamma = 0$.

Les coordonnées du point B seront

$$\beta = 0, \quad \gamma + m\alpha = 0.$$

Si nous représentons par 2ω l'angle que fait la droite AC avec la droite AB, l'équation de la droite AC sera

$$(1) \qquad \beta = \gamma \operatorname{tang} 2\omega.$$

L'équation de la bissectrice de l'angle A est d'ailleurs

$$\beta = \gamma \operatorname{tang} \omega.$$

L'équation de la droite passant par le point B et le point de rencontre de la bissectrice avec la droite $\alpha = 0$ est donc

$$(2) \qquad \beta - \operatorname{tang}\omega\,(\gamma + m\alpha) = 0;$$

donc, si entre cette équation et celle de AC nous éliminons l'angle ω, nous aurons le lieu du point C.

On tire de (2)

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta}{\gamma + m\alpha};$$

on tire de (1)

$$\frac{\beta}{\gamma} = \operatorname{tang} 2\omega = \frac{2\operatorname{tang}\omega}{1 - \operatorname{tang}^2\omega};$$

d'où

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\dfrac{2\beta}{\gamma + m\alpha}}{1 - \dfrac{4\beta^2}{(\gamma + m\alpha)^2}},$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\beta(\gamma + m\alpha)}{(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2}.$$

Cette équation se décompose en celle d'une droite $\beta = 0$ et celle d'une conique

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2(\gamma + m\alpha)}{(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2},$$

qui prend les formes

$$(\gamma + m\alpha)^2 - \beta^2 = 2\gamma(m\alpha + \gamma),$$

$$(\gamma + m\alpha)(m\alpha - \gamma) = \beta^2.$$

On voit donc que les droites

$$\gamma + m\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \gamma - m\alpha = 0$$

sont tangentes à la conique en leurs points de rencontre avec la droite $\beta = 0$ ou AB.

La conique peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$m^2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

donc la conique a pour foyer le sommet A et pour directrice la droite $\alpha = 0$ ou DE.

On aura une ellipse quand m sera inférieur à l'unité, c'est-à-dire quand le point B sera compris entre les pieds des bissectrices des deux angles formés par les droites $\alpha = 0$ ou DE et $\beta = 0$ ou AD.

On aura une parabole quand m sera égal à l'unité, c'est-à-dire quand le point B se trouvera sur l'une de ces deux bissectrices.

On aura une hyperbole quand m sera inférieur à l'unité.

Note. — La même question a été résolue par MM. Henry Poidatz, soldat au 134e de ligne; A. Pellissier; Ch. Contet; P. S., de Cherbourg; Rebuffel, élève du lycée de Rennes; B. Launoy; Moret-Blanc; Chadu, professeur au lycée de Mont-de-Marsan; H. Lez; H. Brocard; G. Vandame, élève du lycée de Lille; A. Tourrettes; Jacob, élève du lycée de Dijon; Gambey; C. Moreau; Astor; L. Goulin et Henri Garreta, élèves du lycée de Rouen.

Omission. — Nous avons reçu, trop tard pour la mentionner, une solution de la question 1081, par M. Léopold Klug, élève du séminaire de Budapest (Hongrie).

QUESTIONS.

1163. On appelle *transformations biquadratiques* toutes celles dans lesquelles à un point de chacune des deux figures conjuguées correspond un point, et à une droite, une conique (*). Montrer que les deux angles des asymptotes de cette conique sont toujours mesurés par la moitié des deux arcs suivant lesquels la droite divise le cercle fixe des trois points fondamentaux de la transformation. On obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite est extérieure à ce cercle, qu'elle le coupe ou qu'elle lui est tangente.

(Haton de la Goupillière.)

1164. Montrer que, dans tout procédé biquadratique, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir un cercle est de transformer un cercle mené par deux des points fondamentaux (**). Le conjugué y passe alors lui-même. Les deux séries de centres de ces cercles forment un système en involution sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint ces deux points. Son centre est celui du cercle des trois points fondamentaux, et ses foyers les points où ce cercle rencontre la droite.

Lorsque l'on prend pour points fondamentaux les ombilics du plan, il suffit d'après cela de partir d'un cercle *quelconque* pour en obtenir un autre; et, en effet, ce mode spécial de transformation biquadratique n'est autre que le procédé des rayons vecteurs réciproques.

(Haton de la Goupillière.)

(*) On peut citer parmi elles les procédés indiqués par les auteurs suivants : Newton de Newhaven, *Mathematical Monthly*, t. III; Steiner, *Systematische Entwickelung;* Transon, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V; H. Faure, *Bulletin de la Société de Statistique, etc., de l'Isère*, 3e série, t. II, 1870-1871; Hirst, *Proceedings of the royal Society*, vol. XIV; Darboux, *Bulletin de la Société philomathique*, t. V; Bellavitis, *Nuovi saggi dell' Accademia di Padova*, t. IV; Schiaparelli, *Académie de Turin*, 2e série, t. XXI.

(**) Sauf pour le cercle des trois points fondamentaux, qui correspond à la droite de l'infini.

PROPRIÉTÉS DES QUADRILATÈRES COMPLETS QUI RESSORTENT DE LA CONSIDÉRATION DE LEURS BISSECTRICES ;

Par M. L. SANCERY, à Nice.

M. Mention a démontré dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. I, p. 16 et 65) une belle proposition de Steiner, relative à un quadrilatère complet et à ceux qu'on en dérive à l'aide des douze bissectrices de ses angles. Je me propose d'indiquer quelques autres propriétés des mêmes quadrilatères.

1. *Notation*. — Étant donné un quadrilatère ABCD que, pour fixer les idées, nous supposerons convexe, prolongeons les côtés opposés AB et CD, BC et AD jusqu'à leurs rencontres E, F. Désignons les angles BAD, CBA, DCB, ADC, DEA, AFB respectivement par angles intérieurs A, B, C, D, E, F, et leurs suppléments par angles extérieurs A, B, C, D, E, F. Menons les douze bissectrices des angles intérieurs et extérieurs du quadrilatère, et soient : 1° A', B', C', D' les intersections des bissectrices des angles intérieurs A et B, B et C, C et D, D et A ; 2° A'', B'', C'', D'' celles des bissectrices des angles extérieurs C et D, D et A, A et B, B et C ; 3° A_1 l'intersection des bissectrices de l'angle intérieur C et de l'angle extérieur B, et de même B_1, C_1, D_1 celles des angles A et B, A et D, C et D ; A_2, B_2, C_2, D_2 celles des angles D et A, D et C, B et C, B et A ; H, I, K, L, G, J celles des angles C et A, D et B, A et C, B et D, E et F, F et E ; le premier angle est toujours intérieur et le second exté

rieur; 4° P, Q, T les intersections des bissectrices des angles intérieurs A et C, B et D, E et F; R, S, V les intersections des bissectrices des angles extérieurs A et C, B et D, E et F; 5° a, b, c les intersections des droites BD et EF, EF et AC, AC et BD; a', b', c', a'', b'', c'' celles des droites QS et TV, TV et PR, PR et QS, IL et GJ, GJ et HK, HK et IL; α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' celles des droites PR et HK, QS et IL, TV et GJ; HK et AC, IL et BD, GJ et EF, AC et PR, BD et QS, EF et TV.

2. On nous permettra de rappeler dans ce paragraphe des propositions déjà connues, mais nécessaires pour la suite.

Les points où se coupent les bissectrices des angles opposés du quadrilatère complet ABCDEF, tant intérieurs qu'extérieurs, mais pris simultanément : 1° de même espèce; 2° d'espèces différentes, sont les sommets de deux quadrilatères complets PQRSTV, HIKLGJ. Chacun des côtés de ces quadrilatères est un axe d'homologie correspondant à quatre centres d'homologie situés sur une même circonférence. On obtient ainsi les quadrilatères $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A'A''C_1C_2$, $D'D''B_1B_2$, $C'C''A_1A_2$, $B'B''D_1D_2$ inscriptibles dans des circonférences dont les centres sont O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2. Si λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' sont les cercles ayant pour diamètres les diagonales PR, QS, TV, HK, IL, GJ des deux quadrilatères PQRSTV, HIKLGJ, les cercles O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'' et ω', ω'', ω_1, ω_2, λ, λ', λ'' forment deux séries de cercles orthogonaux. L'axe radical des premiers cercles est la médiane des diagonales du quadrilatère PQRSTV, celui des autres est la médiane des diagonales du quadrilatère HIKLGJ. On peut ajouter à ces deux séries les cercles Δ', Δ'' circonscrits aux triangles diagonaux $a'b'c'$, $a''b''c''$ des deux quadrilatères PQRSTV, HIKLGJ.

3. Théorème. — *Sur chacun des côtés de l'un quelconque des quadrilatères* ABCD, PQRS, HIKL *se croisent, et par quatre groupes différents, deux côtés des deux autres quadrilatères.*

On peut donner à ce théorème plus de précision. Supposons que l'on choisisse un côté de l'un des trois quadrilatères, pour savoir quels sont les côtés des deux autres qui se croisent sur le côté choisi, on parcourra l'un de ces quadrilatères dans le sens de la notation et à partir du premier sommet. Quant au second, selon que le côté choisi est de rang impair ou de rang pair, on le parcourra dans le sens de la notation ou dans le sens contraire, en partant du sommet qui est de même ordre que le côté choisi, ou du sommet suivant. Les côtés des deux quadrilatères qui, dans leur parcours, ont le même numéro d'ordre, se croisent sur le côté choisi.

Prenons le côté PQ, qui est le premier dans le quadrilatère PQRS; sur ce côté PQ se croisent, d'après la règle, AB et HI, BC et IK, CD et KL, DA et LH. En effet, les triangles AHP, BIQ sont homologiques, puisque AH et BI se coupent en C$''$, HP et IQ en C$'$, PA et QB en A$'$, et que les points C$''$, C$'$, A$'$ sont en ligne droite. Il en résulte que les droites AB, HI, PQ se coupent en un même point 1. De même les triangles BIQ, CKP ont la droite D$''$D$'$B$'$ pour axe d'homologie; par conséquent les lignes BC, IK, QP se coupent en un même point 2. Pareillement les triangles CKP, DLQ ont la droite A$''$A$'$C$'$ pour axe d'homologie, et les lignes CD, KL, PQ ont un même point commun 3. Enfin les triangles DLQ, AHP ont la droite B$''$B$'$D$'$ pour axe d'homologie et les lignes DA, LH, QP se coupent en un même point 4.

Pareillement, sur le côté RS, qui est le troisième dans le quadrilatère PQRS, se croisent AB et KL en $1'$, BC et LH en $2'$, CD et HI en $3'$, DA et IK en $4'$; sur le deuxième côté QR se coupent AB et KI en $1''$, BC et IH en $2''$, CD et HL en $3''$, DA et LK en $4''$; sur le quatrième côté SP se croisent AB et HL en $1'''$, BC et LK en $2'''$, CD et KI en $3'''$, DA et IH en $4'''$.

4. Toutes les droites précédemment considérées ayant été tracées, par chacun des sommets des quadrilatères ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ passent quatre droites formant un faisceau harmonique.

Pour les sommets A, B, C, D, E, F la propriété résulte de la construction elle-même. Considérons les autres sommets. Soit 1° le point P. Par le quadrilatère complet A'B'C'D'QP, on voit que le faisceau P(B', A', T, Q) est harmonique. Soit 2° le point H. Le quadrilatère complet $2'3''2''3'$HR montre que le faisceau H (I, L, C, R) est harmonique. Il en est de même pour les autres sommets.

5. Théorème. — *Sur chacune des diagonales de l'un quelconque des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ *se croisent, et par deux groupes différents, deux diagonales appartenant aux deux autres. La diagonale du premier quadrilatère est ainsi divisée harmoniquement; elle l'est aussi par les diagonales restantes des deux autres.*

Pour donner à ce théorème plus de précision, considérons le tableau suivant, formé des diagonales des trois quadrilatères

$$\begin{matrix} AC & PR & HK, \\ BD & QS & IL, \\ EF & TV & GJ, \end{matrix}$$

puis, regardant ce tableau comme celui d'un déterminant, opérons comme si nous voulions le développer selon les éléments de la première colonne, nous obtiendrons alors comme se coupant sur AC : 1° les diagonales QS et GJ en δ; 2° TV et IL en δ'; sur BD : 1° TV et HK en ε; 2° PR et GJ en ε'; sur EF : 1° PR et IL en η; 2° QS et HK en η'. De plus, AC sera divisée harmoniquement en δ et δ', BD en ε et ε', EF en η et η'. En ordonnant le déterminant selon les éléments de la deuxième colonne, on trouverait que sur PR se coupent BD et GJ en ε', EF et IL en η, et que PR est divisée harmoniquement en ε' et η. Et ainsi de même des autres diagonales.

Occupons-nous de la diagonale AC. Considérons d'abord les deux couples de faisceaux harmoniques

$$B(A, C, Q, S) \text{ et } D(C, A, S, Q), \quad B(A, C, I, L) \text{ et } D(C, A, L, I),$$

puis les deux couples

$$P(A, C, Q, S) \text{ et } R(C, A, S, Q), \quad P(A, C, T, V) \text{ et } R(C, A, V, T).$$

On sait que la droite qui joint les intersections de deux couples quelconques de rayons homologues, mais dissociés, passe par un point fixe. C'est sous cette forme que nous rappellerons le théorème énoncé dans la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, p. 75, art. III, ou encore dans l'*Introduction à la Géométrie supérieure* de M. Housel, p. 58, art. III. Si donc nous indiquons par

$$\left.\begin{matrix} BA \\ DA \end{matrix}\right| A$$

que les droites BA, DA se coupent en A, on pourra former le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}B(ACQS)\\D(CASQ)\end{array}\ \left.\begin{array}{c}BA\\DA\end{array}\right|A,\quad \left.\begin{array}{c}BA\\DS\end{array}\right|d,\quad \left.\begin{array}{c}BA\\DQ\end{array}\right|e,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}BQ\\DQ\end{array}\right|Q,$$

$$\left.\begin{array}{c}BC\\DC\end{array}\right|C,\quad \left.\begin{array}{c}BQ\\DC\end{array}\right|d',\quad \left.\begin{array}{c}BS\\DC\end{array}\right|e',\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}BS\\DS\end{array}\right|S;$$

$$\begin{array}{l}B(ACIL)\\D(CALI)\end{array}\ \left.\begin{array}{c}BA\\DA\end{array}\right|A,\quad \left.\begin{array}{c}BA\\DL\end{array}\right|d,\quad \left.\begin{array}{c}BA\\DI\end{array}\right|e,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}BI\\DI\end{array}\right|I,$$

$$\left.\begin{array}{c}BC\\DC\end{array}\right|C,\quad \left.\begin{array}{c}BI\\DC\end{array}\right|e',\quad \left.\begin{array}{c}BL\\DC\end{array}\right|d',\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}BL\\DL\end{array}\right|L;$$

$$\begin{array}{l}P(ACQS)\\R(CASQ)\end{array}\ \left.\begin{array}{c}PA\\RA\end{array}\right|A,\quad \left.\begin{array}{c}PA\\RS\end{array}\right|d_1,\quad \left.\begin{array}{c}PA\\RQ\end{array}\right|e_1,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}PQ\\RQ\end{array}\right|Q,$$

$$\left.\begin{array}{c}PC\\RC\end{array}\right|C,\quad \left.\begin{array}{c}PQ\\RC\end{array}\right|d'_1,\quad \left.\begin{array}{c}PS\\RC\end{array}\right|e'_1,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}PS\\RS\end{array}\right|S;$$

$$\begin{array}{l}P(ACTV)\\R(CAVT)\end{array}\ \left.\begin{array}{c}PA\\RA\end{array}\right|A,\quad \left.\begin{array}{c}PA\\RV\end{array}\right|d_1,\quad \left.\begin{array}{c}PA\\RT\end{array}\right|e_1,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}PT\\RT\end{array}\right|T,$$

$$\left.\begin{array}{c}PC\\RC\end{array}\right|C,\quad \left.\begin{array}{c}PT\\RC\end{array}\right|e'_1,\quad \left.\begin{array}{c}PV\\RC\end{array}\right|d'_1,\ldots,\quad \left.\begin{array}{c}PV\\RV\end{array}\right|V.$$

D'où l'on conclura que les droites dd', ee' passent par l'intersection δ de AC et de QS ; que de' et ed' passent par l'intersection δ' de AC et de IL ; que $d_1 d'_1$ et $e_1 e'_1$ se croisent en δ sur AC et QS, et que $d_1 e'_1$ et $e_1 d'_1$ concourent en δ'_1, intersection de AC et de TV. Puis le quadrilatère $dd'ee'$ ayant pour diagonales de, $d'e'$, $\delta\delta'$, montre que $\delta\delta'$ est divisée harmoniquement par de et $d'e'$ aux points A et C, et réciproquement que AC est ainsi divisé en δ et δ'. De même pour le quadrilatère $d_1 d'_1 e_1 e'_1$, qui a pour diagonales $d_1 e_1$, $d'_1 e'_1$, $\delta\delta'_1$, on voit que $\delta\delta'_1$ est divisée harmoniquement par $d_1 e_1$ et $d'_1 e'_1$ en A et C, ou bien que AC l'est en δ, δ'_1.

De là il suit que δ et δ'_1, étant conjugués harmoniques de δ par rapport à AC, coïncident; autrement dit, TV et IL se coupent sur AC.

Que l'on prenne maintenant les deux couples de faisceaux harmoniques

B(ACQS) et D(CASQ), B(ACIL) et D(CALI),

puis les deux couples

E(ACTV) et F(CAVT), E(ACGJ) et F(CAJG),

et l'on verra que AC est divisée harmoniquement, d'abord en δ' et δ par IL et QS, puis en δ' et δ_1 par TV et GT; d'où il suit que δ et δ_1 coïncident; autrement dit, AC, QS et GT passent par le même point δ.

Il est facile de déduire du tableau des diagonales les faisceaux qui viennent d'être considérés, et, par suite, de faire une démonstration analogue pour une autre diagonale.

On vient de voir que la diagonale AC était divisée harmoniquement par QS et IL, TV et GJ; elle l'est également par les diagonales PR et HK. En effet, le quadrilatère complet ACKHRα' montre que HK est divisée harmoniquement en α et α', AC en α' et α'', PR en α'' et α. On voit de même, par le quadrilatère BDLISβ', que IL est divisée harmoniquement en β et β', BD en β' et β'', QS en β'' et β, et, par le quadrilatère EFGJTγ', que GJ est divisée harmoniquement en γ et γ', EF en γ' et γ'', TV en γ'' et γ.

Corollaire. — En observant que, dans chacun des quadrilatères considérés, une diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres, on pourra dire : huit diagonales des quadrilatères ABCDEF, PQRSTV, HIKLGJ déterminent sur la neuvième une involution de six points dans laquelle les extrémités de cette dernière diagonale sont les points doubles.

Le tableau ci-dessus montre facilement quelles sont les diagonales conjuguées. Ainsi, pour la division faite sur AC, sont conjuguées entre elles les diagonales BD et EF, PR et HK, QS et IL, TV et GJ; ces deux derniers couples donnent les mêmes points conjugués. Si l'on veut considérer la division faite sur QS, on transformera, à l'aide de permutations circulaires, le tableau ci-dessus dans le suivant :

QS	IL	BD
TV	GJ	EF
PR	HK	AC

et alors seront conjuguées TV et PR, IL et BD, GJ et EF, HK et AC. Ces deux derniers couples fournissent les mêmes points conjugués.

6. Théorème. — *Les triangles diagonaux* abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ *des quadrilatères* ABCD, PQRS, HIKL *sont semblables et homologiques entre eux. Ils ont pour centre d'homologie le point de rencontre* h *des hauteurs du triangle diagonal* abc *relatif au quadrilatère donné.*

Considérons les angles c, c''; je dis qu'ils sont égaux. En effet, dans les quadrilatères concaves $\mathrm{C}c\mathrm{D}c'$, $\mathrm{KA'L}c''$, on a

$$\mathrm{C}c\mathrm{D} = \mathrm{C'D}c + \mathrm{CC'D} + c\mathrm{CC'},$$

$$\mathrm{KA'L} = c''\mathrm{LA'} + \mathrm{K}c''\mathrm{L} + \mathrm{A'K}c'';$$

la dernière égalité peut s'écrire

$$2^d - \mathrm{BA'K} = c''\mathrm{LA'} + 2^d - \mathrm{I}c''\mathrm{K} + \mathrm{A'K}c'',$$

ou bien

$$\mathrm{I}c''\mathrm{K} = c''\mathrm{LA'} + \mathrm{BA'K} + \mathrm{A'K}c'';$$

mais, par les quadrilatères inscriptibles IBDL, A'B'C'D', HACK, on a

$$C'Dc = c''LA', \quad CC'D = BA'K, \quad cCC' = A'Kc'';$$

donc

$$CcD = Ic''K \quad \text{ou} \quad bca = b''c''a''.$$

On peut démontrer de même que les angles c et c' sont égaux; mais il est plus simple d'observer que, le quadrilatère $\alpha c'\beta c''$ ayant deux angles droits $c''\alpha c$ et $c'\beta c''$, il en résulte

$$\alpha c'\beta = \beta c''K \quad \text{ou bien} \quad b'c'a' - b''c''a''.$$

On a donc

$$bca = b'c'a' = b''c''a''.$$

Il en est de même des autres angles des triangles diagonaux; donc ces triangles sont équiangles et semblables.

Maintenant, de ce que les points δ', ε se trouvent sur la diagonale TV, et de ce que le quadrilatère $\delta'c''\varepsilon c$ est inscriptible, il résulte que l'angle

$$\delta'cc'' = \delta'\varepsilon c'' = b'\varepsilon\alpha = 1^d - \alpha b'\varepsilon = 1^d - c'a'b';$$

donc le prolongement de $c''c$ rencontre à angle droit le côté ab du triangle abc. Pareillement, les points δ, ε' étant sur la diagonale GJ et le quadrilatère $\delta c\varepsilon'c'$ étant inscriptible, on a

$$c'c\varepsilon' = c'\delta\varepsilon' = \beta\delta\varepsilon' = 1^d - \beta a''\delta = 1^d - c''a''b''.$$

Donc le prolongement de $c'c$ rencontre à angle droit le côté ab du triangle abc. De là il suit que les sommets c, c', c'' sont en ligne droite et sur la hauteur du triangle abc issue du point c. De même, les sommets a, a', a'' sont sur la hauteur issue du point a, et b, b', b'' sur la hauteur issue du point b. Les trois triangles abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ sont donc homologiques deux à deux, et ont le point de rencontre h des hauteurs du triangle abc pour centre commun d'homologie.

Corollaire I. — Si α, β, γ sont les intersections des côtés $b'c'$ et $b''c''$, $c'a'$ et $c''a''$, $a'b'$ et $a''b''$, les points α, β, γ sont en ligne droite; de même, les points α', β', γ', α'', β'', γ'' sont en ligne droite. Enfin les trois axes d'homologie $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ se rencontrent en un même point h_1.

Corollaire II. — L'angle $b'ha'$ étant le supplément de $a'c'b'$, le quadrilatère $hb'c'a'$ est inscriptible; il en est de même du quadrilatère $hb''c''a''$.

Ainsi les cercles circonscrits aux triangles diagonaux des deux quadrilatères dérivés passent par le point de rencontre des hauteurs du triangle diagonal du quadrilatère donné.

7. Théorème. — *Les séries des cercles orthogonaux précédemment considérées se trouvent augmentées chacune de trois autres cercles circonscrits aux quadrilatères formés par les couples des diagonales des quadrilatères* ABCDEF, PQRSTV *d'une part*, *et* ABCDEF, HIKCLJ *de l'autre, qui comprennent des angles égaux entre eux.*

Les diagonales BD et EF, QS et TV forment le quadrilatère $a\varepsilon a'\eta'$ qui est inscriptible, puisque les angles $\varepsilon a\eta'$, $\eta' a'\varepsilon$ sont supplémentaires. Or, la diagonale HK étant divisée harmoniquement en ε, η', le cercle $a\varepsilon a'\eta'$ est orthogonal au cercle μ qui a HK pour diamètre. Je dis que le même cercle $a\varepsilon a'\eta'$ dont le centre est ω_3 coupe orthogonalement le cercle Δ' circonscrit au triangle diagonal $a'b'c'$ du quadrilatère PQRSTV. Joignons le point a' commun à ces deux cercles aux centres ω_3 et Δ'. On a

$$\Delta' a' \omega_3 = \Delta' a' b' + b' a' a + a a' \omega;$$

or,

$$\Delta' a' b' = 1^d - a' c' b' = \varepsilon a a' = \varepsilon \eta' a',$$

$$b' a' a = \varepsilon a' a = a \eta' \varepsilon,$$

$$a a' \omega_3 = 1^d - a \eta' a^8;$$

donc

$$\Delta' a' \omega_3 = \varepsilon \eta' a' + a \eta' \varepsilon + 1^d - a \eta' a' = 1_d.$$

Le cercle ω_8 orthogonal aux cercles μ et Δ' est orthogonal à tous ceux de la série O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'', Δ'. Il en est de même des cercles ω_4, ω_8 circonscrits aux quadrilatères $b\eta b'\delta'$, $c\delta c'\varepsilon'$ formés respectivement par les diagonales EF, AC, TV, PR et AC, BD, PR, QS.

Une démonstration analogue peut être faite à l'aide du cercle Δ'' circonscrit au triangle diagonal $a''b''c''$ relativement aux cercles O_8, O_4, O_8 circonscrits aux quadrilatères $a\varepsilon' a''\eta$, $b\eta' b''\delta$, $c\delta' c''\varepsilon$ formés respectivement par les diagonales BD, EF, IL, GJ; EF, AC, GJ, HK; AC, BD, HK, IL. Ces cercles sont orthogonaux à ceux de la série ω', ω'', ω_1, ω_2, λ, λ', λ'' Δ''.

8. Supposons maintenant que le quadrilatère donné soit inscriptible dans un cercle de centre O, et que A et B désignent les angles aigus, A étant le plus petit. Alors :

1° Le quadrilatère EVFT formé par les bissectrices des angles E, F devient un rectangle, et, par suite, les quadrilatères $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ ont leurs diagonales rectangulaires.

2° Le quadrilatère PQRS devient inscriptible. En effet, dans le faisceau harmonique $T(P, Q, A', D')$, les deux rayons TA', TD', étant rectangulaires, divisent en deux parties égales les angles formés par les deux autres. Ainsi TA' est la bissectrice de l'angle PTQ formé par les côtés opposés SP, QR du quadrilatère PQRS. De même, VF est la bissectrice de l'angle SVP formé par les côtés opposés RS, PQ du même quadrilatère; mais, l'angle TFV formé par ces bissectrices étant droit, il en résulte que le quadrilatère PQRS est inscriptible.

3° Le quadrilatère HIKL devient un rectangle inscrit dans la même circonférence que le quadrilatère proposé ABCD. Dès lors les sommets G, J et la diagonale GJ sont situés à l'infini ; le faisceau harmonique GIH, GKL, GET, GVF devient le système harmonique des quatre parallèles IH, KL, ET, VF, et le faisceau JLH, JKI, JFT, JVE se transforme dans le système harmonique des quatre parallèles LH, KI, FT, VE. De là il résulte que les deux rectangles HIKL, TEVF ont leurs côtés parallèles deux à deux, et que les côtés parallèles forment un système harmonique.

4° Les triangles $C'HC''$, A_1HA_2, ayant les angles $HC'C''$ et $C'C''H$, HA_1A_2 et A_1A_2H égaux à $\frac{B}{2}$, sont isoscèles, et $HC' = HC''$, $HA_1 = HA_2$. De même les triangles $C''IC'$, A_1IA_2, ayant les angles $IC''C'$ et $C''C'I$, IA_1A_2 et A_1A_2I égaux à $\frac{A}{2}$, sont isoscèles, et $C''I = IC'$, $A_2I = IA_1$. Il en résulte que HI est perpendiculaire sur les milieux de $C'C''$ et de A_1A_2. Pareillement, IK est perpendiculaire sur les milieux de $D'D''$ et de B_1B_2 ; KL sur les milieux de $A'A''$ et de C_1C_2, et LH sur ceux de $B'B''$ et de D_1D_2. Donc, dans les quadrilatères $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$, les distances des sommets homologues sont divisées en deux parties égales par les côtés du quadrilatère HIKL. Il suit de là que les quadrilatères $A'A''C_1C_2$, $D'D''B_1B_2$, $C'C''A_1A_2$, $B'B''D_1D_2$ sont des trapèzes isoscèles.

5° Le quadrilatère HIKL étant un rectangle inscrit dans le cercle O, les cercles μ et μ' coïncident avec le cercle O, le cercle μ'' passant par les points E, F devient la droite EF elle-même. De là il suit que la série des cercles O', O'', O_1, O_2, μ, μ', μ'' se réduit à O', O'', O_1, O_2, O, et qu'elle a EF pour axe radical. Le triangle diagonal $a''b''c''$ a deux de ses sommets a'', b'' à l'infini ; quant au sommet c'', il coïncide avec le centre O. Les points a'', b'', γ, γ', δ, ε' sont rejetés à l'infini. Il en résulte que les diagonales AC et QS qui se coupent en δ sont parallèles entre elles, et que les diagonales BD et PR qui se coupent en ε' le sont aussi ; que δ', ε, γ'', η, η', γ'' sont respectivement les milieux de AC, BD, EF, PR, QS, TV. Or la droite TV passe par les points δ', ε, γ'', et la droite EF par η, η', γ' ; on peut donc conclure ce théorème :

Théorème. — *Dans les deux quadrilatères inscriptibles* ABCD, PQRS, *les diagonales intérieures de l'un sont parallèles aux diagonales intérieures de l'autre, et la troisième diagonale de l'un passe par les milieux des diagonales de l'autre.*

9. Si l'on désigne par σ_1, σ_3 les points où la bissectrice de l'angle intérieur F rencontre les côtés opposés AB et CD, par σ_2, σ_4 ceux où la bissectrice de l'angle intérieur E rencontre les côtés opposés BC, DA, les triangles $\sigma_1 E \sigma_3$ $\sigma_2 F \sigma_4$ seront isoscèles, et la figure $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ sera un losange inscrit dans le quadrilatère ABCD. Pareillement, si l'on représente par Σ_1 et Σ_3, Σ_2 et Σ_4 les points où les bissectrices des angles extérieurs F, E rencontrent les côtés opposés AB et CD, BC et DA, les triangles $\Sigma_1 E \Sigma_3$, $\Sigma_2 F \Sigma_4$ seront isoscèles, et la figure $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ sera un losange exinscrit dans le quadrilatère ABCD. Les hauteurs des triangles $\sigma_1 E \sigma_3$, $\Sigma_1 E \Sigma_3$ abaissées des extrémités des bases $\sigma_1\sigma_3$, $\Sigma_1\Sigma_3$ sont respectivement doubles des perpendiculaires menées des points T, V sur AB et CD ; nous les représenterons par $2T_1$, $2V_1$. Pareillement, $2T_2$, $2V_2$ désigneront les hauteurs analogues des triangles $\sigma_2 F \sigma_4$, $\Sigma_2 F \Sigma_4$. Le quadrilatère ABCD donne lieu à quatre

triangles ayant chacun quatre cercles tangents à ses côtés; il en résulte qu'on peut mener seize cercles tangents à trois des lignes AB, BC, CD, DA. Ces cercles ont pour centres les points A', B', C', D', A'', B'', C'', D'', A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 répartis, comme on l'a vu, sur les circonférences O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2. Nous représenterons les côtés AB, BC, CD, DA par a, b, c, d respectivement, le rayon d'un cercle par la même lettre que son centre, et par p_a la perpendiculaire abaissée d'un certain point p sur l'un des côtés a du quadrilatère. Si l'on considère un des cercles tangents, le côté qu'il ne touche pas est opposé à un côté sur lequel se trouve un contact que nous appellerons le *premier contact du cercle considéré*.

Les cercles A', C'', B_1, D_2 ne touchent pas le côté c et ont leur premier contact sur a.

Les cercles B', D'', A_1, C_2 ne touchent pas le côté d et ont leur premier contact sur b.

Les cercles C', A'', D_1, B_2 ne touchent pas le côté a et ont leur premier contact sur c.

Les cercles D', B'', C_1, A_2 ne touchent pas le côté b et ont leur premier contact sur d.

Les points σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sont des centres de similitude inverse pour les cercles A' et C'', B' et D'', C' et A'', D' et B''; les points Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, des centres de similitude directe pour les cercles B_1 et D_2, A_1 et C_2, D_1 et B_2, C_1 et A_2.

10. Théorème. — *Si l'on considère l'un des seize cercles* A', B',... *et que l'on joigne son centre à ceux des cercles* O', O'', O_1, O_2, ω', ω'', ω_1, ω_2 *qui passent par ce point, la première droite sera perpendiculaire et la seconde parallèle au côté sur lequel se trouve le premier contact de ce cercle.*

Soit le cercle A' ayant son premier contact sur le côté AB, et par le centre duquel passent les cercles O' et ω'; je dis que $A'O'$ est perpendiculaire sur AB, et que $A'\omega'$ lui est parallèle. En effet, 1° l'angle $C'A'O' = 1^d - A'B'C' = \frac{1}{2}E$; cet angle $C'A'O'$ est donc le complément de l'angle $E\sigma_1 A'$, et par suite $A'O'$ est perpendiculaire sur AB; 2° l'angle $C_2 A'\omega' = 1^d - A'C_1 C_2 = C_1 B_1 V = \frac{1}{2}B$; les angles $C_2 A'\omega'$, $A'BA$ sont donc égaux, et, comme ils sont alternes-internes, $A'\omega'$ est parallèle à AB.

La première partie donne lieu à ce corollaire : Le rayon qui joint le centre d'un des cercles A', B',... à son premier contact passe par le centre de celle des circonférences O', O'', O_1, O_2 sur laquelle se trouve le centre de ce cercle.

11. Théorème. — *Le centre* O *est le milieu des distances* O', O'', et O_1, O_2.

En effet, les deux cercles A' et C'' étant l'un inscrit, l'autre exinscrit au triangle ABF, le milieu m_1 de la distance $\zeta_1 \zeta'_1$ qui sépare leurs contacts avec le côté AB est aussi le milieu de ce côté ; par conséquent, dans le trapèze birectangle $O'\zeta_1\zeta'_1 O''$, la perpendiculaire menée par le point m_1 sur le côté AB passe par le milieu de $O'O''$ et aussi par le centre O. De même, les cercles D', B'' étant l'un inscrit, l'autre exinscrit au triangle AED, le milieu m_4 de la distance $\zeta_4\zeta'_4$ est aussi le milieu du côté DA, et par conséquent, dans le trapèze birectangle $O'\zeta_4\zeta'_4 O''$, la perpendiculaire menée par le point m_4 sur le côté DA passe par le milieu de $O'O''$ et aussi par le centre O. Il résulte de là que le point O est justement le milieu de $O'O''$.

Que l'on substitue aux cercles A', C'', D', B'' respectivement les cercles A_1, C_2, D_1, B_2, et l'on verra de même que O est le milieu de O_1O_2.

12. Théorème. — *La seconde tangente issue de l'un des centres de similitude σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 aux cercles correspondants est parallèle au côté que ces cercles ne touchent pas.*

Soit $f'\sigma_1 g'$ la seconde tangente intérieure commune aux cercles A' et C'' (la première est sur le côté AB), g' étant son contact avec le cercle C''; alors l'angle $g'C''\sigma_1 = \sigma_1 C''\zeta'_1$; mais $\sigma_1 C''\zeta'_1 = TE\sigma_1$, puisque ces angles sont les compléments de $E\sigma_1 T$: donc $g'C''\sigma_1$ est le complément de $E\sigma_1 T$ ou de son égal $T\sigma_3 E$. Il en résulte que $C''g'$ est perpendiculaire sur ED; par suite, $\sigma_1 g'$ et CD sont parallèles, et ainsi des autres.

13. Théorème. — 1° *La distance du centre de l'un des cercles* A', B', C', D' *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance à ce côté du point d'intersection* T *des diagonales intérieures du quadrilatère* A'B'C'D', *moins le rayon de ce cercle :*

$$A'_c = 2T_1 - A', \quad B'_d = 2T_2 - B',$$
$$C'_a = 2T_1 - C', \quad D'_b = 2T_2 - D'.$$

2° *La distance du centre de l'un des cercles* A'', B'', C'', D'' *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance du point* T *à ce côté, plus le rayon de ce cercle :*

$$A''_a = 2T_1 + A'', \quad B''_b = 2T_2 + B'',$$
$$C''_c = 2T_1 + C'', \quad D''_d = 2T_2 + D''.$$

3° *La distance du centre de l'un des cercles* A_1, B_1, C_1, D_1 *au côté qu'il ne touche pas est égale à deux fois la distance à ce côté du point* V *intersection des diagonales intérieures du quadrilatère* $A_1B_1C_1D_1$, *moins le rayon de ce cercle :*

$$A_{1d} = 2V_2 - A_1, \quad B_{1c} = 2V_1 - B_1,$$
$$C_{1b} = 2V_2 - C_1, \quad D_{1a} = 2V_1 - D_1.$$

4° *La distance du centre de l'un des cercles* A_2, B_2, C_2, D_2 *au côté qu'il ne touche pas est égale en valeur absolue au rayon de ce cercle, moins deux fois la distance du point* V *au même côté :*

$$A_{2b} = A_2 - 2V_2,\quad B_{2a} = 2V_1 - B_2,$$
$$C_{2d} = 2V_2 - C_2,\quad D_{2c} = D_2 - 2V_1.$$

14. Les quadrilatères inscriptibles $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ ayant leurs diagonales rectangulaires, les milieux des côtés de chacun d'eux sont les sommets d'un rectangle inscrit dans une circonférence dont le centre est au milieu de la distance qui sépare le centre du cercle circonscrit au quadrilatère du point de rencontre de ses diagonales. Ainsi, pour le quadrilatère $A'B'C'D'$, les milieux u_1, u_2, u_3, u_4 de ses côtés seront les sommets d'un rectangle inscrit dans une circonférence ayant pour centre le milieu M' de O'T.

Si l'on prend les milieux u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 des distances TA', TB', TC', TD', les points u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 sont sur une même circonférence ayant son centre en M' et son rayon ρ' égal à la moitié du rayon du cercle O'. De plus les droites $M'u'_1$, $M'u'_2$, $M'u'_3$, $M'u'_4$ sont respectivement perpendiculaires sur AB, BC, CD, DA. En effet, dans le triangle A'OT, M' et u'_1 étant les milieux de TO' et de TA', la droite $M'u'_1$ est parallèle à O'A' et égale à sa moitié; donc, puisque A'O' est perpendiculaire sur AB, il en est de même de $M'u'_1$; de plus, u'_1 est sur la circonférence décrite de M' comme centre avec la moitié de O'A' pour rayon.

15. Théorème. — *Le quadrilatère* ABCD *étant inscriptible :*

1° *Le diamètre du cercle* O', *qui passe par les centres* *des cercles* A', B', C', D' *est égal à la somme des rayons des cercles opposés* A' *et* C', *moins la somme des deux autres* B' *et* D';

2° *Le diamètre du cercle* O_1, *qui passe par les centres des cercles* A_1, B_1, C_1, D_1, *est égal à la somme des rayons des cercles opposés* A_1 *et* C_1, *moins la somme des deux autres* B_1 *et* D_1;

3° *Le diamètre du cercle* O'', *qui passe par les centres des cercles* A'', B'', C'', D'', *est égal à la somme des rayons de ces cercles ;*

4° *Le diamètre du cercle* O_2, *qui passe par les centres des cercles* A_2, B_2, C_2, D_2, *est égal à la somme des rayons de ces cercles.*

1° Les côtés AB, BC, CD, DA étant pris successivement pour axes de projection, on a

$$\begin{aligned}
A' + T_1 &= 2u'_{1a} = 2(M'_a + \rho'), \quad + \\
B' + T_2 &= 2u'_{2b} = 2(M'_b - \rho'), \quad - \\
C' + T_1 &= 2u'_{3c} = 2(M'_c + \rho'), \quad + \\
D' + T_2 &= 2u'_{4d} = 2(M'_d - \rho'). \quad -
\end{aligned}$$

Combinant ces équations d'après le signe mis en regard, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &A' + C' - B' - D' + 2T_1 - 2T_2 \\ &\quad = 8\rho' + 2(M'_a + M'_c - M'_b - M'_d). \end{aligned} \right.$$

Prenant le côté AB pour axe de projection, on obtient

$$\begin{aligned}
A' + B' &= 2u_{1a}, \\
B' + 2T_1 - C' &= 2u_{2a}, \\
2T_1 - C' + D' &= 2u_{3a} \\
D' + A' &= 2u_{4a},
\end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad A' + B' + D' + 2T_1 - C' = u_{1a} + u_{2a} + u_{3a} + u_{4a} = 4M'_a. \quad +$$

Projetant sur le côté BC, on a

$$A' + B' = 2u_{1b},$$
$$B' + C' = 2u_{2b},$$
$$C' + 2T_2 - D' = 2u_{3b},$$
$$2T_2 - D' + A' = 2u_{4b},$$

d'où

$$(3)\quad B' + C' + A' + 2T_2 - D' = u_{1b} + u_{2b} + u_{3b} + u_{4b} = 4M'_b. \quad -$$

Le côté CD étant l'axe de projection, il vient

$$2T_1 - A' + B' = 2u_{1c},$$
$$B' + C' = 2u_{2c},$$
$$C' + D' = 2u_{3c},$$
$$D' + 2T_1 - A' = 2u_{4c},$$

d'où

$$(4)\quad C' + D' + B' + 2T_1 - A' = u_{1c} + u_{2c} + u_{3c} + u_{4c} = 4M'_c. \quad +$$

Enfin, projetant sur le côté DA, on a

$$A' + 2T_2 - B' = 2u_{1d},$$
$$2T_2 - B' + C' = 2u_{2d},$$
$$C' + D' = 2u_{3d},$$
$$D' + A' = 2u_{4d};$$

d'où

$$(5)\quad D' + A' + C' + 2T_2 - B' = u_{1d} + u_{2d} + u_{3d} + u_{4d} = 4M'_d. \quad -$$

Combinant les équations (2), (3), (4), (5) selon les signes mis en regard, il vient

$$(6)\quad B' + D' - A' - C' + 2T_1 - 2T_2 = 2(M'_a + M'_c - M'_b - M'_d);$$

retranchant l'équation (6) de l'équation (1), on a

$$A' + C' - B' - D' = 4\rho' = 2O'.$$

3° Désignant par ρ'' le rayon du cercle $p'_1 p'_2 p'_3 p'_4$ dont le centre est en M'', et projetant successivement sur AB, BC, CD, DA, on a

$$\begin{aligned}
C'' - T_1 &= 2p'_{3a} = 2(\rho'' - M''_a), \quad + \\
T_2 - D'' &= 2p'_{4b} = 2(M''_b - \rho''), \quad - \\
T_1 - A'' &= 2p'_{1c} = 2(M''_c - \rho''), \quad - \\
B'' - T_2 &= 2p'_{2d} = 2(\rho'' - M''_d). \quad +
\end{aligned}$$

Combinant ces équations d'après les signes mis en regard, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A'' + B'' + C'' + D'' - 2T_1 - 2T_2 \\ & \quad = 8\rho'' - 2(M''_a + M''_b + M''_c + M''_d). \end{aligned} \right.$$

Prenant le côté AB pour axe de projection, on obtient

$$\begin{aligned}
A'' + 2T_1 + B'' &= 2p_{1a}, \quad + \\
- B'' + C'' &= 2p_{2a}, \quad - \\
C'' - D'' &= 2p_{3a}, \quad - \\
D'' + A'' + 2T_1 &= 2p_{4a}, \quad +
\end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad A'' + B'' + D'' + 2T_1 - C'' = p_{1a} + p_{2a} + p_{3a} + p_{4a} = 4M''_a.$$

Projetant sur le côté BC, il vient

$$\begin{aligned}
A'' + B'' + 2T_2 &= 2p_{1b}, \quad + \\
B'' + 2T_2 + C'' &= 2p_{2b}, \quad + \\
C'' - D'' &= 2p_{3b}, \quad + \\
- D'' + A'' &= 2p_{4b}, \quad +
\end{aligned}$$

d'où

$$(3) \quad B'' + C'' + A'' + 2T_2 - D'' = p_{1b} + p_{2b} + p_{3b} + p_{4b} = 4M''_b.$$

Projetant sur le côté CD, il vient

$$\begin{aligned}
- A'' + B'' &= 2p_{1c}, \quad + \\
B'' + C'' + 2T_1 &= 2p_{2c}, \quad + \\
C'' + 2T_1 + D'' &= 2p_{3c}, \quad + \\
- D'' + A'' &= 2p_{4c}, \quad -
\end{aligned}$$

d'où

(4) $C'' + D'' + B'' + 2T_1 - A'' = p_{1c} + p_{2c} + p_{3c} + p_{4c} = 4M''_c$.

Enfin, le côté DA étant pris pour axe de projection, on a

$$\begin{aligned} -A'' + B'' &= 2p_{1d}, \quad - \\ -B'' + C'' &= 2p_{2d}, \quad + \\ C'' + D'' + 2T_2 &= 2p_{3d}, \quad + \\ D'' + 2T_2 + A'' &= 2p_{4d}, \quad + \end{aligned}$$

d'où

(5) $D'' + A'' + C'' + 2T_2 - B'' = p_{1d} + p_{2d} + p_{3d} + p_{3d} = 4M''_d$.

En ajoutant les équations (2), (3), (4), (5), on obtient

(6) $A'' + B'' + C'' + D'' + 2T_1 + 2T_2 = 2(M''_a + M''_b + M''_c + M''_d)$;

ajoutant les équations (1) et (6), il vient

$$A'' + B'' + C'' + D'' = 4\rho'' = 2O''.$$

On démontre d'une manière analogue la deuxième et la quatrième partie du théorème

---

QUESTION DE MÉCANIQUE (*);

PAR M. A. TOURETTES.

Une tige dépourvue d'élasticité, qui se meut parallèlement à elle-même sur un plan horizontal parfaitement uni, vient heurter contre un axe perpendiculaire au plan : déterminer la force du choc et la position de la tige un instant quelconque après la percussion.

Pour avoir le mouvement de la tige, il suffit de con-

(*) *Voir* P. JULLIEN, *Problèmes de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 263.

naître la translation du centre de gravité et la rotation de la tige autour de ce centre.

Cela posé, soient

m la masse de la tige,
k son rayon de gyration autour du centre de gravité,
u la vitesse avant le choc,
c la distance du centre de gravité au point de la tige qui a reçu le choc,
B la force du choc.

Rapportons le centre de gravité à deux axes coordonnés Ox, Oy, dont l'origine soit au pied de l'axe fixe, le premier étant dirigé vers le centre de gravité à l'instant du choc, et le second du côté où la tige tend à avancer.

Désignons par α l'angle que la direction du mouvement avant le choc fait avec Oy, et par θ l'angle dont la tige a tourné dans le sens de rotation qui amène Ox vers Oy.

Soient v, v_1 les composantes de la vitesse du centre de gravité après le choc, parallèles aux axes Ox, Oy; $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse de rotation autour du centre de gravité. Si l'on remarque que B est mesurée par la quantité de mouvement communiquée à la tige, et qu'alors $\frac{B}{m}$ est la vitesse due à la percussion, en sens inverse de Oy, nous aurons

$$v = u\cos\alpha - \frac{B}{m}, \quad v_1 = u\sin\alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Bc}{mk^2}.$$

Il faut une quatrième équation, puisque nous avons quatre inconnues v, v_1, $\frac{d\theta}{dt}$, B. Nous l'obtiendrons en exprimant que la vitesse est nulle au point O, au moment du choc; ce qui donne

$$u\cos\alpha - \frac{B}{m} = \frac{Bc^2}{mk^2}.$$

Au moyen de ces équations, nous avons successivement

$$B = \frac{mk^2 u \cos\alpha}{c^2 + k^2}, \quad v = \frac{c^2 u \cos\alpha}{c^2 + u^2}, \quad v_1 = u \sin\alpha,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cu\cos\alpha}{c^2 + k^2},$$

et de ces équations on tire immédiatement

$$x = u \sin\alpha . t + c, \quad y = \frac{c^2 u \cos\alpha}{c^2 + k^2} t,$$

$$\theta = \frac{cu\cos\alpha}{c^2 + k^2} t,$$

qui font connaître la position de la tige à l'époque t après le choc.

EXPRESSION DE s COMME QUOTIENT DE DEUX DÉTERMINANTS;

Par M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

On connaît les équations

$$\begin{aligned}
(A - s)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0,\\
B''\alpha + (A' - s)\beta + B\gamma &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + (A'' - s)\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Mettons-les sous la forme

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma - s\alpha &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma - s\beta &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma - s\gamma &= 0,
\end{aligned}$$

et joignons-y

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - s\frac{1}{s} = 0.$$

Il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \beta \\ B' & B & A'' & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \beta \\ B' & B & A'' & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{s}\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Quand le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$ est $\gtrless 0$, la surface a un centre et un seul, aucune des valeurs de s n'est nulle; on a donc alors, pour chacune des sections principales,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \beta \\ B' & B & A'' & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} \gtrless 0;$$

chacune de ces sections est en conséquence du genre elliptique ou hyperbolique.

Quand on a

$$\Delta = 0,$$

si s est différent de zéro, il s'ensuit $\Delta' = 0$; la section principale correspondante est du genre parabole.

DÉTERMINER LE PARAMÈTRE D'UNE SECTION PARABOLIQUE DANS UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes; soit

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0$$

celle du plan sécant, avec la condition

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2=0;$$

nous supposerons $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Quand la section est une ellipse ou une hyperbole, on a, pour les demi-axes d'une section centrale,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{a^2\alpha^2}{R^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{R^2-b^2}-\frac{c^2\gamma^2}{R^2+c^2}=0,\\ &R_1^2R_2^2=\frac{-a^2b^2c^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2};\end{aligned}\right.$$

et l'on a pour la section par un plan (p)

$$\frac{R'^2}{R_1^2}=1-\frac{p^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^2\gamma^2}=\frac{p^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2+c^2\gamma^2}{c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2};$$

posons

$$q=\frac{R'^2}{R''}=\frac{R'^3}{R'R''}.$$

Comme on a

$$R'R'' = R_1 R_2 \frac{p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}$$

$$= abc \frac{p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{(c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R'^3 = R_1^3 \frac{(p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

il s'ensuit

$$q = R_1^3 \frac{(p^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{abc}.$$

De là résulte pour une section parabolique

$$q = R_1^3 \frac{p}{abc},$$

donc

$$R_1 = \left(q\frac{abc}{p}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En portant cette valeur de R_1 dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}\alpha^2}{(bcq)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^{\frac{4}{3}}\beta^2}{(acq)^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{4}{3}}\gamma^2}{(abq)^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à q, on trouve dans le coefficient de $q^{\frac{4}{3}}$ le facteur $a^2\alpha + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2$ qui est nul. L'équation se réduit à

$$q^{\frac{2}{3}}[a^2\alpha^2(c^2-b^2)b^2+\beta^2(-a^2+c^2)+c^2\gamma^2(b^2+a^2)]-(abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}} = 0,$$

de sorte que

$$q^{\frac{2}{3}} = \frac{(abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{a^2\alpha^2(c^2 - b^2) + b^2\beta^2(-a^2 + c^2) + c^2\gamma^2(b^2 + a^2)}$$

$$= \frac{(abc)^{\frac{4}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2},$$

et

$$q = \frac{(abc)^2 p}{(a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

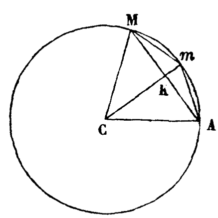
c'est la valeur du demi-paramètre.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INÉGALITÉ

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}.$$

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit arc $\mathrm{AM} = a$ dans la circonférence de rayon 1; le nombre a représente le double du secteur ACM; $\sin a$



le double du triangle ACM; et $a - \sin a$ le double du segment $\mathrm{A}m\mathrm{M}$.

Ce segment est plus petit que le double du triangle $\mathrm{A}m\mathrm{M}$, si m est le milieu de l'arc AM.

Donc je puis écrire

$$a - \sin a < 4\mathrm{A}m\mathrm{M},$$

ou

$$a - \sin a < 2\mathrm{MA} \times \mathrm{K}m.$$

Remplaçant MA par sa valeur $2 \sin \frac{a}{2}$ et KM par sa valeur $mA.\sin KAm$ ou $2\sin^2\frac{a}{4}$, j'obtiens

$$a - \sin a < 8\sin\frac{a}{2}\sin^2\left(\frac{a}{4}\right),$$

et *a fortiori*

$$a - \sin a < 8\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^3}{4}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1874.

PAR M. A. TOURETTES.

Étant donnés un triangle et un point M, *on sait que l'on peut généralement faire passer par ce point deux paraboles circonscrites au triangle.*

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu des points M *pour lesquels les axes des deux paraboles correspondantes font un angle donné.*

Soient O, A, B les trois sommets du triangle; OA et OB les axes des x et des y; θ l'angle $\widehat{AOB}$; α et β les coordonnées du point M; $OA = a$, $OB = b$, et K un coefficient variable.

L'équation générale des paraboles circonscrites au triangle sera

$$(1) \qquad (y - Kx)^2 - K^2 ax - by = 0,$$

et, pour que la parabole passe par le point (α, β), il faudra que

$$(\beta - K\alpha)^2 - K^2 a\alpha - b\beta = 0,$$

ou bien que

$$(2) \qquad (\alpha^2 - a\alpha)K^2 - 2\alpha\beta K + \beta^2 - b\beta = 0.$$

Les deux valeurs de K déduites de cette équation sont les coefficients angulaires des axes des deux paraboles; soit V l'angle constant qu'ils doivent former, on aura

$$(3) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{(K' - K'')\sin\theta}{1 + (K' + K'')\cos\theta + K'K''}.$$

Or l'équation (2) donne

$$K' + K'' = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - a\alpha}, \quad K'K'' = \frac{\beta^2 - b\beta}{\alpha^2 - a\alpha},$$

$$K' - K'' = \frac{2\sqrt{\alpha\beta(b\alpha + a\beta - ab)}}{\alpha^2 - a\alpha}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), et remplaçant α et β par x et y, on trouve

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax - by \\ & = 2\sqrt{xy(bx + ay - ab)}\,\frac{\sin\theta}{\operatorname{tang} V}; \end{aligned} \right.$$

le lieu est une courbe du quatrième degré.

Si $V = \frac{\pi}{2}$, le second membre disparaît, et l'on a

$$(5) \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - ax - by = 0.$$

C'est l'équation d'une circonférence circonscrite au triangle donné (*).

Considérons le cas général $V \lessgtr \frac{\pi}{2}$.

(*) Les quatre points communs à deux paraboles, dont les axes sont rectangulaires, appartiennent à une même circonférence; et inversement, si les quatre points communs à deux paraboles appartiennent à une même circonférence, les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires.

La démonstration directe de ces propositions est très-simple.

G.

L'équation (4) développée s'écrira

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+2xy\cos\theta)^2\\ &\quad -2(ax+by)(x^2+y^2+2xy\cos\theta)\\ &\quad -\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}xy(bx+ay)\\ &\qquad\qquad +(ax+by)^2+\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}ab\,xy=0. \end{aligned}\right.$$

L'ensemble des termes du quatrième degré donne des directions asymptotiques imaginaires : donc la courbe n'a pas de points à l'infini. On voit qu'elle passe par l'origine qui est un point double. Les tangentes sont données par l'équation

$$(ax+by)^2+\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}ab\,xy=0.$$

Elles sont réelles et situées dans l'angle supplémentaire de θ. Or le choix du sommet O pour origine n'a rien de particulier; par suite, les deux autres sommets sont des points doubles; si l'on transportait l'origine en un de ces points, on trouverait les équations des tangentes en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré. Examinons la forme de la courbe entre les points A et B. Pour cela, je pose

$$x=\lambda\rho,\quad y=\mu\rho,$$

et je substitue dans l'équation (6). On trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\theta)\rho^2\\ &\quad -\Big[2(a\lambda+b\mu)(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\theta)\\ &\qquad\qquad +\frac{4\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}\lambda\mu(b\lambda+a\mu)\Big]\rho\\ &\qquad\qquad +(a\lambda+b\mu)^2+\frac{4ab\sin^2\theta}{\operatorname{tang}^2 V}\lambda\mu=0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait varier λ de 1 à zéro et μ de zéro à 1, le rayon ρ décrit l'angle AOB; nous voyons que les deux racines de l'équation (7) restent positives et inégales, car la quantité sous le radical a pour expression

$$\frac{4\sin^4\theta}{\tang^4 V}\lambda^2\mu^2(b\lambda+a\mu)^2$$
$$+\frac{4\sin^2\theta}{\tang^2 V}\cdot\lambda^2\mu^2(\lambda^2+2\lambda\mu\cos\theta+\mu^2)(a^2+b^2-2ab\cos\theta),$$

laquelle est essentiellement positive dans l'hypothèse où je me suis placé. On aura donc deux branches de courbe distinctes partant du point A et allant se couper au point B.

Même raisonnement pour les arcs compris entre B et O, O et A. La courbe se compose de trois lunules qui constituent une courbe proprement dite du quatrième degré et non l'ensemble de deux coniques, car il n'y a que trois points d'intersection.

Note. — M. Gambey nous a envoyé une solution de la même question.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1874;

PAR M. C. CHADU.

Étant donné un triangle ABC, *on mène par chacun de ses sommets une droite qui partage le côté opposé en deux segments respectivement proportionnels aux carrés des côtés adjacents :*

1° *Faire voir que les droites partant des trois sommets concourent en un même point* M ;

2° *Démontrer que si de ce point* M *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, MR *sur les côtés du triangle*

ABC, *les longueurs* MP, MQ, MR *sont respectivement proportionnelles aux côtés du triangle* ABC, *et que le point* M *est le centre de gravité du triangle* PQR *formé par les pieds de ces perpendiculaires;*

3° *Calculer, en fonction des côtés du triangle* ABC, *la somme* $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2$ *ainsi que les côtés et l'aire du triangle* PQR.

I. — Soient a, b, c les côtés du triangle ABC; AD, BE, CF les droites satisfaisant à l'énoncé.

On aura les relations

$$(1) \qquad \frac{BD}{CD} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{AF}{BF} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{a^2}{c^2}.$$

En multipliant ces trois relations membre à membre, on obtient

$$\frac{BD.AF.CE}{CD.BF.AE} = 1,$$

égalité qui montre que les droites considérées se coupent en un même point.

II. — Exprimons que le triangle AMC est la différence des triangles ADC et DMC, nous aurons

$$(2) \qquad b.MQ = DC\,(h - MP),$$

h étant la hauteur du triangle ABC, abaissée du sommet A.

On aurait de même

$$(3) \qquad c.MR = BD\,(h - MP).$$

En divisant membre à membre les équations (2) et (3) et tenant compte des relations (1), on obtient

$$\frac{b.MQ}{c.MR} = \frac{DC}{BD} = \frac{b^2}{c^2}$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{MQ}}{b} = \frac{\mathrm{MR}}{c},$$

par suite

$$\frac{\mathrm{MP}}{a} = \frac{\mathrm{MQ}}{b} = \frac{\mathrm{MR}}{c}.$$

Si l'on remarque que

$$a\,\mathrm{MP} + b\,\mathrm{MQ} + c\,\mathrm{MR} = 2\mathrm{S},$$

S surface du triangle ABC, on a

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{MP}}{a} = \frac{\mathrm{MQ}}{b} = \frac{\mathrm{MR}}{c} = \frac{2\mathrm{S}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a aussi

$$(5)\qquad \frac{\mathrm{MP}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\mathrm{MQ}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\mathrm{MR}}{\sin \mathrm{C}}.$$

Les triangles PMQ, QMR, RMP ont respectivement pour mesure la moitié des produits

$$\mathrm{MP}.\mathrm{MQ}\sin \mathrm{C},\quad \mathrm{MR}.\mathrm{MQ}\sin \mathrm{A},\quad \mathrm{MP}.\mathrm{MR}\sin \mathrm{B}.$$

Les relations (5) montrent que les surfaces de ces trois triangles sont équivalentes; le point M est donc le centre de gravité du triangle PQR.

III. — Des équations (4) on déduit facilement la relation

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{MQ}}^2 + \overline{\mathrm{MR}}^2 = \frac{4\mathrm{S}^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le triangle PQM donne

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{QM}}^2 + 2\,\mathrm{PM}.\mathrm{QM}\cos \mathrm{C}.$$

En remplaçant PM et QM par leurs valeurs tirées des équations (4), et remarquant que

$$2ab\cos \mathrm{C} = a^2 + b^2 - c^2,$$

on a

$$\overline{PQ}^2 = \frac{4S^2(2a^2+2b^2-c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

L'aire du triangle PQR est égale à trois fois l'aire du triangle PMQ; en désignant par S_1 l'aire du triangle PQR, on aura

$$S_1 = \frac{3\,MP.MQ\sin C}{2} = \frac{6S^2 ab\sin C}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

mais $ab\sin C = 2S$; donc

$$S_1 = \frac{12S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Note. — M. Jules Lefebvre, d'Amiens, nous a envoyé une solution de la même question.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. Genocchi.* — Dans le numéro de février 1875 de vos *Annales*, p. 63, je trouve un article du *P. Pepin*, sur une question que j'avais déjà résolue, c'est-à-dire sur la résolution en nombres rationnels des équations

$$x^2+y^2-1=z^2,\quad x^2-y^2-1=u^2.$$

Il cite une solution très-particulière et incomplète donnée dans le tome IX, p. 116 (1^{re} série); mais il ne connaissait pas, sans doute, ma solution qui est tout à fait générale, et qui a paru dans le même Recueil, t. X, p. 80-85. Cet article, qui contient à la vérité quelques erreurs d'impression, est résumé dans les dernières lignes (p. 84-85), et je conclus par ces formules

$$x = \frac{p^4+4q^4+r^2}{p^4+4q^4-r^2},\quad y = \frac{4pqr}{p^4+4q^4-r^2},$$

où p, q, r sont trois nombres rationnels quelconques.

Puisque j'ai commencé à citer mes travaux, j'ajouterai que le Mémoire de M. Picart, dans le tome XII des *Nouvelles Annales* (2^e^ série), p. 418-422, sur la différence $n^{\text{ième}}$ exprimée par la dérivée $n^{\text{ième}}$, m'a fait souvenir d'un article sur le passage des différences aux différentielles, inséré dans le tome VIII, p. 385-388 (2^e^ série).

2. Nous avons reçu de M. Bourguet une lettre qui contient quelques observations critiques, et une nouvelle solution de la question 1077, déjà résolue (numéro de janvier, p. 77). Nous ferons prochainement connaître la solution de M. Bourguet.

3. *Extrait d'une lettre de M. Genty.* — A-t-on remarqué que la question 1127, résolue par M. Givelet, n'est autre chose que la question 1071, dont M. Gerono a donné une solution élégante, ou plutôt sa réciproque transformée par rayons vecteurs réciproques? Il suffit de prendre l'un des foyers de la conique pour centre d'inversion.

4. *Extrait d'une lettre de M. Càtalan* (Liége, le 25 février). — Dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, M. Bourguet démontre, fort simplement, une proposition presque évidente, mais qui n'est pas du tout la *généralisation* de la *question* 1135. En effet, soient $k=2$, $a_1=a$, $a_2=b$: le théorème de M. Bourguet devient

$$\frac{1.2.3\ldots(2a-1)\,1.2.3\ldots(2b-1)}{1.2\ldots(a-1)\,1.2\ldots(b-1)\,1.2\ldots(a+b-1)}$$

ou

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(2a-1)\,b(b+1)(b+2)\ldots(2b-1)}{1.2.3\ldots(a+b-1)} = \textit{entier}.$$

D'ailleurs le petit théorème d'Arithmétique proposé aux lecteurs des *Nouvelles Annales* est-il susceptible d'une généralisation *simple?* Je l'ignore. Procédant par induction, on pourrait supposer que

$$\frac{(a+1)\ldots 2a \times (b+1)\ldots 2b \times (c+1)\ldots 2c}{1.2.3\ldots(a+b+c)} = \textit{entier};$$

mais cette hypothèse est fausse. En effet, elle donne, par exemple,

$$\frac{3.4 \times 4.5.6 \times 3.4}{1.2.3.4.5.6.7} = \textit{entier}.$$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Éléments de Géométrie projective, par LUIGI CREMONA, Directeur de l'École d'Application des ingénieurs, à Rome, traduits, avec la collaboration de l'auteur, par ED. DEWULF, chef de bataillon du Génie, officier de la Légion d'honneur, etc. (1er fascicule). Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55 (1875).

Exposition géométrique des propriétés générales des courbes, par CHARLES RUCHONNET (de Lausanne). 3e édition, augmentée et en partie refondue. Paris, Gauthier-Villars, libraire-imprimeur, quai des Augustins, 55; Lausanne, Georges Bridel, éditeur; Zurich, Orell, Füssli et Cie.

Éléments de Calcul approximatif, par CHARLES RUCHONNET (de Lausanne). 2e édition, augmentée. Paris, Gauthier-Villars, libraire-éditeur, quai des Augustins, 55; Lausanne, Georges Bridel, éditeur; Zurich, Orell, Füssli et Cie.

La Théorie des parallèles selon les géomètres japonais, mise en ordre par CLAUDEL. Prix : 50 centimes. Bruxelles. En vente chez tous les libraires et chez l'auteur, rue du Bois-Sauvage, 16 (1875).

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Nouvelle Correspondance mathématique, publiée par EUGÈNE CATALAN, ancien élève de l'École Polytechnique, docteur ès Sciences, professeur à l'Université de Liége, etc., et PAUL MANSION, docteur spécial en Sciences mathématiques, professeur à l'Université de Gand.

Les articles destinés à la *Nouvelle Correspondance mathématique* doivent être adressés, *francs de port*, à M. Catalan, rue Nysten, 21 (Liége), ou à M. Mansion, rue Savaen, 11 (Gand). Ils doivent être écrits lisiblement.

Les auteurs de Notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celles-ci sur des feuilles séparées*.

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

La *Nouvelle Correspondance* paraîtra (provisoirement) tous les deux mois, en livraisons de 32 à 48 pages in-8°.

Prix de l'abonnement à six livraisons (environ 240 pages in-8°):

Belgique	7 fr. 50 c.
France	8 fr. 50 c.
Étranger	le port en sus.

Les ouvrages de Mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à la Rédaction seront annoncés ou analysés dans le Journal.

Dans un Avertissement, les deux savants rédacteurs de ce journal préviennent que la *Correspondance* s'occupera principalement des parties de la science mathématique enseignées (ou qui devraient être enseignées) dans les établissements d'instruction moyenne et dans les cours relatifs à la *Candidature;* et qu'ils essayeront, en particulier, de vulgariser la connaissance des parties les moins abstraites de la Géométrie *supérieure* et de l'Algèbre *moderne*.

Nous souhaitons la bienvenue et bonne chance à la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

Les trois premières livraisons ont paru : la première en août 1874, la deuxième au mois de décembre suivant et la troisième en mars 1875. Voici les sommaires de ces livraisons :

Première livraison (août 1874). *Avertissement.* — *Problème sur la circonférence;* par M. P. Mansion. — *Sur quelques propriétés des fractions périodiques* (P. M.). — *Remarque sur l'intégrale* $\int_0^\pi l(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx$; par M. E. Catalan. — *Sur un nouveau mode de génération des coniques, dû à M. A. Transon* (P. M.). — *Démonstration d'un théorème de Liouville;* par M. P. Mansion. — Extraits analytiques : I. *Sur les bissectrices d'un triangle.* II, III, IV. *Sur le cercle.* V. *Sur le théorème de Dandelin.* — Bibliographie : I. *Éléments de Géométrie trilinéaire, par* Cambier (P. Mansion). II. *Les Mathématiques en Belgique en* 1872, par P. Mansion. — Questions proposées (1 à 6).

Deuxième livraison (décembre 1874). — *Sur l'intégrale* $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x a^2}\right)^m dx$; par M. Ch. Hermite. — *Note sur les axes instantanés glissants et les axes centraux, dans un corps solide en mouvement;* par M. J.-M. de Tilly. — *Questions de maximum et de minimum;* par M. J. Neuberg. — *Concours d'agrégation des Sciences mathématiques* (Paris, 1873), *solution de la question de Mathématiques élémentaires;* par M. J. Neuberg. — *Sur certaines courbes quarrables algébriquement;* par M. P. Mansion. — *Sur la théorie des transformations birationnelles planes en général;* par M. P. Mansion. — Extraits analytiques : V. *Sur les paraboles cubiques.* VI. *Sur une quartique unicursale.* — Solutions de questions proposées dans la *Nouvelle Correspondance* (Questions 1, 3, 4); par MM. P. S. et

L. Van den Broech. — Questions proposées (7 à 28). — Correspondance; par MM. Van Pott et Catalan. — Bibliographie: *Cours d'Analyse à l'École Polytechnique,* par M. Ch. Hermite (P. M.).

Troisième livraison (mars 1875). — *Sur l'intégrale* $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^m dx$; par M. J.-L.-W. Glaisher, M. A. F. R. A. S. — *Équation focale des coniques, en coordonnées tangentielles;* par M. J. Neuberg. — Extraits analytiques: VIII. *Sur les fractions décimales périodiques.* IX. *Racine cubique d'une expression imaginaire.* X. *Sur les développées des courbes planes.* XI. *Les cubiques unicursales sont des cissoïdes.* XII. *Construction des racines réelles d'une équation du quatrième ou du troisième degré au moyen d'une parabole fixe. Trisection de l'angle.* XIII. *Sur les polygones réguliers.* — Solutions des questions proposées dans la *Nouvelle Correspondance* (questions 2, 13, 14, 15, 16, 17, 23); par MM. Van den Broech, Médulfus, Derousseau, Charlier, Paulet. — Questions proposées (28 à 37). — Bibliographie: IV. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* par P. Argand. (P. M.) — V. *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche,* de M. Boncompagni (P. M.).

Principes de la théorie des déterminants, d'après Baltzer et Salmon; par P. Mansion.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1137

(voir 2e série, t. XIII, p. 207);

Par M. MORET-BLANC.

Deux hyperboloïdes gauches H_1, H_2 *ont une génératrice commune* L. *Par tout point m de* L *passent* *une génératrice* L_1 *de* H_1 *et une génératrice* L_2 *de* H_2. *Comment varie l'angle* $\widehat{L_1, L_2}$ *quand* m *parcourt* L?

(Dewulf.)

On sait qu'il existe sur la génératrice L deux points où les hyperboloïdes H_1, H_2 ont le même plan tangent. Je prends l'un de ces points pour origine, la génératrice L pour axe des z et le plan tangent commun pour plan des xz.

Les équations des deux hyperboloïdes seront de la forme

$$(H_1) \quad x(ax + by + cz) + y(ey + fz + g) = 0,$$
$$(H_2) \quad x(a_1x + b_1y + c_1z) + y(e_1y + f_1z + g_1) = 0.$$

Coupons le premier par le plan $y = mx$: la projection de l'intersection sur le plan des xz sera

$$x = 0, \quad (a + bm + em^2)x + (c + fm)z + gm = 0.$$

La seconde génératrice L_1 est à la distance de l'origine

$$z_1 = -\frac{gm}{c+fm}, \quad \text{d'où} \quad m = -\frac{cz_1}{fz_1+g}.$$

Les cosinus des angles que cette génératrice fait avec les axes sont proportionnels à

$$1, \quad m \quad \text{et} \quad -\frac{a+bm+em^2}{c+fm}$$

ou à

$$1, \quad -\frac{cz_1}{fz_1+g}, \quad \frac{a(fz_1+g)^2 - bcz_1(fz_1+g) + ec^2z_1^2}{cg(fz_1+g)}$$

ou enfin à

$$cg(fz_1+g), \quad -c^2gz_1, \quad (af^2 - bcf + ec^2)z_1^2 + (2afg - bcg)z_1 + ag^2.$$

Les cosinus des angles que la génératrice L_2 fait avec les axes sont de même proportionnels à

$$c_1g_1(f_1z_1+g_1), \quad -c_1^2g_1z_1,$$
$$(a_1f_1^2 - b_1c_1f_1 + e_1c_1^2)z_1^2 + (2a_1f_1g_1 - b_1c_1g_1)z_1 + a_1g_1^2.$$

Posant, pour abréger,

$$cg(fz_1+g)=\mathrm{A},\quad -c^2gz_1=\mathrm{B},$$
$$(af^2-bcf+ec^2)z_1^2+(2afg-bcg)z_1+ag^2=\mathrm{C},$$
$$c_1g_1(f_1z_1+g_1)=\mathrm{A}_1,\quad -c_1^2g_1z_1=\mathrm{B}_1,$$
$$(af_1^2-b_1c_1f_1+e_1c_1^2)z_1^2+(2a_1f_1g_1-b_1c_1g_1)z_1+a_1g_1^2=\mathrm{C}_1,$$

on aura

$$\cos\widehat{\mathrm{L}_1,\,\mathrm{L}_2}=\frac{\mathrm{AA}_1+\mathrm{BB}_1+\mathrm{CC}_1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\sqrt{\mathrm{A}_1^2+\mathrm{B}_1^2+\mathrm{C}_1^2}}.$$

Question 1139

(voir 2e série, t. XIII, p. 208);

PAR M. H. QUET,

Élève du lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagranval).

Par un point A, *extérieur à une parabole, on mène deux tangentes à la courbe et aux points de contact des normales qui se coupent en un point* B; *quel doit être le lieu des points* A *pour que celui des points* B *soit: 1° une droite; 2° un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole?* (ANDROWSKI.)

Je prends pour axes l'axe de la parabole et sa tangente au sommet; son équation sera

(1) $$y^2=2px.$$

Soient a et b les coordonnées du point A, et α, β celles du point B; l'équation de CD, polaire de A, sera

(2) $$by-px-ap=0.$$

D'un autre côté, l'équation de l'hyperbole passant par les pieds des normales menées du point B est

(3) $$xy+y(p-\alpha)-p\beta=0.$$

Les équations qui fournissent les ordonnées des points d'intersection de la droite (2) avec les courbes (1) et (3) sont

$$(4)\qquad y^2 - 2by + 2ap = 0,$$

$$(5)\qquad y^2 - \left(\frac{ap + \alpha p - p^2}{b}\right)y - \frac{p^2\beta}{b} = 0.$$

Ces deux équations devant donner les mêmes valeurs pour y, nous aurons, en identifiant,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2b^2 = ap + \alpha p - p^2, \\ 2ab = -p\beta. \end{array}\right.$$

1. Si maintenant nous voulons que le lieu du point B soit une droite, α et β doivent satisfaire à la condition

$$(7)\qquad \beta = c\alpha + d.$$

En éliminant α et β entre les relations (6) et (7), nous aurons une relation entre a et b qui sera l'équation du lieu des points A. Portant dans (7) les valeurs de α et de β tirées des relations (6), il vient, en remplaçant a et b par les coordonnées courantes x, y,

$$-2xy = c(2y^2 + p^2 - px) + pd$$

ou

$$(8)\qquad 2cy^2 + 2xy - cpx + p(pc + d) = 0.$$

Le lieu des points A est donc une hyperbole ayant une de ses asymptotes parallèle à l'axe des x, et l'autre perpendiculaire à la direction de la droite sur laquelle se meut le point B.

Si l'on voulait que le lieu des points B fût une parallèle à l'axe de la parabole, il faudrait faire $c = 0$ dans l'équation (8), et l'équation du lieu deviendrait

$$xy = -\frac{pd}{2},$$

équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. Si le lieu du point B est l'axe de la parabole, on a $c=0$, $d=0$, et l'équation $xy=-\frac{pd}{2}$ se réduisant à $xy=0$ montre que le point A doit être sur l'axe de la parabole, ou sur la tangente au sommet de cette courbe.

Proposons-nous de trouver ce que deviendrait le lieu des points A, si le point B était assujetti à se mouvoir sur une droite parallèle à l'axe des y.

Je remarque que, pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer α et β entre les relations (6), et la relation $\alpha=d'$. Remplaçant α par sa valeur dans la première des équations (6), il vient

$$2b^2=ap+pd'-p^2$$

ou, en remplaçant a et b par les coordonnées courantes x et y,

$$(9)\qquad y^2=\frac{p}{2}[x-(p-d')].$$

Le lieu est donc une parabole dont le paramètre est le quart du paramètre de la parabole proposée, et qui a même axe. Si donc le sommet de cette seconde parabole a une abscisse positive, elle sera tout entière comprise dans l'intérieur de la parabole proposée, et nous ne pourrons mener par les points A que des tangentes imaginaires, et, par suite, nous aurons des normales imaginaires correspondantes qui se couperont en des points réels dont le lieu sera la droite $x=d'$. Cherchons la condition pour que le lieu des points A soit tel qu'on puisse mener des tangentes réelles à la courbe proposée. Si nous faisons $y=0$ dans l'équation (9), il reste

$$x=p-d'.$$

On voit donc que, tant que d' sera négatif, le sommet de la courbe (9) sera intérieur à la parabole proposée, et nous n'aurons que des normales imaginaires; si d' est positif et $< p$, il en sera de même; mais si $d' > p$, le sommet de la parabole (9) est extérieur à la première parabole, et le lieu des points A d'où l'on pourra mener des tangentes réelles sera la partie de la courbe (9) extérieure à la première.

2. Le lieu du point de rencontre des normales doit être un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole.

Dans ce cas, pour trouver le lieu des points A, il faut éliminer α et β entre les équations (6) et celle d'un cercle ayant son centre à l'origine, c'est-à-dire entre les équations

$$2b^2 = ap + \alpha p - p^2,$$
$$2ab = -p\beta,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Portant dans la dernière les valeurs de α et β, tirées des deux premières, il vient

$$\frac{(2b^2 + p^2 - ap)^2}{p^2} + \frac{4a^2b^2}{p^2} = r^2$$

ou, en faisant a et b coordonnées courantes,

$$(2y^2 + p^2 - px)^2 + 4x^2y^2 = r^2p^2.$$

Dans ce cas, le lieu est une courbe du quatrième degré, que l'on sait construire.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Joseph Leclercq, élève au lycée d'Amiens; A. Tourettes; Brocard; Moret-Blanc; B. Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; P. S., à Cherbourg; H. Lez; A. Pellissier; de Rufz de Lavison, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Painvin); E. Kruschwitz, à Berlin.

Question 1150

(voir 2e série, t. XIII, p. 191);

PAR M. ASTOR,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Angoulême.

Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés d'un triangle donné.

(A. ROUSSET.)

Prenons pour triangle de référence le triangle donné. L'équation générale des coniques tangentes aux trois côtés est

$$\sqrt{a\alpha} + \sqrt{b\delta} + \sqrt{c\gamma} = 0$$

ou

$$(1)\quad \begin{cases} f(\alpha, \delta, \gamma) = a^2\alpha^2 + b^2\delta^2 + c^2\gamma^2 \\ \qquad\qquad - 2bc\delta\gamma - 2ca\gamma\alpha - 2ab\alpha\delta = 0. \end{cases}$$

La condition pour que cette équation (1) représente une hyperbole équilatère s'écrit aisément; elle est la suivante :

$$(2)\quad a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C = 0.$$

Soient α', δ', γ' les coordonnées du point donné; l'équation de sa polaire par rapport à (1) peut s'écrire

$$(3)\qquad \alpha' f'_\alpha + \delta' f'_\delta + \gamma' f'_\gamma = 0.$$

Entre les trois équations homogènes (1), (2), (3) il s'agit d'éliminer a, b, c. Or l'équation (1) peut s'écrire

$$(4)\qquad \alpha f'_\alpha + \delta f'_\delta + \gamma f'_\gamma = 0;$$

(3) et (4) donnent

$$\frac{f'_\alpha}{\beta\gamma' - \gamma\delta'} = \frac{f'_\delta}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{f'_\gamma}{\alpha\delta' - \delta\alpha'},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{a(b\delta + c\gamma - a\alpha)}{\delta\gamma' - \gamma\delta'} = \frac{b(c\gamma + a\alpha - b\delta)}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{c(a\alpha + b\delta - c\gamma)}{\alpha\delta' - \delta\alpha'}.$$

On tire de ces équations les valeurs proportionnelles de a, b, c, par une élimination facile qui consiste à remplacer ces deux équations par des équations du premier degré en a, b, c; elles s'obtiennent aisément en multipliant les deux termes du premier rapport par α, ceux du deuxième par β, ceux du troisième par γ, retranchant terme à terme les numérateurs et dénominateurs de deux des nouveaux rapports et égalant au troisième sous sa forme primitive. On a ainsi

$$\frac{a}{\alpha(\delta\gamma'-\gamma\delta')^2}=\frac{b}{\delta(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2}=\frac{c}{\gamma(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2};$$

il ne reste plus qu'à remplacer a, b, c par ces valeurs qui leur sont proportionnelles dans (2), et l'on a pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned}\alpha^2(\delta\gamma'-\gamma\delta')^4+\delta^2(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^4+\gamma^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^4&\\+2\alpha\beta(\delta\gamma'-\gamma\delta')^2(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2\cos C&\\+2\gamma\alpha(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2\cos B&\\+2\delta\gamma(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2(\alpha\delta'-\delta\alpha')^2\cos A&=0.\end{aligned}$$

Cette équation représente une courbe du sixième degré dont les trois sommets du triangle sont des points doubles et le point donné un point quadruple.

On pouvait prévoir que la courbe est du sixième ordre et a le point donné pour point quadruple.

En effet la condition pour qu'une droite

$$l\alpha+m\delta+n\gamma=0$$

soit tangente à la courbe est (Salmon)

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0.$$

Cette équation avec l'équation (2) montre qu'il existe deux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés et à une droite quelconque passant par le point donné. Sur toute droite issue du point donné se trouvent donc deux points du lieu, et le point lui-même est un point quadruple du lieu, car on peut mener quatre hyperboles passant par le point donné. Les quatre tangentes en ce point sont les tangentes à ces quatre hyperboles. Le lieu est donc du sixième ordre, puisqu'une droite issue du point donné le coupe en six points.

On peut aisément trouver le lieu par rapport aux paraboles tangentes aux trois côtés, en remplaçant l'équation (2) par la suivante :

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 0,$$

qui exprime que la droite de l'infini

$$\sin A\,\alpha + \sin B\,\beta + \sin C\,\gamma = 0$$

est tangente à la conique. Le lieu a pour équation

$$\frac{\alpha(\delta\gamma' - \gamma\alpha')^2}{\sin A} + \frac{\delta(\gamma\alpha' - x\gamma')^2}{\sin B} + \frac{\gamma(\alpha\delta' - \delta\alpha')^2}{\sin C} = 0.$$

C'est une courbe du troisième ordre passant par les trois sommets du triangle et ayant le point donné pour point double.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Bourguet; Moret-Blanc; Gambey; Genty; Ch. Contet.

RECTIFICATIONS.

Tome XIII, 2e série, page 569, ligne 2 : *au lieu de* élevé à la puissance égale à la quantité de chiffres du nombre, par cette même puissance de 10, *lisez :* élevé à la puissance égale à la quantité de chiffres du nombre, *diminué du double du nombre*, par cette même puissance de 10.

Page 570, ligne 3, en remontant : à la suite de l'énoncé de la loi VII, *il faut lire :* Écrivant les restes sous les chiffres de la période, le premier *reste* sous le *premier chiffre de la période*, le second *reste* sous le *second chiffre de la période*, et ainsi de suite, on obtient deux lignes horizontales renfermant chacune autant de nombres qu'il y a de chiffres dans la période. Si l'on additionne les nombres correspondants de ces deux lignes et que l'on partage la ligne horizontale des sommes en deux parties égales, on constate la propriété suivante.

QUESTIONS.

1165. La différence des carrés des distances de deux points de l'axe d'une parabole, également distants du foyer, à une tangente quelconque, est constante.

(H. Brocard.)

1166. Trouver, à l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC, un point O tel que les angles OAB, OBC, OCA soient égaux. (H. Brocard.)

1167. Démontrer la formule

$$\frac{4}{\pi} = \text{tang}\,45^\circ + \frac{1}{2}\,\text{tang}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\text{tang}\left(\frac{45^\circ}{4}\right) + \ldots$$

(L. Bourguet.)

1168. Résoudre en nombres *entiers et positifs* l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

1169. On donne sur un même plan deux circonférences inégales : décrire une parabole doublement tangente à chacune d'elles, et trouver la valeur du paramètre de la parabole en fonction des rayons et de la distance des centres des deux circonférences données.

PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOÏDE.

Démonstration d'un théorème de Poncelet. — Propriétés de figures anallagmatiques;

PAR M. L. MALEYX.

(Suite d'un article précédent.)

Quelques jours avant la mort de mon regretté collègue et ami Gros, qui avait suivi avec intérêt mon travail sur la strophoïde, il voulut bien me communiquer le théorème suivant, que je me fais un devoir de rapporter ici, ainsi que la démonstration qu'il m'en donna :

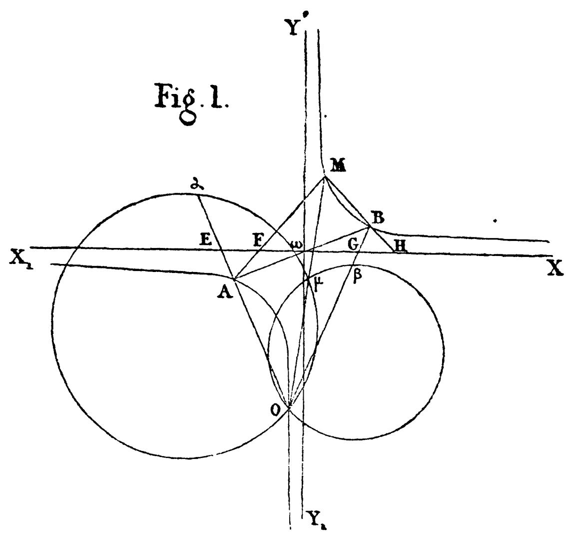
Si l'on donne dans une conique deux tangentes et une directrice, le lieu géométrique du foyer correspondant est une strophoïde dont le point double est au point de concours des deux tangentes; les points de rencontre de ces tangentes et de la directrice en sont deux points correspondants.

Soient SA, SA_1 les deux tangentes coupant la directrice aux points A et A_1, F le foyer d'une des coniques répondant à l'énoncé, C, C_1 les points de contact avec les tangentes SA, SA_1; on sait que les droites FA, FA_1 sont respectivement perpendiculaires sur les droites FC, FC_1. La droite SF qui fait des angles égaux avec FC, FC_1 fait aussi des angles égaux avec les droites FA, FA_1, perpendiculaires à FC et FC_1. Le théorème est donc démontré.

Nous avons montré dans notre article précédent que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde, en prenant le point double pour pôle, est une hyperbole équilatère passant par le pôle, point transformé de celui qui est à l'infini; réciproquement, si l'on transforme une hyperbole équilatère par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle un point quelconque de la courbe, la transformée est une strophoïde.

Soit O (*fig.* 1) le pôle de transformation pris sur

Fig. 1.



la courbe. Considérons sur cette ligne deux points fixes A, B, diamétralement opposés, et un point M variable sur la courbe. Les deux cordes supplémentaires MA, MB sont également inclinées sur les asymptotes, et il en est de même de OA, OB; donc OAM, somme des angles MFX, OEX, est égal à OBM, somme des angles MHX_1, OGX_1. Soient actuellement α, β, μ les points transformés de A, B, M, respectivement; le point μ sera à l'intersection des deux cercles transformés des droites AM, BM; ces cercles passeront respectivement par les points O, α, O, β, et couperont les droites Oα, Oβ sous des angles égaux, puisqu'ils sont transformés de deux droites jouissant de cette propriété; le point μ décrira donc une strophoïde dont le point double sera en O, et dont les points α, β seront deux points correspondants.

Il résulte de là que deux points quelconques diamétralement opposés dans l'hyperbole ont pour transformés deux points correspondants de la strophoïde.

La direction de l'asymptote de la strophoïde est celle de la tangente à l'hyperbole en O; le foyer de la strophoïde étant le point correspondant de celui qui est à l'infini, on déduit de la proposition précédente qu'il est le point transformé de celui qui dans l'hyperbole est diamétralement opposé à O.

Les tangentes au point double sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, et l'on voit qu'elles sont également inclinées sur la direction asymptotique et le rayon qui va du point double au foyer.

Deux strophoïdes sont évidemment semblables quand les rayons allant de leurs points doubles à leurs foyers font respectivement des angles égaux avec leurs directions asymptotiques; elles ont alors, pour ainsi dire, la même figure. Si nous faisons mouvoir le point O sur toute l'étendue de la moitié de l'une des branches de l'hyperbole, l'angle de la direction asymptotique de la strophoïde transformée avec le rayon qui va du point double au foyer passera par tous les états de grandeur de zéro à un droit; la strophoïde transformée prendra donc toutes les figures qu'elle peut avoir.

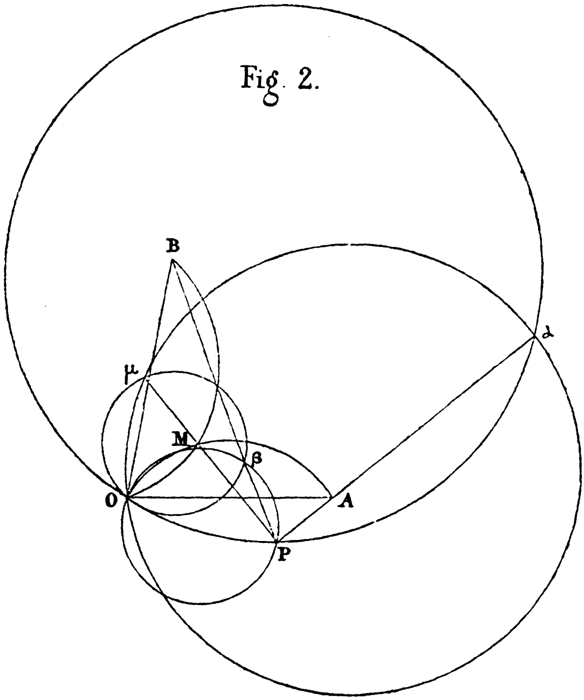
Quand le point O sera en un des sommets de l'hyperbole, la strophoïde sera rectangulaire. Si le point O s'éloigne indéfiniment, et qu'on accepte une puissance variable de transformation telle que le foyer reste à une distance constante du point double, la transformée finale se composera d'une circonférence de cercle et d'une droite passant par son centre, comme on s'en rend facilement compte au moyen du cercle de construction, si l'asymptote se rapproche indéfiniment du foyer.

Le diamètre AB de l'hyperbole se transforme en une circonférence passant par le point double de la strophoïde et deux points correspondants; le cercle passe en outre par le point fixe transformé du centre de l'hyperbole, et diamétralement opposé au point double de la strophoïde dans le cercle de construction; le diamètre AB de l'hyperbole coupant cette courbe en deux points et sous des angles égaux, le cercle transformé, passant par le point double de la strophoïde et deux points correspondants, y coupe cette courbe sous des angles égaux.

Nous avons démontré précédemment que la strophoïde se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôles les deux points correspondants principaux, et en une strophoïde égale quand le pôle est au foyer; nous allons maintenant établir que, si l'on transforme une strophoïde par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle un point quelconque de la courbe, la transformée est encore une strophoïde. Soient O (*fig.* 2) le point double d'une strophoïde A, B, deux de ses points correspondants supposés fixes, P un troisième point fixe de la courbe pris pour pôle, et M un point variable sur cette ligne. Le point M peut être considéré comme le point de rencontre de deux cercles passant respectivement par O et A, O et B, et coupant les droites OA, OB sous un même angle variable. Pour simplifier la figure, prenons pour puissance de transformation le carré de la distance PO; pour une autre puissance on obtiendrait une figure semblable.

Soient α, β, μ les points transformés de A, B, M; les droites OA, OB auront respectivement pour transformées les cercles OPα, OPβ; les cercles OMA, OMB seront transformés suivant les cercles O$\mu\alpha$, O$\mu\beta$ et couperont les cercles OPα, OPβ sous des angles égaux. Le lieu du point μ, transformé de M, est donc décrit par

Fig. 2.



l'intersection de deux cercles variables, passant respectivement par O et α, O et β, et coupant en α et β les cercles fixes OPα, OPβ sous des angles égaux; du reste, le pôle P étant une des positions du point M, le lieu du point μ aura un point à l'infini et un point double en O. Pour établir que le lieu du point μ est une strophoïde, il suffit de faire voir que, si on le transforme par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle en O, la transformée est une hyperbole équilatère passant par le point O, d'après le théorème précédent.

Or il est évident qu'il en est ainsi, car les quatre cercles $OP\alpha$, $OP\beta$, $O\mu\alpha$, $O\mu\beta$ se transformeront en quatre droites dont les deux premières sont fixes; les deux secondes couperont respectivement les deux premières aux points transformés de α et de β, et feront avec elles des angles égaux; elles feront alors avec la droite, unissant les points transformés de α et de β, deux angles ayant une différence constante : la transformée sera donc une hyperbole équilatère passant par O, puisque le lieu de μ a un point à l'infini.

Dans la transformation que nous venons de faire d'une strophoïde en une autre, les points transformés de deux points correspondants sont des points correspondants de la transformée.

Soient (*fig.* 3) O le point double d'une strophoïde; A, B deux de ses points correspondants; M, N deux autres points correspondants; transformons-la en prenant B pour pôle et $\overline{BO}^2$ pour puissance; soient μ, ν les points transformés de M, N.

L'une des tangentes au point double O est OX, bissectrice commune des angles BOA, MON; la tangente correspondant à la transformée en O est $O\xi$, faisant l'angle $BO\xi = BOX$. Pour vérifier la proposition, il suffit de montrer l'égalité des angles $\mu O\xi$, $\nu O\xi$. Or

$$\mu O\xi = BO\mu - BO\xi = BMO - BOX,$$
$$\nu O\xi = \nu OB + BO\xi = BNO + BOX;$$

mais

$$BMO - BOX = BNO + BOX,$$

car

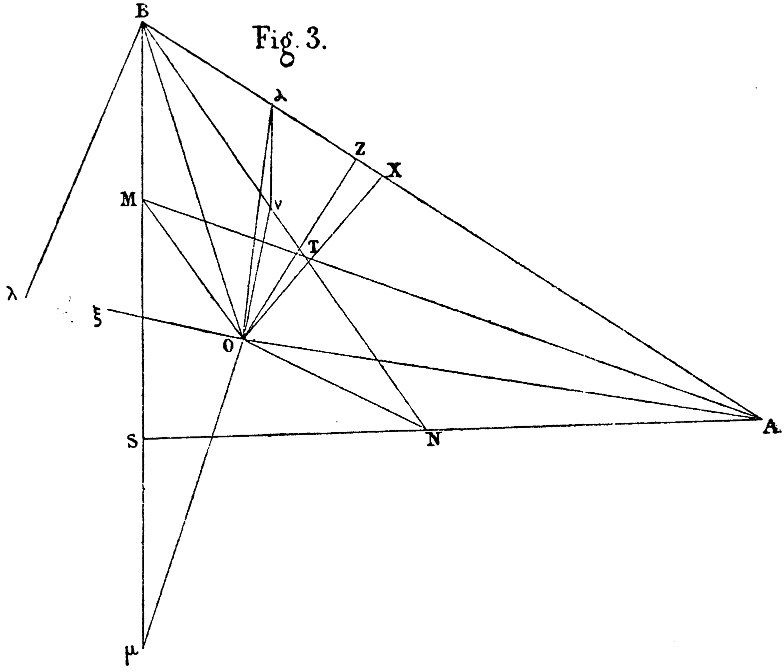
$$BMO - ONB = 2\,BOX,$$

puisque dans le quadrilatère SMTN

$$BMO - ONB = 2 - \frac{M+N}{2} = \frac{S+T}{2},$$

et l'on sait que, dans un quadrilatère, l'angle des bissectrices des angles formés par deux côtés opposés est la demi-somme des deux angles opposés du quadrilatère.

Fig. 3.



Nous avons vu que la tangente à la première strophoïde en B est la droite symétrique par rapport à BO de la droite BA qui joint B à son correspondant; soit Bλ cette tangente, ce sera la direction asymptotique de la strophoïde transformée : le point transformé de B étant à l'infini, le foyer de la seconde strophoïde sera le transformé α de son correspondant A. C'est, comme nous l'avons vu, l'angle des droites $O\alpha$, $B\lambda$ qui caractérise la forme ou figure de la strophoïde transformée : évaluons cet angle.

En menant par α une parallèle à $B\lambda$, on voit que l'angle cherché, que nous désignerons par ω, est égal à

$$\omega = O\alpha B - (2 - \lambda B\alpha) = BOA - (2 - 2OBA)$$
$$= 2 - (OBA + OAB) - (2 - 2OBA),$$
$$\omega = OBA - OAB.$$

Or dans le triangle BOA, dont OX est bissectrice,

$$OBA + BXO = OAB + 2 - BXO,$$

d'où

$$OBA - OAB = 2(1 - BXO);$$

donc

$$\omega = 2(1 - BXO).$$

Projetant le point O sur AB, par la perpendiculaire OZ, Z sera un point de la strophoïde, et nous aurons

$$\omega = 2ZOX.$$

On voit par là que la forme de la strophoïde transformée reste la même si nous prenons successivement pour pôles de transformation deux points correspondants; nous en avons une vérification dans la transformation en prenant pour pôles les deux points correspondants principaux.

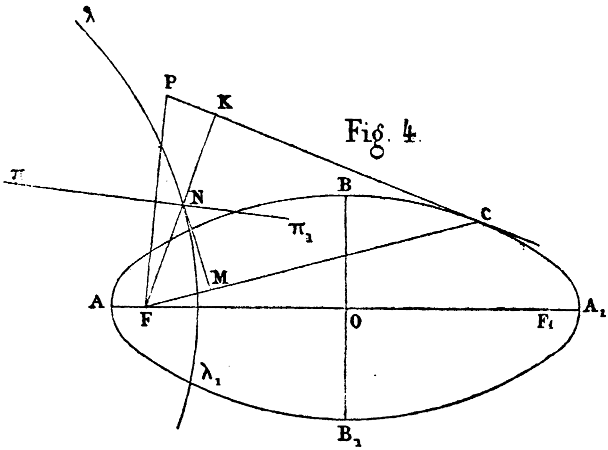
La forme de la transformée est définie par l'angle ZOX; chaque droite passant par le point double O, ne rencontrant la courbe qu'en un autre point, il suffira de faire varier ZOX de zéro à deux droits, pour avoir toutes les transformées; chaque position de OZ dans cet intervalle fournira deux points correspondants, réels ou imaginaires, donnant la même forme. Si ZOX varie de zéro à deux droits, ω variera de zéro à quatre droits, et l'angle aigu caractérisant la forme de la transformée passera quatre fois par le même état de grandeur : il existe donc en général huit points d'une strophoïde pour lesquels elle se transforme en une strophoïde de même forme. Ces huit points peuvent se construire avec la règle et le compas, pour une forme donnée définie par une valeur de ω; il suffira pour cela de faire ZOX égal à l'une des valeurs $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\pi-\frac{\omega}{2}$, de déterminer le point Z situé sur chacun de ces rayons, d'élever en chaque point, tel que Z, une perpendiculaire à OZ, et de déterminer les points communs de cette droite et de la strophoïde, ce qu'on sait faire. On voit facilement, d'après cette construction, que quatre seulement des huit points dont on vient de parler sont réels, et que ces quatre points existent toujours. En effet, pour que la perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon OZ rencontre la strophoïde en deux autres points réels, il faut et il suffit que le rayon OZ soit moins long que le rayon dirigé du point O vers le point correspondant de Z, ce qui n'a lieu que si le point Z est situé sur la boucle de la strophoïde.

On retrouve ainsi les trois points pour lesquels nous avons vu que la strophoïde se transformait en elle-même ou en une strophoïde égale, et un quatrième point correspondant du foyer qui est à l'infini.

Il n'y a que deux points pour lesquels la strophoïde se transforme en une strophoïde rectangulaire; dans ce cas le nombre des solutions devient deux fois moindre, parce que $\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$.

Il résulte des considérations précédentes que l'hyperbole équilatère transformée par rayons vecteurs réciproques d'une strophoïde peut être considérée comme une strophoïde dont le point double est à l'infini. On voit du reste directement qu'il en est ainsi, puisque les angles des deux cordes supplémentaires issues des extrémités d'un diamètre fixe admettent pour bissectrices des parallèles aux asymptotes. De plus, à toute manière d'engendrer une hyperbole équilatère par intersection de lignes ou par enveloppe correspond une manière analogue d'engendrer une strophoïde.

Considérons une suite de coniques ayant pour foyers communs F et F_1 (*fig.* 4); soit ABA_1B_1 l'une d'elles,



menons-lui la tangente PC du point fixe P; quand la conique variera, le point C décrira une strophoïde. Formons la figure polaire réciproque en prenant pour centre du cercle directeur le foyer F, la courbe polaire réciproque de ABA_1B_1 sera le cercle $\lambda\lambda_1$ transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point K, projection du foyer F sur la tangente PC (théorème III, corollaire I de notre précédent article); le pôle de la droite PC sera à l'intersection N du cercle $\lambda\lambda_1$ et de la polaire $\pi\pi_1$ du point P. La polaire du point C est la tangente NM au cercle $\lambda\lambda_1$ menée en N; si R est le rayon du cercle directeur, $FM \times FC = R^2$, et le lieu du point M, transformé par rayons vecteurs réciproques de la strophoïde décrite par le point C et passant par le pôle F, est une strophoïde. Les cercles, tels que $\lambda\lambda_1$, sont transformés par rayons vecteurs réciproques d'une série de cercles concentriques, ils ont même axe radical avec le point F qui est le transformé de celui dont le rayon est infini; en effet ces cercles transformés coupent orthogonalement les cercles transformés de deux diamètres quelconques des cercles concentriques, et l'on sait que tous les cercles qui en coupent orthogonalement deux autres ont pour axe radical commun la ligne des centres des deux cercles fixes.

Il résulte de ce qui précède que si l'on considère une suite de cercles ayant un même axe radical avec un point, qu'on projette ce point sur les tangentes aux cercles de la suite, menées à leurs points communs avec une droite fixe, le lieu de ces projections sera une strophoïde.

Le théorème I de notre précédent article prend, par suite des conséquences que nous en avons déduites, un degré de généralité plus grand. On peut encore le démontrer généralement et directement de la manière suivante.

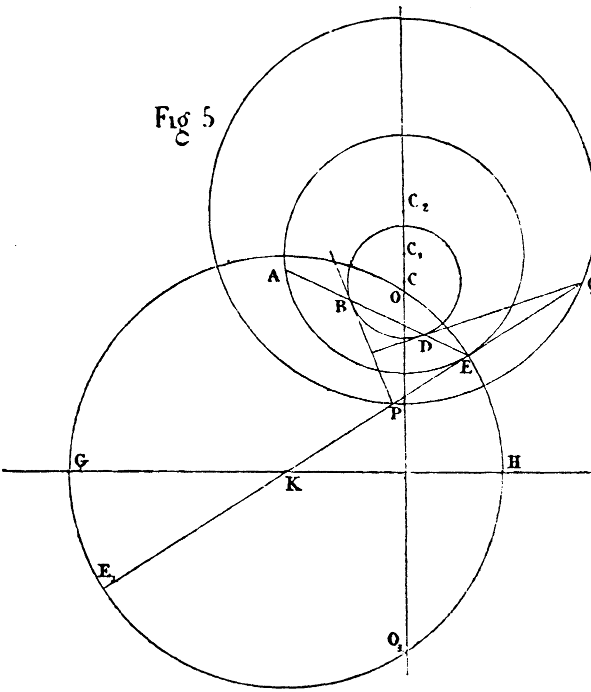
Soient C, C_1 (*fig.* 5) deux cercles quelconques ne se coupant pas, O, O_1 les deux points ayant avec eux même axe radical GH; coupons-les par la sécante ABDE, menons les tangentes BP, DQ, PEQ, les points P et Q appartiennent à un cercle ayant même axe radical avec les deux premiers, et les segments PE, EQ sont vus des points O et O_1 sous un même angle. En effet, les deux triangles QDE, PBE ont l'angle $D = B$, et les angles en E supplémentaires; il en résulte la proportion

$$\frac{QE}{QD} = \frac{PE}{PB}.$$

Donc les points P et Q appartiennent à un cercle C_2 ayant même axe radical avec les deux premiers.

Prolongeons PQ jusqu'à sa rencontre avec GH en K,

Fig 5



et du point K comme centre décrivons le cercle orthogonal ayant KE pour rayon ; il passe par les deux points O et O_1 ; le cercle qu'on vient de construire étant orthogonal aux cercles C, C_1, C_2, on a

$$KP \times KQ = \overline{KE}^2.$$

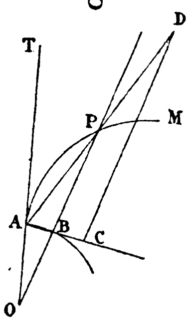
Les points E et E_1 sont donc conjugués harmoniques par rapport à P et Q ; si maintenant on construit les rayons OE_1, OP, OE, OQ, le premier et le troisième étant rectangulaires, puisque l'angle E_1OE est inscrit dans un demi-cercle, OE_1 et OE sont les bissectrices des angles formés par OP et OQ. La même démonstration s'applique évidemment au point O_1.

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire la démonstration du théorème analogue au théorème IV de notre précédent article.

Une partie des considérations précédentes, jointes à quelques lemmes simples, nous ont conduit à une démonstration d'un théorème remarquable, dû à Poncelet, et dont il a aussi donné une démonstration géométrique. Nous allons exposer ici notre solution, à cause des rapports qu'elle présente avec les principes dont nous venons de faire usage.

Lemme I. — Soit (*fig.* 6) APM une courbe tangente à la droite OAT en A; faisons l'angle arbitraire TOP dont

Fig. 6

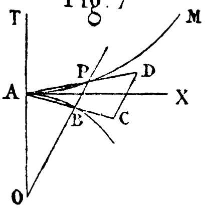


le second côté coupe la courbe en P, décrivons du point O comme centre avec OA pour rayon l'arc AB, et construisons la corde AB de cet arc; nous allons montrer que le rapport $\frac{PB}{AB}$ croît indéfiniment quand l'angle TOP tend vers zéro.

En effet, prenons sur AB la longueur fixe $AC = l$, puis par le point C menons CD parallèle à OP et limitée en D à la corde AP; on a $\frac{PB}{AB} = \frac{CD}{l}$. Or, quand TOP tendra vers zéro, APD prendra la direction de la tangente AT; ABC deviendra perpendiculaire à OT, et CD parallèle à OT croîtra au delà de toute limite: donc il en sera de même du rapport $\frac{CD}{l}$ et de son égal $\frac{PB}{AB}$.

Lemme II.—Soit (*fig.* 7) APM une courbe normale à la droite OAT en A; faisons l'angle arbitraire TOP

Fig. 7

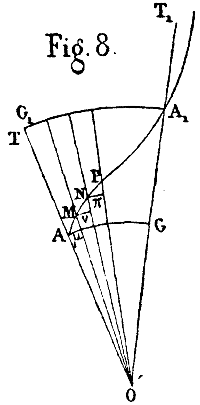


dont le second côté rencontre la courbe en P; décrivons du point O comme centre, avec OA pour rayon, l'arc AB, et construisons la corde AB de cet arc; nous allons montrer que le rapport $\frac{PB}{AB}$ tend vers zéro en même temps que l'angle TOP. En effet, prenons sur AB la longueur fixe $AC = l$; puis par le point C, menons CD parallèle à OP et limitée à la corde AP en D; on a $\frac{PB}{AB} = \frac{CD}{l}$. Or quand TOP tendra vers zéro, AD et AC devenant respectivement tangentes à la courbe APM et à l'arc AB se confondront suivant AX perpendiculaire à AT, CD parallèle à OT deviendra nulle : il en sera de même du rapport $\frac{CD}{l}$ et de son égal $\frac{PB}{AB}$.

Lemme III. — Il n'existe aucune courbe tangente à toutes les droites infiniment voisines issues du même point et comprises dans un angle donné.

En effet, s'il existait une telle courbe AMN... A_1 (*fig.* 8), tous ses points n'étant pas à l'infini, on pourrait toujours prendre dans l'intérieur de l'angle considéré deux droites OT, OT_1, se coupant en son sommet

Fig. 8.



et faisant un angle assez petit, quoique fini, pour que tous les rayons dirigés du point O vers les points de la courbe et compris dans l'angle TOT_1 soient finis et croissent quand le rayon s'écarte de la position OT pour se rapprocher de la position OT_1. Divisons l'angle TOT_1 en n parties égales, les rayons de divisions seraient tous tangents à la courbe en leurs points A, M, N, P,..., A_1 communs avec cette ligne. Du point O comme centre avec des rayons respectivement égaux à OA, OM, ON,..., décrivons les arcs AG, $M\nu$, $N\pi$,..., et construisons leurs cordes; les rapports $\frac{M\mu}{\text{corde}\, A\mu}$, $\frac{N\nu}{\text{corde}\, M\nu}$, $\frac{P\pi}{\text{corde}\, N\pi}$, ..., croîtraient chacun au delà de toute limite avec n, d'après le lemme I, et il devrait en être de même du rapport formé en les ajoutant terme à terme, qui est compris entre le plus petit et le plus grand; mais ce dernier rapport est plus petit que le rapport $\frac{A_1 G}{\text{corde } AG}$ qui a même numérateur et un dénominateur plus petit, et qui est fini. Donc l'existence de la courbe est incompatible avec l'hypothèse.

Corollaire. — La seule ligne passant par un point extérieur au centre d'un système de cercles concentriques infiniment voisins, et qui les coupe tous orthogonalement, est la ligne droite qui unit ce point au centre.

Lemme IV. — Si toutes les normales à une courbe passent par un point fixe, cette courbe est un cercle dont le point fixe est le centre.

Soit (*fig.* 8) une courbe AMN... A_1, dont toutes les normales se coupent au point O; on établira que cette courbe est un cercle dont le centre est en O, en faisant voir que ces normales ne peuvent être inégales. Supposons que la courbe AA_1 admette des normales inégales; il faudra qu'en parcourant l'arc AA_1 les normales aillent en croissant ou en décroissant pendant un certain temps; admettons qu'en parcourant l'arc AA_1, qui peut être très-petit, mais fini, les normales aillent constamment en augmentant.

Divisons l'angle AOA_1 en n parties égales par les normales OM, ON, OP,...; du point O comme centre décrivons les arcs de cercle $A\mu$, $M\nu$, $N\pi$,... et construisons leurs cordes; décrivons encore du même centre l'arc A_1G_1 limité aux côtés de l'angle AOA_1. D'après le lemme II, les rapports $\frac{M\mu}{\text{corde } A\mu}$, $\frac{N\nu}{\text{corde } M\nu}$, $\frac{P\pi}{\text{corde } N\pi}$,... doivent tous tendre vers zéro quand n augmente indéfiniment : il doit en être de même du rapport formé en les ajoutant terme à terme, qui est compris entre le plus petit et le plus grand; mais ce dernier rapport est supérieur au rapport $\frac{A_1G}{\text{arc } A_1G_1}$ qui a même numérateur et un dénominateur plus grand, et qui, d'après l'hypothèse, n'est pas nul; donc les normales ne peuvent être inégales, et le lemme est démontré.

Corollaire. — La seule ligne passant par un point donné et coupant orthogonalement un système de droites infiniment voisines issues d'un point est une circonférence ayant ce point pour centre.

Le théorème de Poncelet, que nous avons en vue de démontrer, consiste en ce qui suit :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et que deux de ses côtés restent constamment tangents à deux cercles ayant avec le premier un même axe radical, le troisième côté reste aussi constamment tangent à un cercle ayant avec les précédents même axe radical.

Soient O, O′, O″ trois cercles ayant un même axe radical (*fig.* 9); ABC un triangle inscrit dans le cercle O″, et dont les côtés BC, BA sont respectivement tangents aux cercles O et O′ en P et Q : cherchons d'abord une propriété du point décrivant de l'enveloppe du côté AC. Pour cela, considérons le triangle dans une position voisine $A_1B_1C_1$: soient P_1, Q_1 ses points de contact avec les cercles O, O′; H, I, L les points de rencontre de deux positions du même côté; quand A_1 viendra se confondre avec A, les points I et H se confondront avec P et Q respectivement, et le point L tendra vers une limite λ, qui est le point décrivant de l'enveloppe cherchée. De la similitude des triangles AA_1H, BB_1H; BB_1I, CC_1I; CC_1L, AA_1L on déduit

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AH}{HB_1},$$

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BI}{C_1I},$$

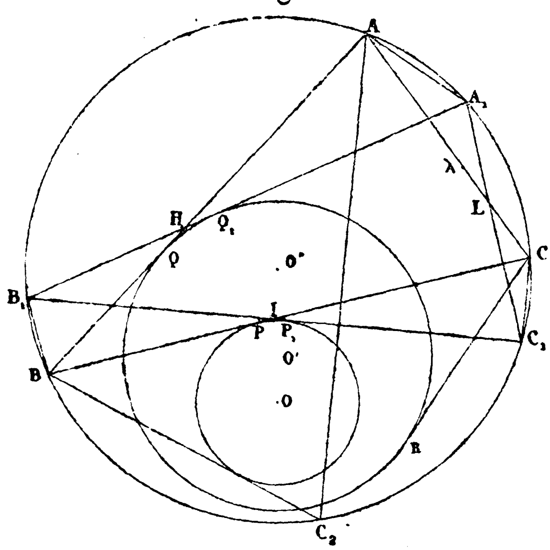
$$\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{CL}{A_1L}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre et ramenant à la forme entière, on a

$$AH \times BI \times CL = HB_1 \times C_1I \times A_1L.$$

Supposons maintenant que A_1 vienne se confondre avec A;

Fig 9



il en sera de même de B_1 avec B, C_1 avec C, et l'on aura

$$AQ \times BP \times C\lambda = A\lambda \times CP \times BQ;$$

mais quand trois cercles ont un même axe radical, si d'un point pris sur l'un d'eux on mène des tangentes aux deux autres, elles sont dans un rapport constant; donc, si du point C nous menons CR tangent au cercle O′, nous aurons

$$\frac{CR}{CP}=\frac{BQ}{BP},$$

ou

$$CR\times BP=CP\times BQ\,;$$

par comparaison de cette égalité avec la précédente, on conclut

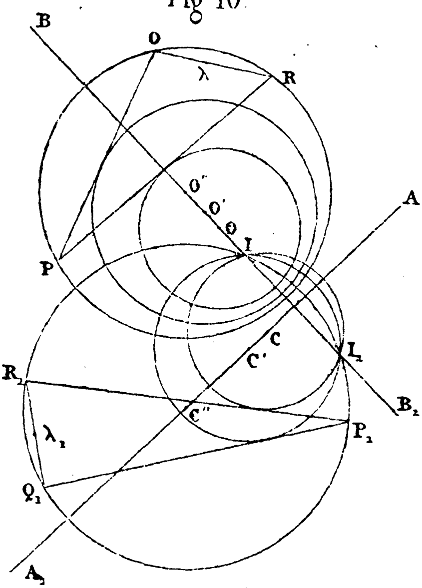
$$\frac{A\lambda}{C\lambda}=\frac{AQ}{CR}.$$

Donc, si l'on construisait un quatrième cercle ayant même axe radical avec les trois premiers et tangent à la droite AC, son point de contact serait au point λ, puisque ce point de contact doit diviser AC en segments proportionnels à AQ et CR.

Considérons maintenant la *fig.* 10 : soient O, O′, O″ trois cercles ayant pour axe radical AA_1 ; I, I_1 les deux points ayant avec eux même axe radical; tous les cercles passant par I et I_1 coupent orthogonalement les cercles O, O′, O″ et tous ceux qui ont avec eux même axe radical AA_1. Nous désignerons tous les cercles ayant même axe radical que O et O′ par la dénomination des *cercles de la suite* (I), et ceux qui les coupent orthogonalement par *cercles de la suite* (R).

Inscrivons le triangle PQR dans le cercle O″, de manière que deux de ses côtés soient tangents aux cercles O et O′, le troisième QR sera tangent à son enveloppe et à un cercle de la suite I en λ, et il en résulte qu'en ce point l'enveloppe de QR sera orthogonale au cercle de la suite (R) qui y passe. L'enveloppe de la droite QR sera donc une trajectoire orthogonale des cercles de la suite (R). De même, si nous considérons les trois cercles C, C′, C″ de la suite (R), que nous inscrivions dans le cercle C″ le triangle $P_1Q_1R_1$, dont deux côtés sont tangents aux cercles C et C′, nous verrons de la même manière que l'enveloppe du côté Q_1R_1 est une trajectoire orthogonale des cercles de la suite (I).

Fig 10.



Si maintenant nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle en I, les cercles de la suite (R) se transformeront en un système de droites rayonnant autour du point transformé de I_1, et les cercles de la suite (I) se transformeront en cercles concentriques ayant pour centre le même point transformé de I_1. La transformée de l'enveloppe de la droite QR sera une courbe, donc toutes les normales concourront au point transformé de I_1; cette courbe sera donc une circonférence ayant le point transformé de I_1 pour centre (lemme IV), donc l'enveloppe de QR est un des cercles de la suite (I). La transformée de l'enveloppe de la droite Q_1R_1 sera une trajectoire orthogonale des cercles transformés de la suite (I) qui sont concentriques; ce sera donc un diamètre de ces cercles (lemme III, corollaire). Donc l'enveloppe de Q_1R_1 est un des cercles de la suite (R).

Reprenons notre sujet, et établissons quelques théorèmes généraux sur les figures qui ont la propriété de se reproduire par rayons vecteurs réciproques.

Théorème I. — *Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une figure assujettie à la seule condition d'être symétrique par rapport à un plan, la transformée aura la propriété de se transformer en elle-même par rayons vecteurs réciproques; le pôle de la seconde transformation est le point transformé du symétrique du pôle de la première, par rapport au plan de symétrie de la figure considérée; la puissance de la seconde transformation est positive. Si la figure considérée est plane, il suffit qu'elle ait un axe de symétrie; car le plan perpendiculaire au sien conduit suivant l'axe sera pour elle un plan de symétrie.*

Pour le montrer, considérons les deux points A, A_1 (*fig.* 11), symétriques par rapport au plan P et appartenant à une figure jouissant de la même propriété. Transformons cette figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le point O pour pôle. Soit O_1 le point symétrique de O par rapport au plan P; les points A, A_1 sont situés sur une circonférence ayant OO_1 pour diamètre; la droite AA_1 se transformera en une circonférence tangente à OO_1 en O; le cercle OA_1AO_1 se transformera en une droite passant par le point fixe ω, transformé de O_1; les points transformés de A et A_1 seront les intersections a, a_1 d'une droite passant en ω avec un cercle tangent à ωO en O; on aura donc

$$\omega a \times \omega a_1 = \overline{\omega O}^2,$$

égalité qui établit la proposition.

Remarque I. — Si le pôle O venait se placer dans le plan P, le point ω s'éloignerait à l'infini; une figure ayant un plan de symétrie peut donc être considérée comme se transformant en elle-même par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant à l'infini sur une perpendiculaire au plan de symétrie et la puissance de transformation étant infinie.

Remarque II. — Si une figure admet plusieurs plans de symétrie, une figure transformée de celle-là par rayons vecteurs réciproques se transformera en elle-même par rayons vecteurs réciproques par rapport à autant de points.

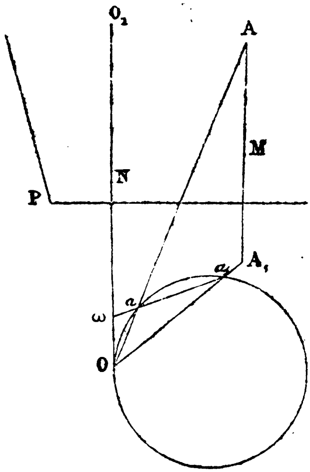
Si les plans de symétrie de la première figure se coupent en un même point, les symétriques du pôle de transformation O par rapport à ces plans seront sur une sphère passant par le point O et ayant pour centre le point commun des plans de symétrie; donc leurs transformés, qui sont les pôles de la seconde transformation, seront dans un même plan transformé de la sphère.

Si les plans de symétrie de la première figure se coupent suivant une droite, les pôles de la seconde transformation sont en ligne droite; ainsi, comme exemple, la surface transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface de révolution se transforme en elle-même par rapport à tous les points d'une droite perpendiculaire au plan méridien passant par le pôle de la première transformation.

Théorème II. — ***Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques suivant une puissance positive, on peut la transformer par rayons vecteurs réciproques en une seconde figure ayant tel plan qu'on voudra pour plan de symétrie.***

Soient a, a_1 (*fig.* 11) deux points correspondants

Fig. 11.



d'une telle figure, ω le pôle de transformation, k^2 la puissance; on a

$$\omega a \times \omega a_1 = k^2.$$

Soit encore P un plan quelconque : abaissons du point ω une perpendiculaire ωN sur ce plan, prenons sur elle $\omega O = k$, puis déterminons le point O_1 symétrique de O par rapport au plan, enfin transformons par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour pôle et pour puissance le produit $\omega O \times OO_1$.

Les deux points a, a_1 sont sur la droite $\omega a a_1$ et sur une circonférence tangente à $O\omega$ en O; la droite $\omega a a_1$ se transforme en une circonférence ayant pour diamètre OO_1 et son centre en N; la circonférence $O a a_1$ se transformera en une corde parallèle à OO_1 de la circonférence précédente, et dont en conséquence le milieu sera dans le plan P; les points A, A_1, respectivement transformés de a, a_1, seront symétriques par rapport au plan P.

Remarque. — Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques, et suivant des puissances positives par rapport à plusieurs pôles, si de plus les sphères décrites de ces pôles comme centre, avec des rayons respectivement égaux aux racines carrées des puissances correspondantes, se coupent en un même point, en prenant ce point pour pôle la figure se transformera par rayons vecteurs réciproques en une autre admettant autant de plans de symétrie qu'il y a de sphères passant par le point. Nous avons une application de cette remarque dans la transformation de la strophoïde en hyperbole équilatère. La strophoïde se transformerait encore, d'après la même remarque, en une courbe sphérique admettant deux plans de symétrie, si l'on prenait pour pôle un point quelconque de la circonférence de petit cercle commun aux deux sphères ayant pour centres les points correspondants principaux et passant par le point double. (*A continuer.*)

FOYERS ET DIRECTRICES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

---

1. Soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré dans l'équation générale du second degré

$$f(x, y, z) = Ax^2 + \ldots + D = 0.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires et que S soit une racine de l'équation ordinaire dite en S, on sait que l'on a deux plans cycliques par l'équation

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Posons

$$\varphi - S(x^2 + y^2 + z^2) = \alpha\beta,$$

α et β désignant ainsi deux fonctions du premier degré. Deux plans cycliques quelconques respectivement parallèles aux plans α et β ayant pour équations $\alpha + 2p = 0$, $\beta + 2q = 0$, l'équation

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - (\alpha + 2p)(\beta + 2q) \\ = \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D - \varphi \\ + S(x^2 + y^2 + z^2) - 2p\beta - 2q\alpha - 4pq \\ = S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z \\ + D - 2p\beta - 2q\alpha - 4pq = 0 \end{aligned}$$

sera celle d'une sphère passant par les deux sections cycliques relatives à ces plans.

Si la sphère est de rayon nul, son centre sera un foyer de la surface; alors on a pour ce centre

$$\begin{aligned} Sx + C \ - p\beta'_x - q\alpha'_x = 0, \\ Sy + C' - p\beta'_y - q\alpha'_y = 0, \\ Sz + C'' - p\beta'_z - q\alpha'_z = 0, \end{aligned}$$

$$Cx + C'y + C''z + D - p\beta - q\alpha - p\beta'_t - q\alpha'_t - 4pq = 0.$$

L'élimination de p et de q entre ces quatre équations mène à deux équations pour le lieu des foyers qui correspondent à la valeur de S considérée.

Les trois premières équations donnent d'abord

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \beta'_x & \alpha'_x \\ Sy + C' & \beta'_y & \alpha'_y \\ Sz + C'' & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1)\qquad S\begin{vmatrix} x & \beta'_x & \alpha'_x \\ y & \beta'_y & \alpha'_y \\ z & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & \beta'_x & \alpha'_x \\ C' & \beta'_y & \alpha'_y \\ C'' & \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'un plan qui passe par le centre de la surface, puisqu'il passe à l'origine quand elle est en ce centre, et ce plan est perpendiculaire à l'intersection des plans α et β. C'est, en conséquence, le plan principal perpendiculaire à la direction que détermine S, en supposant S différent de zéro.

Considérons d'autre part les équations

$$\begin{gathered} Sx + C \quad - p\beta'_x - q\alpha'_x = 0, \\ Sz + C'' - p\beta'_z - q\alpha'_z = 0, \\ Cx + C'y + C''z + D - p\beta - q\alpha - p\beta'_t - q\alpha'_t - 4pq = 0. \end{gathered}$$

On peut d'abord en tirer

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \beta'_x & \alpha'_x \\ Sz + C'' & \beta'_z & \alpha'_z \\ Cx + C'y + C''z + D - 4pq & \beta + \beta'_t & \alpha + \alpha'_t \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} Sx + C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz + C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ Cx + C'y + C''z + D & \alpha + \alpha'_t & \beta + \beta'_t \end{vmatrix} - 4pq\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Or, par les équations

$$\begin{gathered} p\beta'_x + q\alpha'_x = Sx + C, \\ p\beta'_z + q\alpha'_z = Sz + C'', \end{gathered}$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} p = \begin{vmatrix} Sx + C & \alpha'_x \\ Sz + C'' & \alpha'_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} \beta'_x & Sx + C \\ \beta'_z & Sz + C'' \end{vmatrix},$$

d'où

$$pq \begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta'_x & Sx+C \\ \beta'_z & Sz+C'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta'_x & \alpha'_x \\ \beta'_z & \alpha'_z \end{vmatrix};$$

puis il en résulte

$$\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ Cx+C'y+C''z+D & \alpha+\alpha'_t & \beta+\beta'_t \end{vmatrix}$$
$$+4 \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \beta'_x \\ Sz+C'' & \beta'_z \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x & \beta'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z & \beta'_z \\ C'y+D-S(x^2+z^2) & y\alpha'_y+2\alpha'_t & y\beta'_y+2\beta'_t \end{vmatrix} \\ \qquad +4 \begin{vmatrix} Sx+C & \alpha'_x \\ Sz+C'' & \alpha'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Sx+C & \beta'_x \\ Sz+C'' & \beta'_z \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

On a ainsi une équation du second degré ou une identité.

Par le changement de x en y ou de z en y, on aurait deux autres équations analogues. L'une d'elles au moins, jointe à l'équation du plan signalé, détermine une conique comme lieu de foyers répondant à la valeur de S.

Application à l'ellipsoïde. — Soit

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c.$$

Prenons $S = \frac{1}{b^2}$, nous aurons

$$\alpha\beta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{b^2} = \frac{b^2-c^2}{b^2c^2}z^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x^2;$$

d'où

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x,$$

par suite

$$\alpha'_x = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}, \quad \alpha'_y = 0, \quad \alpha'_z = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}, \quad \alpha'_t = 0,$$

$$\beta'_x = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}, \quad \beta'_y = 0, \quad \beta'_z = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}, \quad \beta'_t = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x \\ \alpha'_z & \beta'_z \end{vmatrix} = -2\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ab^2c}.$$

L'équation (1) devient

$$y = 0,$$

et l'équation (2)

$$-2\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ab^2c}\begin{vmatrix} \frac{x}{b^2} & -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} & \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \frac{z}{b^2} & \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} & \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \\ -1-\frac{x^2+z^2}{b^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+4\begin{vmatrix} \frac{x}{b^2} & -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \frac{z}{b^2} & \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{x}{b^2} & \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab} \\ \frac{z}{b^2} & \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2b^4c^2}\left(1+\frac{x^2+z^2}{b^2}\right)+\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}\frac{x^2}{b^4}-\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\frac{z^2}{b^4}=0,$$

$$-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2c^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}x^2\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}z^2\frac{b^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1.$$

On a ainsi pour focale dans le plan xz, vu qu'on suppose $a > b > c$, une hyperbole ayant pour sommets réels les foyers de l'ellipse du plan xy, et pour foyers ceux de l'ellipse du plan xz.

Les deux autres focales, en déduisant de là leurs équations par permutation tournante, ont pour équations, l'une

$$z = 0,$$

$$\frac{y^2}{b^2 - c^2} + \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

l'autre

$$x = 0,$$

$$\frac{z^2}{c^2 - a^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1.$$

Si l'on considère un point $(x_1 z_1)$ sur la focale qui a pour équation, avec $y = 0$,

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

on a, pour les valeurs de p et de q correspondantes,

$$2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{ab^2c}\,p = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{b^2} & -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \\ \frac{z_1}{b^2} & \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\frac{x_1}{b^2} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\frac{z_1}{b^2},$$

$$-2\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}{ab^2c}\,q = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{b^2} & +\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \\ \frac{z_1}{b^2} & \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\frac{x_1}{b^2} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\frac{z_1}{b^2},$$

d'où

$$\alpha + 2p = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\left(z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\left(x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2}\right) = 0,$$

$$\beta + 2q = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{bc}\left(z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2}\right) + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab}\left(x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2}\right) = 0,$$

pour les plans d'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère-foyer $(x_1, 0, z_1)$. L'intersection de ces plans est donc donnée par

$$x - \frac{a^2 x_1}{a^2 - b^2} = 0, \quad z + \frac{c^2 z_1}{b^2 - c^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{x - x_1}{\dfrac{x_1}{a^2 - b^2}} = \frac{z - z_1}{-\dfrac{z_1}{b^2 - c^2}};$$

c'est la directrice correspondant au foyer $(x_1, 0, z_1)$. Le plan du foyer et de la directrice est normal à la focale et coupe la surface suivant une conique qui a le point $(x_1, 0, z_1)$ pour *foyer* et la droite pour *directrice* correspondante.

Je m'arrête, n'ayant pas à développer ici toute la théorie des foyers dans les surfaces du second degré.

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1874);

PAR M. H. JACOB,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

1° *Par les trois sommets d'un triangle rectangle on fait passer des paraboles; on mène à ces paraboles des* *tangentes parallèles à l'hypoténuse du triangle donné : on demande le lieu des points de contact.*

2° *Le lieu cherché est une conique qui coupe chacune des paraboles en quatre points : on demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les sécantes communes qui ne passent pas par l'origine.*

1° Soient AOB le triangle rectangle donné ; C le milieu de l'hypoténuse AB ; et $OA = a$, $OB = b$ les côtés de l'angle droit.

Prenons pour axes des x et des y les droites OA, OB. Les points A et B auront, respectivement, pour coordonnées, $x = a, y = 0$ et $x = 0, y = b$. L'équation *générale* des paraboles qui passent par les trois sommets O, A, B du triangle OAB sera

$$(1) \qquad A^2 y(y - b) + 2Axy + x(x - a) = 0,$$

où A désigne un paramètre arbitraire.

Le point de contact d'une tangente parallèle à AB menée à l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB se trouve sur le diamètre de cette courbe, qui passe par le milieu C de AB, dont les coordonnées sont $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. En outre ce diamètre a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{A}$; son équation est donc

$$y - \frac{b}{2} = -\frac{1}{A}\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ou

$$(2) \qquad 2y - b = -\frac{1}{A}(2x - a);$$

par conséquent, les coordonnées du point de contact d'une tangente parallèle à AB devront satisfaire à la fois aux équations (1) et (2). Il s'ensuit que, pour obtenir l'équation du lieu de ce point de contact, il suffit d'éliminer le coefficient variable A entre les équations (1) et (2).

L'équation (2) donne $A = -\left(\frac{2x - a}{2y - b}\right)$; et, en substituant cette valeur à A, dans l'équation (1), on a

$$y(y-b)(2x-a)^2 - 2xy(2x-a)(2y-b) + x(x-a)(2y-b)^2 = 0.$$

En transportant les axes de coordonnées au point C, l'équation précédente devient d'abord

$$x^2\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) - 2xy\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(y + \frac{b}{2}\right) + y^2\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) = 0$$

et se réduit à

$$(ay + bx)(4xy + ay + bx) = 0,$$

équation qui se décompose en les deux suivantes :

$$ay + bx = 0 \quad \text{et} \quad 4xy + ay + bx = 0.$$

La première représente la droite AB, qui peut être considérée comme faisant partie du lieu cherché, lorsque l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB se compose du système de la droite AB et de la droite menée par le point O, parallèlement à AB.

L'équation $4xy + ay + bx = 0$ représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, c'est-à-dire aux droites OA, OB. Cette hyperbole passe par les points C et O; elle a pour tangentes en ces points la droite AB et la parallèle à AB menée par le point O; son centre est au milieu de la droite OC (*).

(*) Lorsqu'on mène à une parabole circonscrite à un triangle quelconque AOB une tangente parallèle à l'un des trois côtés AB du triangle, le diamètre de la parabole, qui passe par le point de contact de la tan-

2° Pour déterminer le lieu décrit par le centre de gravité d'un triangle dont les sommets soient trois points autres que O et communs à l'hyperbole dont l'équation est $4xy + ay + bx = 0$ et à l'une des paraboles circonscrites au triangle AOB, nous transporterons les axes de coordonnées au centre de cette hyperbole, qui a pour coordonnées, par rapport aux axes passant par le point C, $x = -\frac{a}{4}, y = -\frac{b}{4}$.

Au moyen de cette transformation, l'équation

$$4xy + ay + bx = 0$$

se réduit à

$$(3) \qquad 4xy = \frac{ab}{4},$$

et l'équation (1) des paraboles circonscrites au triangle AOB devient

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A^2(4y + b)(4y - 3b) \\ \quad + 2A(4x + a)(4y + b) + (4x + a)(4x - 3a) = 0. \end{array} \right.$$

Les ordonnées des quatre points d'intersection de l'hyperbole et de l'une quelconque des paraboles représen-

---

gente et par le milieu C du côté AB, rencontre toujours les deux autres côtés OA, OB du triangle, suffisamment prolongés, en deux points équidistants du point de contact de la tangente. De cette proposition, qu'il est facile de démontrer, résulte que le lieu des points de contact des tangentes menées aux différentes paraboles circonscrites au triangle AOB, parallèlement au côté AB, est le même que le lieu des milieux des droites menées du point C et limitées à la rencontre des côtés OA, OB indéfiniment prolongés dans les deux sens. Or ce dernier lieu géométrique est, comme on sait, une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux côtés OA, OB, qui a pour centre le milieu de la droite OC et passe par les points O et C; donc cette hyperbole est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à AB menées aux paraboles circonscrites au triangle AOB. Quand l'angle AOB est droit, l'hyperbole est équilatère.

(G.)

tées par l'équation (4) sont les racines de l'équation résultant de l'élimination de x entre les équations (3) et (4). En écartant la solution $4y+b=0$, qui donne l'ordonnée du point O, l'élimination de x conduit à

$$(5)\quad 64A^2y^3-16(3A^2b-2Aa)y^2+4a(2Ab-3a)y+a^2b=0.$$

Les racines y', y'', y''' de cette dernière équation sont les ordonnées des trois sommets du triangle formé par les sécantes communes à l'hyperbole et à la parabole, et qui ne passent pas par le point O. La somme de ces trois racines est, d'après une relation connue, $\dfrac{3Ab-2a}{4A}$. On aura donc, en désignant par y l'ordonnée du centre de gravité du triangle,

$$(6)\qquad 3y=\frac{3Ab-2a}{4A}.$$

L'abscisse de ce centre de gravité s'obtient par un calcul semblable. En éliminant y entre les équations (3) et (4) et supprimant la solution $(4x+a)=0$, qui donne l'abscisse du point O, on trouve

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&64x^3-16(3a-2Ab)x^2\\&\quad+4A(2ab-3Ab^2)x+A^2ab^2=0.\end{aligned}\right.$$

La somme $x'+x''+x'''$ des trois racines de l'équation (7) est égale à $\dfrac{3a-2Ab}{4}$ (*); par conséquent, si x

(*) La valeur de $x'+x''+x'''$ se déduit simplement des équations (3) et (6), car l'équation (3) donne $x'+x''+x'''=\dfrac{ab}{16}\left(\dfrac{1}{y'}+\dfrac{1}{y''}+\dfrac{1}{y'''}\right)$ et l'équation (5) $\dfrac{1}{y'}+\dfrac{1}{y''}+\dfrac{1}{y'''}=\dfrac{4(3a-2Ab)}{ab}$; d'où

$$x'+x''+x'''=\frac{ab}{16}\times\frac{4(3a-2AB)}{ab}=\frac{3a-2Ab}{4}.$$

(G.)

désigne l'abscisse du centre de gravité, on a

$$(8) \qquad 3x = \frac{3a - 2Ab}{4}.$$

Pour obtenir maintenant l'équation du lieu cherché, il suffit d'éliminer le paramètre variable A entre les équations (6) et (8) : on trouve ainsi

$$9(4x - a)(4y - b) - 4ab = 0;$$

en transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point C, cette équation se réduit à $36xy - ab = 0$; on voit qu'elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux droites OA, OB, et qui a pour centre le point C.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Tourrettes.

QUESTION D'EXAMEN

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 576);

PAR M. A. ALLARETTI,

Étudiant en Mathématiques à Florence.

En désignant par m une quantité positive, la substitution de $z = x^m$ dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ donne le résultat

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx;$$

on a de même, par le changement de m en n,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx;$$

en sorte que l'on serait conduit à conclure que la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\right)$ est nulle.

Or cette conclusion est inadmissible, car on sait, à n'en pas douter, que l'on a

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\right) dx = \log \frac{m}{n}.$$

En quoi consiste le paralogisme ? (S. REALIS.)

Il est facile, ce me semble, de répondre à cette question.

Dans les équations

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log x} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{\log z} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\log x} dx,$$

les deux premiers membres ne peuvent être supposés égaux, z n'étant pas une variable *indépendante*, mais une fonction de x, qui est x^m dans la première équation, et une fonction différente de x ($z = x^n$) dans la seconde, en admettant l'inégalité des exposants m et n.

Sans cette considération relative à la variable indépendante, on pourrait arriver à une foule de conclusions du genre de celle qui est rapportée par M. Realis.

Si, par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 dz$, on pose $z = ax$, il vient

$$\int_0^1 dz = a \int_0^1 dx = ax.$$

On a de même, pour $z = bx$,

$$\int_0^1 dz = b \int_0^1 dx = bx.$$

On en conclurait

$$(b - a) \int_0^1 dx = 0, \quad \text{d'où} \quad b - a = 0,$$

c'est-à-dire que deux nombres quelconques b et a seraient toujours égaux entre eux.

Note. — MM. de Virieu et Moret-Blanc trouvent que le paralogisme dont il s'agit consiste à admettre, sans restriction, l'égalité $\infty = \infty$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1874).

PREMIÈRE SESSION.

Compositions du 7 et du 8 juillet 1874.

Géométrie analytique.

Étant donnés dans un plan deux points fixes F et A :

1° Former l'équation générale des courbes du second degré qui, situées dans ce plan, ont un foyer en F et un sommet de l'axe focal en A ;

2° Déterminer quel est le genre de la courbe représentée par cette équation générale selon la grandeur du paramètre variable qu'elle renferme ;

3° Disposer de ce paramètre variable de façon que la courbe du second degré passe par un point donné P, et discuter le nombre et le genre des solutions obtenues selon la position du point P dans le plan.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. Moret-Blanc.* — Les lois relatives aux fractions périodiques, énoncées dans le numéro de décembre, t. XIII, p. 569-571, donnent lieu à quelques observations assez importantes :

1° Dans la loi I, il n'est pas nécessaire que le dénominateur soit un nombre *premier :* il suffit qu'il ne soit divisible ni par 2 ni par 5, ou, en d'autres termes, que la fraction décimale soit périodique simple.

En effet, soient A un nombre impair non divisible par 5, a le nombre entier formé par une période de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{A}$; le nombre analogue pour la fraction complémentaire $\frac{A-1}{A}$ sera $(A-1)a$; soit n le nombre des chiffres de chaque période.

A et a étant diviseurs de $10^n - 1$ sont des nombres impairs non divisibles par 5, et par conséquent terminés par l'un des chiffres 1, 3, 7, 9.

Les fractions $\frac{1}{A}$ et $\frac{A-1}{A}$ étant complémentaires, on a

$$a + (A-1)a = Aa = 10^n - 1.$$

Ainsi le produit Aa est terminé par un 9; par suite, si le dernier chiffre à droite de A est 1, 3, 7, 9, le dernier chiffre à droite de a sera 9, 3, 7, 1.

2° Dans les lois II et III, au contraire, et dans les quatre suivantes qui en sont des corollaires, il faut que A soit un nombre premier, ou du moins qu'il soit premier avec $10^n - 1$, $2n$ étant le nombre des chiffres de la période.

Exemple : $\frac{1}{33} = 0,030303\ldots$

La période est 03 ; la somme des chiffres est 3, et non pas 9, et la somme des restes est 11 et non 33.

3° Je ne saisis pas le sens de la loi VIII; le commencement de la phrase paraît omis (*).

4° Dans la loi IX, il n'est pas nécessaire que le diviseur terminé par 9 soit un nombre premier. Toutes les fois que le dividende partiel est terminé par zéro et le diviseur par 9, le reste est terminé par le chiffre du

---

(*) Cette omission a été depuis réparée. *Voir* t. XIV, p. 191 et 192.

quotient. En effet soit a ce chiffre ; le reste est de la forme $10m - 9a = 10(m-a) + a$: le dernier chiffre est donc a.

5° La loi X est évidemment inexacte. Soit $\frac{M}{A} = N + \frac{m}{A}$: c'est la fraction $\frac{m}{A}$ et non son complément qu'il faut ajouter au nombre entier N. Cela est tellement évident que l'énoncé même en devient superflu.

Ces observations m'ont paru nécessaires pour rétablir la complète exactitude des lois énoncées. Je ne sais si la première de ces lois avait déjà été remarquée.

2. M. *Lez* et M. *E. Barisien*, élève à l'École Polytechnique, nous ont communiqué une rectification des calculs (*) qui ont fait conclure à tort, à l'auteur de la solution (t. XII, 2e série, p. 451-453), que la proposition (1006) n'était pas rigoureusement exacte.

L'exactitude de cette proposition a déjà été constatée par M. Bourguet (t. XIII, p. 538), au moyen d'une analyse différente de celle de MM. Lez et Barisien.

3. *Extrait d'une Lettre de M. Poujade.* — Dans le numéro d'octobre dernier des *Nouvelles Annales*, M. Fouret réclame contre une rectification qui a été faite à l'énoncé donné par lui à la question 1109, et à ma solution que vous avez insérée. Il me semble qu'il a tort.

Lorsqu'on cherche à construire une parabole, connaissant une tangente, son point de contact et deux autres points de la courbe, on trouve, quand le problème est possible, deux solutions et deux points où le diamètre

(*) Tome XII, page 452, l'angle BOM ou φ a été confondu avec le complément de l'angle excentrique correspondant au point M, et de là les égalités inexactes $x = a \sin\varphi$, $y = b \cos\varphi$.

du point de contact rencontre la corde des deux points donnés. L'un est entre ces deux points et l'autre se trouve sur le prolongement de la corde au delà de son intersection avec la tangente. Une corde de la parabole peut couper un diamètre au dehors de la courbe ; c'est pour n'y avoir pas songé que j'avais conclu à l'exactitude de l'énoncé, et M. Fouret semble tomber dans la même erreur.

Soient AB la corde, CT la tangente, C son point de contact, I le point où elle est coupée par la corde, enfin CD le diamètre rencontrant la corde en D. Il est aisé de voir que $\overline{ID}^2 = IA.IB$; la longueur ID portée de l'autre côté de I en ID' détermine un second diamètre CD' et une parabole réelle répondant aux conditions.

4. Mêmes observations de M. Bourguet au sujet de la question 1109.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Questions de Géométrie élémentaire. Méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés. Ouvrage destiné aux élèves des Lycées, depuis la classe de troisième jusqu'à celle de Mathématiques spéciales inclusivement, par M. Desboves, agrégé, docteur ès Sciences, professeur au lycée Fontanes, à Paris; 2e édition, entièrement refondue et augmentée. Paris, librairie Ch. Delagrave, rue des Écoles, 58 (1875).

Traité de Géométrie élémentaire, par Eugène Rouché, professeur à l'École Centrale, répétiteur à l'École Polytechnique, et Ch. de Comberousse, professeur à l'École Centrale et au Collége Chaptal. Conforme aux programmes officiels, renfermant un très-grand nombre d'exercices et plusieurs appendices consacrés à l'exposition des principales méthodes de la Géométrie moderne ; 3e édition, revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. In-8, XXXVI-890 pages, avec 611 figures dans le texte et 1085 questions proposées; 1874. — Prix : 12 fr.

Géométrie Hugodomoïdale, anhellénique, mais philosophique et architectonique. — La question de l'Équidomoïde et des Cristalloïdes géométriques, par le comte Léopold Hugo. Paris, en vente chez tous les libraires (1875).

Cette nouvelle production du comte Léopold Hugo surpasse peut-être, *en originalité*, tout ce qui est déjà sorti de la plume du même auteur.

La Géométrie Hugodomoïdale commence par cette épigraphe :

Devise antiarchimédienne : L'équidomoïde va bien ; le rebelle gagne du terrain !... Suppression de la sphère !

Et se termine ainsi :

L'École Hugodomoïdale est vraiment l'école romantique de la Géométrie, école toujours victorieuse des UNITÉS *archimédiennes ! Vive l'Antisphère ! Evviva l'Equidomoide anteriore e superiore ! Si, per Bacco ! Evviva l'Equidomoide !*

De pareils accès de gaieté pourraient causer quelque inquiétude aux amis de l'auteur, s'il n'avait pas, lui-même, pris le soin d'en faire connaître le motif réel dans un *Avertissement* où se trouvent les lignes suivantes :

« ... Je me suis vu forcé d'accentuer au plus haut degré l'originalité de la forme dans mes productions successives, afin de fixer, au moins en gros, ma petite théorie dans la mémoire des lecteurs. C'est ce que je continuerai à faire dans l'avenir, pour tenter d'abréger quelque peu le noviciat que doit traverser toute nouveauté hardie. »

Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure, par ÉDOUARD LUCAS, agrégé de l'Université, Membre de la Société mathématique de France et de la Société d'Émulation de l'Allier. Moulins, imprimerie de C. Desrosiers (1875).

Essai sur les fonctions hyperboliques, par C.-A. LAISANT, capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique. (Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2e cahier). Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Grand in-8, 100 pages, avec figures dans le texte; 1874. Prix : 3 fr. 50 c.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Intorno alla vita ed ai lavori di monsignore D. Barnaba Tortolini; cenni del prof. VINCENZO DIORIO, Secretario dell'Accademia pontificia de' NUOVI LINCEI (*).

Tel est le titre d'un discours académique, contenant l'éloge de l'illustre défunt et le catalogue complet de ses travaux scientifiques. Ce catalogue et les Notices qui s'y rapportent ont été communiqués par M. D. B. Boncompagni à l'auteur du discours.

Un premier article nécrologique sur le professeur D. Barnaba Tortolini se trouve dans le journal intitulé : l'*Osservatore Romano, officiale per gli atti della federazione piana delle Societa cattoliche*. Anno XIV, num. 194, Giovedi, 27 Agosto 1874.

(*) *Estratto dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*; anno XXVIII, sessione 1a del 20 dicembre 1874. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, n° 211 A (1875).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 28

(voir 1re série, t. I, p. 247);

PAR M. H. BROCARD.

Parmi les m quantités a_1, a_2, a_3, ..., a_m, il y a n quantités négatives. Combien y a-t-il de termes négatifs dans le développement de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^\mu$, μ étant un nombre entier positif?

Il est évident que l'on ne changera rien au développement en réunissant les n termes négatifs et les $(m - n)$ ou p termes positifs. Désignons par N et P les deux groupes ainsi obtenus; nous aurons

$$(P - N)^\mu = P^\mu - C_\mu^1 N P^{\mu-1} + C_\mu^2 N^2 P^{\mu-2} \\ - C_\mu^3 N^3 P^{\mu-3} + \ldots + (-1)^\mu C_\mu^\mu N^\mu,$$

et le nombre des termes négatifs du développement sera la somme des nombres de termes des produits de la forme $N^{2k+1} P^{\mu-2k-1}$. Or, dans le développement de la puissance n d'un polynôme de a lettres, chacun des termes peut être considéré, à un facteur près, comme une des combinaisons avec répétition, n à n, des a lettres qui composent ce polynôme. Ainsi le nombre des termes de son développement est exprimé par

$$\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Le nombre des termes de N^{2k+1} est donc

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}{1.2.3\ldots(2k+1)},$$

et celui de $P^{\mu-2k-1}$ est

$$\frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+\mu-2k-2)}{1.2.3\ldots(\mu-2k-1)}.$$

Ainsi le nombre des termes cherchés a pour expression

$$\sum\frac{n(+1)(n+2)\ldots(n+2k)p(p+1)(p+2)\ldots(p+\mu-2k-2)}{1.2.3\ldots(2k+1)\,1.2.3\ldots(\mu-2k-1)}.$$

On s'arrêtera évidemment à la première valeur de k, qui rendrait cette expression négative.

Question 900 (*)

(voir 2e série, t. VIII, p. 45);

PAR M. L. BOURGUET.

Une ellipse donnée se meut à l'intérieur d'une parabole fixe donnée, de manière à toucher cette parabole en deux points. Trouver le lieu décrit par le centre de l'ellipse mobile et l'enveloppe de la droite qui passe par les deux points de contact. (DAUPLAY.)

Soit β l'ordonnée du milieu de la corde des contacts; rapportons la parabole à la tangente parallèle à cette corde et à son diamètre. Soit

$$x-\alpha_1=0$$

l'équation de la corde, l'équation de la parabole sera

$$(1)\qquad y^2=2\frac{p^2+\beta^2}{p}\cdot x.$$

Soit X l'abscisse du centre de l'ellipse; les coordonnées des points de contact devront satisfaire à la relation

$$(2)\qquad \frac{2(p^2+\beta^2)\alpha_1}{pb'^2}+\frac{(X-\alpha_1)^2}{a'^2}=1.$$

(*) Des fautes de calcul se sont glissées dans la solution de la question 900, insérée tome XIII, pages 425-431.

De plus, on a

$$(X - \alpha_1)(X + \alpha_1) = a'^2,$$

ou

(3) $$X^2 - \alpha_1^2 = a'^2.$$

Si, entre les équations (2) et (3), nous éliminons α_1, nous aurons

(4) $$\left(\frac{p^2 + 6^2}{pb'^2}\right)\left(\frac{p^2 + 6^2}{pb'^2} - \frac{2X}{a'^2}\right) + \frac{1}{a'^2} = 0.$$

D'autre part, on a

$$X = \alpha - \frac{6^2}{2p} = \frac{2p\alpha - 6^2}{2p}.$$

Portant cette valeur dans (4), il vient

(5) $$p^2 b'^4 - pb'^2(p + 2\alpha)(p^2 + 6^2) + (a^2 + b^2)(p^2 + 6^2)^2 = 0;$$

mais le théorème d'Apollonius donne

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 \frac{p^2}{p^2 + 6^2} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

d'où

(6) $$p^2 b'^4 - p^2(a^2 + b^2) b'^2 + a^2 b^2 (p^2 + 6^2) = 0.$$

Eliminons b' entre les équations (5) et (6), nous aurons

(7) $$\left\{\begin{aligned} &[p(a^2 + b^2) - (p + 2\alpha)(p^2 + 6^2)] \\ &\quad \times [p(a^2 + b^2)^2 - (p + 2\alpha)a^2 b^2] \\ &\quad + [(a^2 + b^2)(p^2 + 6^2) - a^2 b^2]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation de la courbe. On voit qu'elle est symétrique par rapport à l'axe de la parabole et qu'elle coupe chaque diamètre de la parabole en deux points réels ou imaginaires. La génération même de cette courbe et une discussion très-simple de l'équation (7) font voir qu'elle se compose d'une boucle et non de branches infinies.

Entre (3) et (4) éliminons X, il vient

$$\frac{pb'^2}{a'^2(p^2+\beta^2)} - \frac{p^2+\beta^2}{pb'^2} = \pm \frac{2\alpha_1}{a'^2} = \pm \frac{\beta^2 - 2p\alpha}{pa'^2}.$$

(α et β sont ici les coordonnées du pôle de la droite des contacts.)

De cette équation, on tire

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} p^2b'^4 + b'^2(p^2+\beta^2)(p^2+\beta^2) \\ \qquad \mp (\beta^2 - 2p\alpha) - (a^2+b^2)(p^2+\beta^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Éliminant b'^2 entre cette dernière équation et l'équation (6), on a

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} \{(p^2+\beta^2)[(p^2+\beta^2) \mp (\beta^2 - 2p\alpha)] + p^2(a^2+b^2)\} \\ \quad \times \{a^2b^2[(p^2+\beta^2) \mp (\beta^2 - 2p\alpha)] + (a^2+b^2)p^2\} \\ \qquad + p^2[(a^2+b^2)(p^2+\beta^2) + a^2b^2]^2 = 0. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation de la polaire réciproque de l'enveloppe de la corde des contacts.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Questions 1161 *et* 1162

(voir 2e série, t. XIV, p. 96);

PAR MM. H. GARRETA ET L. GOULIN,

Élèves en Mathématiques spéciales au lycée Corneille, à Rouen (classe de M. Vincent).

1161. *Si d'un point* M *pris sur une branche d'hyperbole on mène une tangente* MT *au cercle bitangent à la courbe selon son axe transverse, et si, du même point* M, *on mène une parallèle à l'asymptote jusqu'à son point d'intersection* Q *avec l'axe transverse de l'hyperbole, le triangle* MPQ *est isoscèle.*

(L.-A. LEVAT.)

Soient x', y' les coordonnées du point M; l'hyperbole étant rapportée à ses axes, le carré de la tangente

MT est égal à $x'^2 + y'^2 - a^2$, ou, parce que $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, on a $\overline{MT}^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) y'^2$.

D'autre part, si l'on désigne par MP l'ordonnée y' du point M, le triangle rectangle MQP donne

$$\overline{MQ}^2 = \frac{\overline{MP}^2}{\sin^2 MQP} = \frac{y'^2}{\sin^2 MQP}.$$

Mais, la droite MQ étant parallèle à une asymptote, $\sin MPQ = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; donc

$$\overline{MQ}^2 = y'^2 \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) = MT^2.$$

C. Q. F. D.

1162. *Construire une hyperbole, connaissant l'axe transverse* AA' *et un point* M *de la courbe.*

(L.-A. Levat.)

La construction se déduit de la propriété précédente. Il suffit de déterminer les asymptotes.

Pour cela, sur AA' comme diamètre je décris une circonférence, à laquelle je mène une tangente MT du point M, et, avec MT pour rayon, je décris du point M, comme centre, une circonférence qui coupe la droite AA' en des points Q, Q'. En menant par le milieu de AA' des parallèles aux droites MQ, MQ', on aura les asymptotes de l'hyperbole. On est ainsi ramené à un problème connu.

Note. — Les mêmes questions ont été résolues par MM. Auguste Morel; Jacob, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon (classe de M. Marguet); B. Launoy; F. Pitois et Richard, élèves du collége d'Annecy; H. Lemelle, à Poitiers; Moret-Blanc; Lez; Brocard; Gambey; Desportes, élève de première année de la classe de Mathématiques spéciales du lycée d'Angers (classe de M. Bouché); Edmond de Zeomare; Denoyelle et Georges Vandaine, élèves à l'institution Sainte-Geneviève; Moreau; Étienne Gatti, étudiant à l'Université de Turin; Chadu; Guillaume Suppan, répétiteur à l'École Polytechnique à Budapest.

QUESTIONS.

1170. Démontrer que, dans les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, il est permis de remplacer les côtés a, b, c, respectivement par

$$a \cos A \cos 2A \ldots \cos 2^{n-1} A,$$
$$b \cos B \cos 2B \ldots \cos 2^{n-1} B,$$
$$c \cos C \cos 2C \ldots \cos 2^{n-1} C,$$

et les angles A, B, C par

$$p\pi \pm 2^n A, \quad q\pi \pm 2^n B, \quad r\pi \pm 2^n C,$$

où n désigne un nombre entier et positif quelconque, et p, q, r des nombres entiers dont les valeurs et les signes ne sont pas arbitraires.

On a, par exemple,

$$\pm \cos 2^n C = \frac{\left[\begin{array}{c}(a \cos A \ldots \cos 2^{n-1} A)^2 + (b \cos B \ldots \cos 2^{n-1} B)^2 \\ -(c \cos C \ldots \cos 2^{n-1} C)^2\end{array}\right]}{2(a \cos A \ldots \cos 2^{n-1} A)(b \cos B \ldots \cos 2^{n-1} B)}.$$

(J.-W.-L. Glaisher.)

1171. Soient M, A, B trois points d'une circonférence; trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en A, B aux droites MA, MB, lorsque le point M se déplace sur la circonférence.

(Laisant.)

1172. Soient a, b, c les côtés; S la surface d'un triangle ABC; R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle; $2p'$ le périmètre du triangle de périmètre minimum inscrit dans le triangle ABC :

1° Construire le triangle ABC connaissant $2p'$ et les angles A, B, C;

2° Démontrer la formule $S = p'R$.

(C. Chadu).

PROPRIÉTÉS DE LA STROPHOÏDE.

Démonstration d'un théorème de Poncelet. — Propriétés de figures analiagmatiques ;

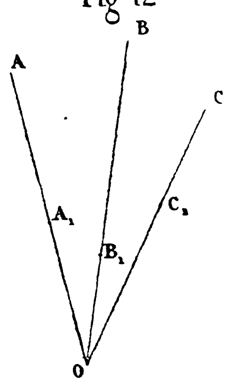
PAR M. L. MALEYX.

(Suite d'un article précédent, *voir* même tome, p. 193.)

THÉORÈME III. — *Si une figure se transforme en elle-même par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance convenables, en la transformant par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance quelconques, on formera une nouvelle figure jouissant de la même propriété.*

Soient (*fig.* 12) A, B, C, A_1, B_1, C_1 six points d'une figure se transformant en elle-même par rayons vecteurs

Fig 12



réciproques par rapport au pôle O, ces points se correspondant deux à deux, de sorte qu'on ait

$$P = OA \times OA_1 = OB \times OB_1 = OC \times OC_1.$$

Considérons les quatre points A, A_1, B, B_1 comme fixes, C, C_1 comme variables sur la figure et non situés dans le plan AOB; les six points A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont situés sur une même sphère. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant un pôle et une puissance quelconques, désignons par a, b, c, a_1, b_1, c_1 les points transformés respectifs de A, B, C, A_1, B_1, C_1; les six points a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont situés sur une même sphère transformée de celle qui passe par A, B, C, A_1, B_1, C_1; les quatre points a, a_1, b, b_1 sont situés sur l'intersection de cette sphère avec celle qui est transformée du plan AOB, donc dans un même plan; on démontrerait de même que les deux systèmes de quatre points (a, a_1, c, c_1), (b, b_1, c, c_1) sont chacun situés dans un plan; donc les droites aa_1, bb_1, cc_1, étant intersections de trois plans se coupant deux à deux, vont concourir au même point, et si l'on désigne ce point d'intersection des droites fixes aa_1, bb_1 par ω, nous aurons

$$\omega a \times \omega a_1 = \omega b \times \omega b_1 = \omega c \times \omega c_1,$$

ce qui établit la proposition pour tous les points de la figure non situés dans le plan AOB.

Observons toutefois que les points A, A_1, B, B_1 peuvent être introduits fictivement dans la figure, et qu'on peut en disposer de manière que le plan AOB ne contienne qu'un nombre limité de rayons issus du point O et dirigés vers les points de la figure. Il n'y aurait donc exception que pour un nombre limité de points, ce qui est inadmissible; et encore pourrait-on lever la difficulté relative à ces points en faisant varier le rayon OBB_1 et en conservant le rayon OAA_1. Donc le théorème est général.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent que toute figure plane se transformant en elle-même par rayons vecteurs réciproques sera transformée par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle hors de son plan en intersection d'une sphère et d'un cône.

Le sommet de ce cône est facile à déterminer : en effet, soient (*fig.* 13) A, A_1 deux points correspondants d'une

Fig. 13.

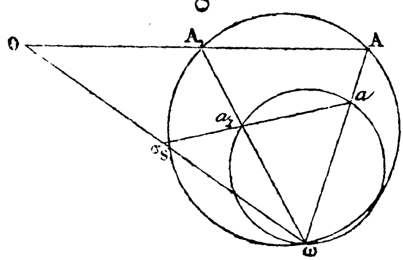


figure plane se reproduisant par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle O de sorte que $OA \times OA_1 = P$; transformons-la par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle ω hors de son plan et la puissance π; faisons passer un plan par ω et AA_1. La droite OAA_1 se transformera en la circonférence $\omega a a_1$, la circonférence ωAA_1 en la droite aa_1 coupant $O\omega$ en σ. Or on a $OS \times O\omega = OA \times OA_1 = P$, d'où l'on conclut que le point S est fixe; de plus $\omega S \times \omega\sigma = \omega a \times \omega A = \pi$: donc le point σ est fixe, et c'est le sommet du cône.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une figure plane ayant un plan de symétrie, et en prenant le pôle hors de son plan, il résulte du théorème I qu'elle se transformera en intersection d'une sphère et d'un cône dont le sommet sera le transformé du point symétrique du pôle de la première transformation par rapport au plan de symétrie. Le sommet de ce cône sera donc situé dans le plan tangent à la sphère transformée du plan de la courbe et au pôle de transformation ω. Réciproquement l'intersection d'une sphère et d'un cône transformée par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle sur la sphère, deviendra une ligne plane se reproduisant par rayons vecteurs réciproques.

Examinons maintenant quelques conséquences de ces propositions. Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une courbe du second degré, en prenant pour pôle un point non situé sur ses axes, mais situé dans son plan, on obtiendra une transformée se reproduisant par une transformation analogue en prenant un pôle et une puissance convenables. Il existera deux pôles de reproduction quand la courbe initiale sera une ellipse ou une hyperbole, un seul quand ce sera une parabole. Les deux pôles de reproduction sont situés sur deux rayons rectangulaires issus du pôle de la première transformation.

Si le pôle de la première transformation est situé sur l'un des axes de la courbe, l'un des pôles de reproduction s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe sur lequel on a pris le premier pôle. Nous en avons un exemple dans le limaçon de Pascal obtenu en transformant une courbe du second degré par rayons vecteurs réciproques en prenant un foyer pour pôle; le pôle de reproduction est alors le point transformé du second foyer; dans la parabole, ce point vient coïncider avec le pôle de transformation primitif et la puissance de reproduction est nulle.

Si nous admettons que la courbe polaire réciproque d'une courbe du second degré par rapport à un cercle soit une courbe du second degré, il en résulte, en se fondant sur le théorème III de notre précédent article, que toute podaire d'une courbe du second degré est transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe du second degré; donc toute podaire d'une courbe du second degré peut se reproduire par rayons vecteurs réciproques pour un ou deux pôles convenablement choisis.

Si maintenant nous transformons par rayons vecteurs réciproques une courbe du second degré en prenant le pôle hors de son plan, elle deviendra intersection de la sphère transformée de son plan et de deux ou d'un cône, suivant qu'elle aura deux ou un seul plan de symétrie. Nous avons vu comment étaient placés les sommets de ces cônes, d'après la remarque sur les théorèmes III et I. On conçoit que chacun de ces cônes doit être du second degré. En effet, leur directrice est bien une courbe du quatrième degré, intersection d'une sphère et d'un cône du second degré; mais, comme chaque génératrice de l'un des cônes considérés coupe la directrice en deux points, un plan passant par son sommet ne peut contenir plus de deux génératrices.

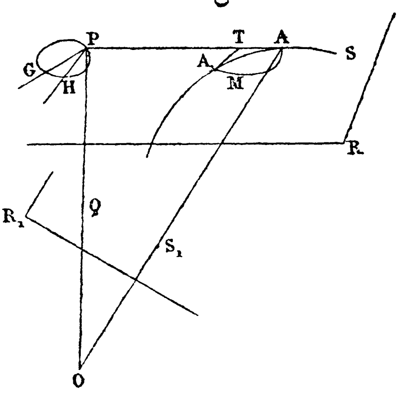
De là on déduit que, si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré ayant son sommet sur la sphère, en prenant pour pôle un point de la surface de la sphère, la transformée sera plane, admettra un point double réel, point transformé du sommet du cône; son degré ne surpassera pas quatre, elle sera de degré impair ou pair suivant que le pôle sera sur la courbe sphérique ou en dehors, puisque dans le premier cas elle n'aura qu'une direction asymptotique; elle aura, du reste, la propriété de se reproduire par rayons vecteurs réciproques, puisque la courbe sphérique qui lui a donné naissance peut elle-même être considérée comme transformée d'une courbe du second degré.

Les points de la transformée d'une courbe du second degré peuvent, comme ceux de la strophoïde, être considérés comme correspondants deux à deux; deux points correspondants seront les transformés de deux points diamétralement opposés de la conique; ils sont toujours situés sur un cercle passant par le pôle et le point transformé du centre; ce cercle coupe la transformée aux deux points correspondants sous des angles égaux.

Théorème IV. — *Deux surfaces polaires réciproques par rapport à une sphère sont chacune transformées par rayons vecteurs réciproques d'une podaire de l'autre, le pôle de transformation étant le centre de la sphère directrice et la puissance de transformation le carré de son rayon.*

Soient une surface quelconque S (*fig.* 14), R son plan tangent en A ; si du point fixe O nous abaissons une per-

Fig. 14.



pendiculaire sur ce plan, le lieu du point P, pied de cette perpendiculaire, quand on fera varier A, sera une podaire de la surface S. Je dis maintenant que le plan tangent à la surface podaire en P l'est également à la sphère ayant OA pour diamètre. En effet unissons AP, prenons le point T voisin de A sur AP, comme sommet d'un cône circonscrit à la surface S suivant la courbe A_1MA ;

les projections du point O sur tous les plans tangents à ce cône appartiendront à la surface podaire et à la sphère ayant OT pour diamètre; ces points seront situés sur la petite courbe sphérique PGH. Faisons passer par OP deux plans fixes OPG, OPH, coupant la courbe PGH en G et en H. Si le point T se rapproche indéfiniment de A, les droites PG, PH deviendront, à la limite, tangentes à la surface podaire et à la sphère ayant OA pour diamètre. Si maintenant nous considérons le point O comme centre d'une sphère directrice dont le rayon soit R, le pôle du plan tangent en A par rapport à cette sphère se trouve sur OP et en un point Q, tel que

$$OP \times OQ = R^2.$$

Donc le lieu du pôle du plan tangent à la surface S satisfait à la condition de transformation par rayons vecteurs réciproques conforme à l'énoncé. Le plan tangent au lieu du point Q en Q peut être considéré comme transformé par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance R^2 de la sphère ayant OA pour diamètre; c'est donc le plan perpendiculaire à OA mené par le point Q, et l'on a

$$OS_1 \times OA = R^2.$$

A est donc le pôle du plan tangent au lieu du point Q en Q, et le lieu de S_1, qui est une podaire du lieu du point Q, est transformé par rayons vecteurs réciproques du lieu du point A, suivant la puissance R^2.

Nous terminerons là cette étude géométrique, et nous allons passer à quelques considérations analytiques qui y sont liées.

Soient x, y les coordonnées rectangulaires d'un point, x', y' les coordonnées du point transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant l'origine pour pôle et P pour puissance, on a

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x'^2 + y'^2}{\text{P}},$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad x = \frac{\text{P}x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{\text{P}y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Soit maintenant l'équation d'une courbe du second degré

$$(2) \qquad \text{A}y^2 + \text{B}xy + \text{C}x^2 + \text{D}y + \text{E}x + \text{F} = 0.$$

Sa transformée par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et en prenant le pôle à l'origine, aura une équation formée en remplaçant dans l'équation (2) x et y par leurs valeurs déduites des formules (1). Cette équation rendue entière sera, en supprimant les accents,

$$(3) \; \text{F}(x^2+y^2)^2 + (\text{D}y + \text{E}x)(x^2+y^2) + \text{A}y^2 + \text{B}xy + \text{C}x^2 = 0.$$

On voit que cette courbe est du troisième ou du quatrième degré, suivant que la conique (2) passe ou ne passe pas par le pôle de transformation. Quel que soit son degré, elle admet toujours un point double réel qui est le pôle de transformation; ce point est isolé si la courbe proposée est une ellipse, suivi de points réels consécutifs dans le cas contraire; les tangentes en ce point double sont parallèles aux directions asymptotiques de la courbe donnée. Il résulte du théorème I que la courbe (3) doit se reproduire par rayons vecteurs réciproques pour un ou deux pôles, points transformés des points symétriques du pôle de la première transformation par rapport aux axes de la courbe (2); les pôles de reproduction feront donc ou ne feront pas partie de la courbe (3), suivant qu'elle sera du troisième ou du quatrième degré.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur la direction des axes de coordonnées initiaux, nous pouvons supposer l'axe des y parallèle à la polaire de l'origine; dès lors on aura $D = 0$, et l'équation (3) se réduira à

$$(4)\quad F(x^2+y^2)^2 + Ex(x^2+y^2) + Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

Rapportant cette courbe à un système de coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine et pour axe polaire l'axe de x, l'équation devient

$$(5)\quad F\rho^2 + E\rho\cos\omega + A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega = 0.$$

Supposons d'abord $F = 0$, c'est-à-dire le pôle de transformation sur la courbe, l'équation (5) se réduit à

$$E\rho\cos\omega + A + \cos\omega[B\sin\omega + (C - A)\cos\omega] = 0$$

ou

$$(6)\qquad \rho = -\frac{A}{E\cos\omega} - \frac{1}{E}[B\sin\omega + (C - A)\cos\omega].$$

On voit sous cette forme que notre transformée peut se construire comme la strophoïde, qui n'en est qu'un cas particulier, en augmentant les rayons vecteurs d'une droite fixe, qui est asymptote de la courbe, de ceux d'un cercle qui passe par le pôle. Il est facile, quand la droite et le cercle ont été construits, de déterminer les points du lieu dont la distance à l'asymptote est maximum ou minimum : c'est généralement en ces points que la tangente est parallèle à l'asymptote, et ce sont eux qui sont les pôles de reproduction de la courbe; ils sont situés sur deux rayons rectangulaires issus du pôle de transformation et dirigés vers les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à la direction asymptotique.

Supposons maintenant $F \gtrless 0$: on voit, d'après l'équation (5)

$$F\rho^2 + E\rho\cos\omega + A\sin^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega = 0,$$

que le lieu des milieux des cordes interceptées par la courbe sur les rayons issus du pôle est une circonférence de cercle; ce fait pouvait être géométriquement prévu, la circonférence étant la transformée de la polaire de l'origine.

Cherchons actuellement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe plane de degré p puisse se reproduire par rayons vecteurs réciproques. Désignons en général par $F_k(xy)$ un polynôme homogène de degré k en x et y; considérons une courbe de degré p, rapportons-la à deux axes de coordonnées rectangulaires se coupant en un point de la courbe du degré de multiplicité $p-q$, $p-q$ pouvant être nul; l'équation de cette courbe pourra s'écrire

$$(1)\quad F_p(xy) + F_{p-1}(xy) + F_{p-2}(xy) + \ldots + F_{p-q}(xy) = 0.$$

Formons l'équation de sa transformée suivant la puissance P, et, en prenant le pôle à l'origine, nous aurons, d'après des formules établies,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy) \\ &\quad + P(x^2+y^2)^{q-1}F_{p-q+1}(xy) + \ldots + P^q F_p(xy) = 0, \end{aligned}\right.$$

Pour que l'équation (1) représente une courbe se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle à l'origine, il est nécessaire et suffisant qu'en choisissant convenablement P l'équation (2) puisse représenter le lieu de l'équation (1). Or pour cela il faut que le premier membre de l'équation (2) soit le produit du premier membre de l'équation (1) par un polynôme de degré q, puisque le degré de l'équation (2) est $(p+q)$.

De plus le facteur introduit doit être homogène; car le degré des termes de degré le plus faible de l'équation (2) doit être la somme des degrés des termes de degré le plus faible de l'équation (1) et du facteur introduit, ce qui exige que ce degré soit q. Ainsi le premier membre de l'équation (2) doit être le produit du premier membre de l'équation (1) par un polynôme homogène à coefficients réels de degré q; si nous admettons qu'il n'existe aucun facteur commun aux polynômes

$$F_p(xy),\quad F_{p-1}(xy),\ldots,\quad F_{p-q}(xy),$$

les polynômes

$$(x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy),\quad (x^2+y^2)^{q-1}F_{p-q+1}(xy),\ldots,\quad F_p(xy)$$

admettant un facteur commun de degré q, ce facteur ne pourra se composer que de facteurs du premier degré de x^2+y^2, et, comme il est à coefficients réels, il devra être une puissance entière de x^2+y^2, ce qui exige que q soit pair et que le facteur soit $\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}$. D'après cela, pour que l'équation (1) représente une courbe se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant à l'origine, il faut et il suffit que l'on puisse trouver des valeurs de λ et de P satisfaisant aux égalités

$$\begin{aligned}
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}F_p\quad(xy) &= (x^2+y^2)^q F_{p-q}(xy),\\
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}F_{p-1}(xy) &= \mathrm{P}(x^2+y^2)^{q-1}F_{p-q+1}(xy),\\
\vdots\qquad & \qquad\vdots\\
\lambda(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}F_{p-q}(xy) &= \mathrm{P}^q F_p(xy).
\end{aligned}$$

Ces conditions se réduisent aux suivantes :

1° Que le groupe des termes de degré le plus élevé soit divisible par le groupe de termes de degré le moins élevé, et que le quotient soit à une constante près une puissance de (x^2+y^2), ce qui exige que la différence de leurs degrés soit un nombre pair et que l'exposant de (x^2+y^2) soit la moitié de ce nombre; si cette première condition est remplie, la première égalité détermine la valeur de λ, et, en multipliant la première et la dernière, on en déduira $P : P = \lambda^{\frac{2}{q}}$.

2° Que si l'on prend deux groupes de termes séparément homogènes, et dont la somme des degrés soit égale à la somme des degrés des termes extrêmes, celui de degré le plus élevé soit divisible par celui de degré moindre; que le quotient soit à une constante près une puissance de (x^2+y^2) dont l'exposant est la demi-différence de leurs degrés; quant à la constante, si l'on représente par δ l'excès du degré de l'équation sur le degré du dividende, elle sera

$$\frac{P^\delta}{\lambda} = \lambda^{\frac{2\delta}{q}-1} = P^{\delta-\frac{q}{2}}.$$

Comme application de ce qui précède, on voit que la forme générale de l'équation d'une courbe du troisième degré se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et lorsque l'origine est le pôle de reproduction, est

$$(3) \qquad (x^2+y^2)F_1(xy) + PF_2(xy) + PF_1(xy) = 0.$$

On voit encore que celle d'une courbe du quatrième, prise dans les mêmes conditions, est de l'une des deux formes

$$(4) \qquad (x^2+y^2)F_2(xy) + PF_3(xy) + PF_2(xy) = 0,$$

$$(5) \quad (x^2+y^2)^2 + P(x^2+y^2)F_1(xy) + P^2F_2(xy) + P^2F_1(xy) + P^2 = 0.$$

D'après ce que nous avons vu sur la transformation d'une courbe du second degré par rayons vecteurs réciproques, les courbes du troisième et du quatrième degré, représentées par les équations (3) et (5), sont les seules qui puissent provenir d'une courbe du second degré, et encore, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'elles admettent un point double réel. Il est facile de constater que cette condition est suffisante; en effet, si une courbe représentée par une des équations (3) ou (5) admet un point double réel, en y transportant l'origine des coordonnées sans changer leur direction, l'équation prend l'une des formes

$$(6)\qquad (x^2+y^2)F_1(xy)+\varphi_2(xy)=0,$$

$$(7)\qquad (x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)\varphi_1(xy)+\varphi_2(xy)=0.$$

Si nous transformons ces deux courbes par rayons vecteurs réciproques suivant la puissance k, et en prenant le pôle à l'origine, les équations des transformées seront

$$(8)\qquad \varphi_2(xy)+kF_1(xy)=0,$$

$$(9)\qquad \varphi_2(xy)+k\varphi_1(xy)+k^2=0,$$

ce qui démontre la proposition.

Il résulte de ce que nous avons vu, relativement à l'équation d'une courbe qui se reproduit par rayons vecteurs réciproques, que si cette équation est du degré $2n+k$, et que le pôle de reproduction soit du degré de multiplicité k, son équation en coordonnées rectangulaires, et en prenant l'origine au pôle de reproduction, est de la forme

$$(1)\left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2)^n F_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}F_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\quad+(x^2+y^2)F_{k+n-1}(xy)+F_{n+k}(xy)+\ldots+\alpha F_k(xy)=0.\end{aligned}\right.$$

Voyons comment elle se modifie quand on déplace l'origine des coordonnées en conservant leur direction.

Considérons la fonction

$$(2) \qquad (x^2+y^2)^q \psi_p(xy),$$

$\psi_p(xy)$ étant une fonction entière de x et de y et de degré p. Désignons du reste par $\varphi_p(xy)$ la fonction homogène de degré le plus élevé entrant dans $\psi_p(xy)$, on pourra mettre la fonction (2) sous la forme

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^q\psi_p(xy) = (x^2+y^2)^q\varphi_p(xy)\\ + (x^2+y^2)^{q-1}\left\{(x^2+y^2)[\psi_p(xy)-\varphi_p(xy)]\right\}.\end{aligned}$$

Or le produit

$$(x^2+y^2)(\psi_p xy - \varphi_p xy) = \psi_{p+1}(xy)$$

est généralement de degré $(p+1)$; si donc nous désignons par

$$\psi_p(xy), \quad \psi_{p+1}(xy), \ldots, \quad \psi_{p+k}(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont les degrés soient respectivement p, $p+1, \ldots, p+k$, et par

$$\varphi_p(xy), \quad \varphi_{p+1}(xy), \ldots, \quad \varphi_{p+k}(xy)$$

des fonctions homogènes respectivement de mêmes degrés, nous pourrons écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^q \psi_p(xy) &= (x^2+y^2)^q\varphi_p(xy)\\
&\quad + (x^2+y^2)^{q-1}\psi_{p+1}(xy),\\
(x^2+y^2)^{q-1}\psi_{p+1}(xy) &= (x^2+y^2)^{q-1}\varphi_{p+1}(xy)\\
&\quad + (x^2+y^2)^{q-2}\psi_{p+2}(xy),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(x^2+y^2)\psi_{p+q-1}(xy) &= (x^2+y^2)\varphi_{p+q-1}(xy) + \psi_{p+q}(xy)
\end{aligned}$$

ajoutant ces égalités, on en déduit

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2)^q\psi_p(xy)\\ &\quad = (x^2+y^2)^q\varphi_p(xy) + (x^2+y^2)^{q-1}\varphi_{p+1}(xy) + \ldots\\ &\qquad + (x^2+y^2)\varphi_{p+q-1}(xy) + \psi_{p+q}(xy).\end{aligned}\right.$$

Considérons actuellement la fonction

$$(x^2+y^2)^n F_k(xy),$$

changeons-y x en $(x+a)$ et y en $(y+b)$; elle deviendra, en représentant par

$$\chi_k(xy),\quad \chi_{k+1}(xy),\ldots,\quad \chi_{k+n}(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont le degré soit égal à l'indice,

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2)^n F_k(x+a, y+b)\\
&\quad=(x^2+y^2)^n\chi_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}\chi_{k+1}(xy)+\ldots\\
&\qquad+(x^2+y^2)\chi_{k+n-1}(xy)+\chi_{k+n}(xy);
\end{aligned}$$

mais chaque terme du second membre peut être transformé conformément à l'égalité (3), et en représentant par

$$f_k(xy),\quad f_k^1(xy),\ldots,\quad f_k^n(xy)$$

des fonctions homogènes distinctes de x et de y dont le degré commun soit k, et par

$$F_k(xy),\quad F_k^1(xy),\ldots\quad F_k^n(xy)$$

des fonctions entières de x et de y dont le degré soit aussi k, on pourra écrire

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2)^n\chi_k(xy)\\
&\quad=(x^2+y^2)^n f_k^1(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}^1(xy)+\ldots\\
&\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}^1(xy)+F_{k+n}^1(xy),\\
&(x^2+y^2)^{n-1}\chi_{k+1}(xy)\\
&\quad=(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}^2(xy)+\ldots\\
&\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}^2(xy)+F_{k+n}^2(xy),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(x^2+y^2)\chi_{k+n-1}(xy)=(x^2+y^2)f_{k+n-1}^n(xy)+F_{k+n}^n(xy),\\
&\qquad\qquad\chi_{k+n}(xy)=\chi_{k+n}(xy).
\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre, on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2)^n F_k(x+a,\ y+b)\\ &\quad=(x^2+y^2)^n f_k(xy)+(x^2+y^2)^{n+1}f_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}(xy)+F_{k+n}(xy).\end{aligned}\right.$$

Si actuellement nous reprenons la courbe représentée par l'équation (1), dont nous représenterons le premier membre par $\Phi(xy)$, et que nous la rapportions à deux nouveaux axes parallèles aux premiers, se coupant au point dont les coordonnées sont a, b, l'équation (1) deviendra, en transformant ses termes d'après l'égalité (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(x+a,\ y+b)\\ &\quad=(x^2+y^2)^n f_k(xy)+(x^2+y^2)^{n-1}f_{k+1}(xy)+\ldots\\ &\qquad+(x^2+y^2)f_{k+n-1}(xy)+F_{k+n}(xy)=0.\end{aligned}\right.$$

Toute courbe plane de degré $2n+k$ se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, et dont le pôle de reproduction est du degré de multiplicité k, a donc, en prenant pour origine un point quelconque de son plan, la forme de l'équation (5); $f_k(xy)$, $f_{k+1}(xy)$, ..., $f_{k+n-1}(xy)$ sont des fonctions homogènes dont le degré est égal à l'indice; $F_{k+n}(xy)$ est une fonction entière, non homogène de x et de y, et son degré ne surpasse pas $k+n$.

Théorème V. — *La perspective de l'intersection d'une sphère et d'un cône de degré n, sur un plan quelconque et en prenant pour point de vue le point de contact de la sphère avec un plan tangent parallèle au plan du tableau, est une courbe dont le degré ne surpasse pas $2n$, se reproduisant par rayons vecteurs réciproques.*

En effet, si nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle au point de vue, et une puissance telle que le plan du tableau devienne transformé de la sphère, comme la courbe sphérique se reproduit par rayons vecteurs réciproques, il en sera de même de sa transformée (théorème III); or cette transformée n'est autre chose que la perspective de la courbe sphérique sur le plan du tableau. En second lieu, la courbe sphérique, intersection de la sphère et d'un cône de degré n, sera du degré $2n$; le cône ayant pour sommet le point de vue et cette courbe pour directrice sera également du degré $2n$; donc il en sera de même de sa trace sur le plan du tableau, ce qu'on voulait démontrer.

Le degré du cône et celui de sa trace peuvent s'abaisser si le point de vue est un point simple ou multiple de la courbe sphérique.

Théorème VI. — *Toute courbe plane de degré $2n+k$, se reproduisant par rayons vecteurs réciproques, et dont le pôle de reproduction est du degré de multiplicité k (k pouvant être nul), peut être considérée comme la perspective de l'intersection d'une sphère et d'un cône de degré $n+k$, le point de vue étant sur la surface de la sphère.*

Rapportons la courbe à un système de trois axes rectangulaires en prenant l'origine au point de vue, et le plan des xy parallèle à celui de la courbe; les équations de la courbe seront, d'après ce que nous avons vu précédemment,

$$(1)\qquad z = v,$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2)^n f_k(xy) + (x^2+y^2)^{n-1} f_{k+1}(xy) + \ldots \\ \quad + (x^2+y^2) f_{k+n-1}(xy) + F_{k+n}(xy).\end{array}\right.$$

Transformons-la par rayons vecteurs réciproques, suivant la puissance P et en prenant le pôle à l'origine. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point transformé du point (x, y, z); on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{P}{x'^2+y'^2+z'^2};$$

en tirant de ces égalités les valeurs de x, y, z et les portant dans les équations (1) et (2), on aura celles de la transformée, et, en supprimant les accents, cette transformée sera représentée par

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{P} z}{x^2+y^2+z^2}=v,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathrm{P}^{2n+k}(x^2+y^2)^n}{(x^2+y^2+z^2)^{2n+k}} f_k(xy) \\ & + \frac{\mathrm{P}^{2n+k-1}(x^2+y^2)^{n-1}}{(x^2+y^2+z^2)^{2n+k-1}} f_{k+1}(xy) + \ldots \\ & + \frac{\mathrm{P}^{n+k+1}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{n+k+1}} f_{k+n-1}(xy) \\ & + \mathrm{F}_{k+n}\left(\frac{\mathrm{P}x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{\mathrm{P}y}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (3) représente la sphère transformée du plan de la courbe; l'équation (4), qui est la seconde des équations de la transformée, peut être remplacée par une combinaison d'elle-même et de l'équation (3). De l'équation (3) on tire

$$\frac{\mathrm{P}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{v}{z}, \quad x^2+y^2=z\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), elle devient, après réductions,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & v^{2n+k}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right)^n f_k(xy) \\ & + v^{2n+k-1}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right)^{n-1} f_{k+1}(xy) + \ldots \\ & + v^{n+k+1}\left(\frac{\mathrm{P}}{v}-z\right) f_{k+n-1}(xy) \\ & \qquad + z^{n+k}\mathrm{F}_{n+k}\left(\frac{vx}{z}\, \frac{vy}{z}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation est du degré $n+k$; prise avec l'équation (3), elle représente la transformée cherchée, qui est en conséquence du degré $2(n+k)$; mais, comme la courbe représentée par les équations (1) et (2) se reproduit par rayons vecteurs réciproques, il en sera de même de sa transformée; cette transformée sera donc située sur un cône ayant pour directrice une courbe du degré $2(n+k)$, et, comme chaque génératrice de ce cône rencontre sa directrice en deux points, son équation sera du degré $n+k$, ce qui démontre le théorème énoncé.

On déduit facilement des conditions que nous avons trouvées, pour qu'une courbe plane se reproduise par rayons vecteurs réciproques, le moyen de reconnaître si une courbe donnée par son équation jouit de cette propriété. On reconnaît aussi d'après ces conditions, et ce qui était facile à prévoir, que le système des tangentes en un des pôles de reproduction se confond avec le système des parallèles aux asymptotes menées par ce point.

Plusieurs des propositions que nous avons démontrées s'étendent aux figures de l'espace; nous n'en donnerons pas la démonstration, qui ne serait qu'une reproduction de ce qui précède.

EXPRESSION DE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION, EN FONCTION DES COEFFICIENTS;

Par M. PELLET,

Professeur au lycée d'Angers.

1. Soit

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

l'équation donnée. On sait qu'en désignant par a, b

$c, \ldots, k, l$ les m racines de cette équation, on a

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k} + \frac{1}{x-l}.$$

La fonction $\frac{1}{x-a}$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances négatives et décroissantes de x, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur au module de a; on trouve, par la division,

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots.$$

Donc, en remplaçant successivement a par chacune des autres racines, et ajoutant ensemble tous les résultats, on aura

$$\frac{X'}{X} = \frac{m}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots + \frac{s_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

s_n désignant la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de $X = 0$.

D'après cela, $\frac{X'}{X}$ est développable suivant les puissances entières, négatives et décroissantes de x, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur au plus grand des modules des racines de $X = 0$, et s_n est le coefficient de $\frac{1}{x^{n+1}}$ dans ce développement, ou de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $x^n \frac{X'}{X}$, suivant les puissances positives et négatives de x.

2. Désignons par $f(x)$ le polynôme

$$p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m$$

et par z une indéterminée. On a

$$\frac{X'}{X} = \frac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)}$$

pour z égal à -1.

On peut assigner un nombre positif tel que, pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur à ce nombre, le module de $f(x)$ soit plus petit que celui de x^m. Pour toutes ces valeurs de x, z ayant un module inférieur ou égal à 1, on aura

$$\frac{1}{x^m - zf(x)} = \frac{1}{x^m} + z\frac{f(x)}{x^{2m}} + \ldots + \frac{z^\mu}{x^m}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu + \ldots.$$

Multipliant les deux membres par $mx^{m-1} - zf'(x)$, on a dans le premier $\dfrac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)}$, et dans le second une série dans laquelle le coefficient de z^μ est égal à

$$\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu \frac{mx^{m-1}}{x^m} - \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^{\mu-1} \frac{f'(x)}{x^m} = -\frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu,$$

d'où

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^n \frac{mx^{m-1} - zf'(x)}{x^m - zf(x)} &= x^n \frac{mx^{m-1}}{x^m} - zx^n \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right] - \ldots \\ &\quad - \frac{z^\mu}{\mu} x^n \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu - \ldots, \end{aligned}\right.$$

et s_n est égale à la somme des coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les termes du second membre, lorsqu'on y remplace z par -1.

3. Ici nous ferons une remarque. On a

$$x^n \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu + \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left\{x^n\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu\right\};$$

$[f(x)]^\mu$ est une fonction entière de x; si l'on divise chaque terme par $x^{m\mu-n}$, on voit que $x^n\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu$ est de la forme

$$\begin{aligned}&A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_i x^i + \ldots\\ &+ \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B_i}{x^i} + \ldots,\end{aligned}$$

le nombre des termes dans chaque ligne étant limité, et les quantités A et B étant indépendantes de x. En prenant la dérivée, on a

$$\begin{aligned}&A_1 + 2A_2 x + \ldots + iA_i x^{i-1} + \ldots\\ &- \frac{B_1}{x^2} - \ldots - \frac{iB_i}{x^{i+1}} - \ldots\end{aligned}$$

et elle ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$. Il en résulte que les coefficients de $\frac{1}{x}$ sont égaux et de signes contraires dans les fonctions

$$x^n \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu \quad \text{et} \quad \left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu n x^{n-1}.$$

4. Cela posé, revenons à la formule (1). D'après ce qui vient d'être dit, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le second membre de cette formule est égal à celui de $\frac{1}{x}$ dans la série

$$x^n \frac{mx^{m-1}}{x^m} + z\frac{f(x)}{x^m} n x^{n-1} + \ldots + \frac{z^\mu}{\mu}\left[\frac{f(x)}{x^m}\right]^\mu n x^{n-1} + \ldots.$$

Donc, en remplaçant z par -1, on a

$$s_n = -A_1 + A_2 - A_3 + \ldots + (-1)^\mu A_\mu + \ldots,$$

où

$$A_\mu = \text{coeff. de } \frac{1}{x} \quad \text{dans} \quad n x^{n-1}\frac{(p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m)^\mu}{\mu . x^{m\mu}}.$$

Ce coefficient est celui de $x^{m\mu-n}$ dans

$$\frac{n}{\mu}(p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m)^{\mu},$$

qui est égal à

$$\frac{n}{\mu}\sum \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_m+1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2}\ldots p_m^{\lambda_m},$$

où $\Gamma(\mu+1)$ représente le produit $1.2.3\ldots\mu$. Le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières, nulles et positives des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ susceptibles de vérifier les conditions

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = \mu,$$

$$(m-1)\lambda_1 + (m-2)\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{m-2} + \lambda_{m-1} = m\mu - n.$$

Multipliant par m la première équation, et retranchant la seconde, on a

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + m\lambda_m = n,$$

qui peut remplacer l'une quelconque des précédentes.

On voit que A_μ est nul pour les valeurs de μ ne satisfaisant pas aux inégalités

$$n \geqq \mu \geqq \frac{n}{m}.$$

La formule à laquelle nous venons de parvenir a été donnée par Waring dans ses *Meditationes algebraicæ,* sans démonstration. La précédente nous paraît plus simple que celle exposée par M. Serret dans son *Algèbre supérieure,* p. 442.

5. Cette formule donne facilement la somme des puissances semblables lorsque l'exposant est négatif et entier. En effet, si dans $X = 0$ on change x en $\frac{1}{x}$, l'équation obtenue a pour racines les inverses de racines de l'équation primitive. Il en résulte que s_{-n} est donnée par la

formule précédente, en changeant respectivement

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\ldots,\quad p_{m-1},\quad p_m$$

en

$$\frac{p_{m-1}}{p_m},\quad \frac{p_{m-2}}{p_m},\ldots,\quad \frac{p_1}{p_m},\quad \frac{1}{p_m}.$$

6. Appliquons la formule à l'équation trinôme

$$x^m + px + q = 0.$$

On a

$$A_\mu = \text{coeff. de } x^{m\mu-n} \quad \text{dans} \quad \frac{n}{\mu}(px+q)^\mu,$$

ou

$$A_\mu = n\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{1.2\ldots(m\mu-n).1.2.3\ldots[n-(m-1)\mu]}p^{m\mu-n}q^{n-(m-1)\mu},$$

et

$$s_n = \Sigma(-1)^\mu A_\mu,$$

μ étant compris entre $\frac{n}{m}$ et $\frac{n}{m-1}$, de sorte que s_n a un nombre de termes égal au plus grand nombre entier compris dans

$$1 + \frac{n}{m(m-1)},\quad \text{si} \quad n \geqq m-1.$$

Si $m = 2$, il vient

$$A_\mu = n\frac{1.2\ldots(\mu-1)}{1.2\ldots(2\mu-n).1.2\ldots(n-\mu)}p^{2\mu-n}q^{n-\mu},$$

ou, en posant $n-\mu = \lambda$, d'où $\mu = n-\lambda$,

$$n\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}p^{n-2\lambda}q^\lambda;$$

et

$$s_n = (-1)^n\Sigma(-1)^\lambda n\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}p^{n-2\lambda}q^\lambda,$$

le nombre positif λ prenant successivement les valeurs o, 1, 2,... jusqu'au plus grand nombre entier compris dans $\frac{n}{2}$. De sorte que

$$s_n = (-1)^n \left[p^n - np^{n-2}q + \ldots + (-1)^\lambda \frac{n(n-\lambda-1)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda} p^{n-2\lambda} q^\lambda + \ldots \right].$$

SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,
Agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

Cette Note a pour but de donner des démonstrations analytiques fort simples de plusieurs théorèmes connus sur les sections coniques; ces démonstrations reposent sur l'emploi des coordonnées trilinéaires, mais on pourrait aussi se servir concurremment des coordonnées triponctuelles.

THÉORÈME I. — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six sommets sont situés sur une conique* (*).

En prenant, en effet, l'un des triangles pour triangle de référence, la conique a pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

et, en désignant par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax_1x_2x_3}{x} + \frac{a'y_1y_2y_3}{y} + \frac{a''z_1z_2z_3}{z} = 0;$$

(*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, Ire Partie, p. 140; PAINVIN, *Principes de Géométrie analytique*, p. 288.

car, si l'on exprime que le point P_1 est situé sur cette conique, on obtient la condition qui exprime que P_2 et P_3 sont conjugués par rapport à la conique donnée.

THÉORÈME II. — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant les mêmes axes que dans le théorème corrélatif précédent, et en désignant par

$$D_i = u_i x + v_i y + w_i z = 0$$

les équations des trois côtés du second triangle, la conique cherchée a pour équation

$$\sqrt{\frac{u_1 u_2 u_3 x}{a}} + \sqrt{\frac{v_1 v_2 v_3 y}{a'}} + \sqrt{\frac{w_1 w_2 w_3 z}{a''}} = 0;$$

car, en exprimant que la droite D_1, par exemple, est tangente à cette conique, on obtient la condition qui exprime que D_2 et D_3 sont conjuguées par rapport à la conique donnée.

THÉORÈME III. — *Quand deux triangles ont leurs six sommets situés sur une conique, ces points forment deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une même conique.*

En prenant l'un des triangles pour triangle de référence, la conique donnée a pour équation

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0,$$

et en désignant par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{b x^2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{b' y^2}{y_1 y_2 y_3} + \frac{b'' z^2}{z_1 z_2 z_3} = 0;$$

car, si l'on exprime que les deux points P_2 et P_3 sont conjugués par rapport à cette conique, on retrouve la condition qui exprime que le point P_1 est situé sur la conique donnée.

THÉORÈME IV. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs côtés forment deux systèmes de trois droites conjuguées par rapport à une même conique.*

En prenant pour axes les trois côtés du premier triangle, en désignant par D_i, comme précédemment, les équations des trois côtés du second, et par

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$$

l'équation de la conique donnée, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax^2}{u_1 u_2 u_3} + \frac{by^2}{v_1 v_2 v_3} + \frac{cz^2}{w_1 w_2 w_3} = 0.$$

Ces deux théorèmes sont les deux réciproques des deux précédents.

THÉORÈME V. — *Quand deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0$$

l'équation de la conique donnée et par $P_i(x_i, y_i, z_i)$ les trois sommets du second, la droite $P_1 P_2$ a pour équation

$$\frac{bx}{x_1 x_2} + \frac{b'y}{y_1 y_2} + \frac{b''z}{z_1 z_2} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que cette droite passe par le point

P_1, on retrouve la condition qui exprime que P_2 est situé sur la conique donnée. La droite P_1P_2 représente une tangente de la conique cherchée qui a pour équation

$$b\sqrt{\frac{x}{x_1x_2x_3}}+b'\sqrt{\frac{y}{y_1y_2y_3}}+b''\sqrt{\frac{z}{z_1z_2z_3}}=0,$$

puisque la condition de contact exprime que le point P_3 est situé sur la conique donnée.

THÉORÈME VI. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une conique* (*).

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\sqrt{bx}+\sqrt{b'y}+\sqrt{b''z}=0$$

l'équation de la conique donnée, et par $D_i(u_i, v_i, w_i)$ les trois côtés du second, le point d'intersection de D_1 et D_2 a ses coordonnées proportionnelles à

$$\frac{b}{u_1u_2},\quad \frac{b'}{v_1v_2},\quad \frac{b''}{w_1w_2},$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur la droite D_1, on retrouve la condition qui exprime que D_2 est tangente à la conique donnée. Le point d'intersection des droites D_1 et D_2 est situé sur la conique cherchée

$$\frac{b^2}{u_1u_2u_3x}+\frac{b'^2}{v_1v_2v_3y}+\frac{b''^2}{w_1w_2w_3z}=0,$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur cette conique, on retrouve la condition de contact de la droite D_3 à la conique donnée.

THÉORÈME VII. — *Si des trois sommets d'un triangle on mène des tangentes à une conique quelconque, leurs*

(*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 53.

points d'intersection avec les côtés opposés sont six points situés sur une conique (*).

En prenant le triangle donné pour triangle de référence et en désignant par

$$S = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de cette conique, les tangentes menées du sommet opposé à l'axe des x ont pour équation

$$aS - (ax + b''y + b'z)^2 = 0,$$

ou, en développant et en désignant par A et B les expressions connues $a'a'' - b^2$ et $b'b'' - ab$ et par A', B', A'', B'' les expressions analogues,

$$A''y^2 + A'z^2 - 2Byz = 0.$$

En multipliant par A, on voit immédiatement, à cause de la symétrie, que la conique cherchée a pour équation

$$A'A''x^2 + A''Ay^2 + AA'z^2 - 2ABy z - 2A'B'zx - 2A''B''xy = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire les différents cas particuliers, et de démontrer les théorèmes corrélatifs.

REMARQUE SUR LA QUESTION 1129, RÉSOLUE PAGE 83;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le rapport de la hauteur du triangle cherché à l'hypoténuse est $\frac{4}{9}$, ce qui donne un moyen fort simple de construire ce triangle par homothétie.

(*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 62.

PROBLÈME.

Trouver la plus petite corde d'une ellipse, qui soit normale à l'une de ses extrémités;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Reims.

Ce problème a été traité par M. Ossian Bonnet (*Nouvelles Annales*, t. II, 1re série, p. 421) et par M. Desbove (*Questions d'Algèbre*, p. 376). Voici une solution qui n'exige aucun artifice de calcul.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y = mx + n$$

les équations d'une ellipse et d'une sécante. En désignant par l la longueur de la corde déterminée par cette droite, on a

$$l^2 = (x' - x'')^2(1 + m^2),$$

x' et x'' étant les abscisses des extrémités de la corde. L'équation qui donne x' et x'' étant de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$l^2 = (p^2 - 4q)(1 + m^2).$$

En remplaçant p et q par leurs valeurs, on trouve

$$l^2 = 4a^2 b^2 \frac{(a^2 m^2 + b^2 - n^2)(1 + m^2)}{(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Si maintenant on remplace n^2 par $\frac{c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2}$, la corde sera normale, et sa longueur sera donnée par l'équation

$$l^2 = 4a^4 b^4 \frac{(1 + m^2)^3}{(a^2 + b^2 m^2)(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Il suffit, pour étudier les variations de l^2, de faire croître m^2 de o à $+\infty$. En posant $m^2 = z$, il suffit de considérer la fonction

$$u = (1+z)^3 (a^2 + b^2 z)^{-1} (a^2 z + b^2)^{-2},$$

dont la dérivée est, toutes réductions faites,

$$u' = \frac{c^2(1+z)^2}{(a^2+b^2z)^2(a^2z+b^2)^3}[(a^2-2b^2)z-(2a^2-b^2)].$$

On a donc deux cas à distinguer :

1° $\qquad a^2 - 2b^2 \leqq 0 \quad \text{ou} \quad a \leqq b\sqrt{2}.$

La valeur de z étant toujours positive, on a constamment $u' < 0$; donc la corde normale va en décroissant depuis $2a$ jusqu'à $2b$;

2° $\qquad a > b\sqrt{2}.$

La dérivée u' s'annule pour $z = \dfrac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}$ (valeur admissible puisqu'elle est positive), et en s'annulant passe du négatif au positif. Donc, le point de contact se mouvant sur l'ellipse, du sommet A au sommet B, la corde normale part de la valeur $2a$, arrive à une valeur minima égale à $3\sqrt{3}\dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ et croît de nouveau jusqu'à $2b$.

SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE DU CENTRE D'UNE SECTION PLANE FAITE DANS UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. SALTEL, à Fontenay-le-Comte.

Toute bonne méthode doit être directe et symétrique. Ce privilége fait défaut, ce nous semble, à la méthode enseignée dans les ouvrages pour déterminer analytiquement le centre d'une section plane, faite dans une surface du second ordre. La suivante, que nous proposons, nous paraît, au contraire, présenter ce double avantage.

Soit la section représentée par les équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$Ax + By + Cz + \lambda = 0.$$

Toute droite, passant par l'origine et parallèle au plan

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0,$$

est représentée par les équations

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z = 0,$$

A', B', C' étant arbitraires, ou bien par

$$\frac{x}{BC' - CB'} = \frac{y}{CA' - AC'} = \frac{z}{AB' - BA'}.$$

Cela posé, si (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées du centre de la section, on a

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \lambda = 0;$$

en outre, toute droite

$$\frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'} = \rho,$$

contenue dans le plan de section et passant par le centre, est divisée en deux parties égales en ce point; donc l'équation en ρ, obtenue en substituant dans l'équation de la surface, à la place de x, y, z, les valeurs

$$x = x_0 + \rho(BC' - CB'),$$
$$y = y_0 + \rho(CA' - AC'),$$
$$z = z_0 + \rho(AB' - BA'),$$

devra avoir deux racines égales et de signes contraires; or le coefficient du terme du premier degré de cette équation est

$$[(BC' - CB')f'x_0 + (CA' - AC')f'y_0 + (AB' - BA')f'z_0)];$$

par conséquent on doit avoir

$$(BC' - CB')f'x_0 + (CA' - AC')f'y_0 + (AB' - BA')f'z_0 = 0;$$

mais comme cette relation a lieu, quels que soient A', B', C', on en conclura les égalités

$$\begin{aligned} Cf'y_0 - Bf'z_0 &= 0,\\ Cf'x_0 - Af'z_0 &= 0,\\ Bf'x_0 - Af'y_0 &= 0, \end{aligned}$$

qui se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{f'x_0}{A} = \frac{f'y_0}{B} = \frac{f'z_0}{C}.$$

Ces égalités, jointes à l'équation du plan, déterminent les coordonnées du centre en question.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

Proposées par M. Casimir REY,
Professeur à l'École du Génie, à Arras.

Soient deux cylindres de révolution de rayon r dont les axes se rencontrent, et soit a la portion d'axe de l'un des cylindres interceptée par l'autre cylindre. On demande de prouver par la Géométrie élémentaire que :

1° Le volume commun aux deux cylindres a pour mesure

$$(1) \qquad \frac{8}{3}ar^2;$$

2° La surface de ce volume a pour mesure

$$8ar; \tag{2}$$

3° Deux plans parallèles aux axes interceptent une zone qui a pour mesure

$$4ah.$$

Remarque I. — Quand les axes sont perpendiculaires, les formules (1) et (2) prennent les valeurs remarquables

$$\frac{2a^3}{3} \quad \text{et} \quad 4a^2.$$

Remarque II. — Ces formules servent à mesurer les voussoirs et les douelles des voûtes en plein cintre et en arc de cloître, droites ou biaises ; elles se trouvent dans quelques Traités de la coupe des pierres, sans démonstration, ou démontrées par l'Analyse.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES ;

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

1. Connaissant le mode de décomposition en facteurs premiers de l'entier n, trouver le nombre des racines de la congruence

$$x^2 \equiv 1 \pmod{n}.$$

2. P désignant le produit de tous les entiers inférieurs à un nombre n et premiers avec lui, indiquer quels sont les cas où n divise $P + 1$.

3. Soient $a, b, \ldots, k$ les différents facteurs premiers qui entrent dans la composition de l'entier n, et m le plus petit commun multiple des nombres $\frac{n}{2ab\ldots k}$,

$a-1$, $b-1$, ..., $k-1$; montrer que tout nombre premier avec n satisfait à la congruence

$$x^m \equiv 1 \pmod{n}.$$

4. n étant un entier positif quelconque, démontrer l'égalité

$$1.2.3\ldots n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} (n-k+1)^n.$$

5. Quels que soient les entiers positifs m, n, p, on a

$$0 = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$
$$\times (m+kp)(m+kp-1)\ldots(m+kp-n+2).$$

6. On tire successivement des boules d'une urne qui en contient m, toutes différentes, et avant chaque tirage on remet dans l'urne la boule qui en a été extraite au tirage précédent. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité d'amener p fois de suite la même boule avant que pas une de q boules désignées à l'avance ne soit sortie?

En faisant, dans la formule trouvée, $m = 13$, $p = 4$, $q = 2$, on aura la chance du coup appelé *lansquenet* au jeu qui porte ce nom, en supposant que l'on se serve d'un nombre infini de jeux de cartes. Cette chance est $\frac{11}{4771} = 0{,}0023$ environ.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR LE P. PEPIN.

1. *Théorème*. — Si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, l'un des deux produits

$ab(a^2-b^2)$, $(a^2-2b^2)(a^2-4b^2)$ est toujours divisible par 7, savoir : le premier, si la somme a^2+b^2 est de l'une des formes $7l$, $7l+1$, $7l+2$, $7l+4$, et le second, si cette somme est de l'une des formes $7l+3$, $7l+5$, $7l+6$.

2. *Théorème.* — Soient a et b deux nombres entiers quelconques : l'un des deux produits

$$ab(a^2-3b^2)(a^2-4b^2) \quad \text{ou} \quad (a^2-b^2)(a^2-5b^2)(a^2-9b^2)$$

est toujours divisible par 11, savoir : le premier, si la somme a^2+b^2 est de l'une des formes

$$11l+(0, 1, 3, 4, 5, 9),$$

et le second, si cette somme est de l'une des formes

$$11l+(2, 6, 7, 8, 10).$$

3. *Théorème.* — Soient a, b, c,... des facteurs premiers inégaux, $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ et $\varphi(n)$ la fonction numérique qui exprime combien dans la suite $1, 2, 3, \ldots, n$ il y a de nombres premiers relativement à n. Cette fonction $\varphi(n)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :

$$m = \varphi(m) + \sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right) + \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta}\right)$$
$$+ \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma}\right) + \ldots + \alpha^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1} \ \ldots$$

Soit, par exemple, $m = 3^2 5^2$, on a

$$3^2 5^2 = 225 = \varphi(225) + 5\varphi(9) + 3\varphi(25) + 15.$$

Legendre a démontré qu'aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube. On peut énoncer le théorème suivant plus général :

« Aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube multiplié par une puissance entière quelconque d'un nombre premier de l'une des deux formes $18m+5$, $18m+11$, ni par un cube multiplié par une puissance de 2, ou par le double d'un nombre premier $18m+11$, ou encore par le double du carré d'un nombre premier $18m+5$. »

BIBLIOGRAPHIE.

L. Saltel. — *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique.* (Paris, Gauthier-Villars. Prix : 3 fr.)

Dans les exercices ou recherches qui concernent les matières enseignées dans les Cours de Mathématiques spéciales, on a continuellement besoin de déterminer l'ordre d'un lieu géométrique. Cette simple remarque montre toute l'utilité que les élèves et professeurs pourront retirer du travail de M. Saltel.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1155

(voir 2e série, t. XIV, p. 48);

Par M. LAURANS,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon (classe de M. Ribout).

On donne la parabole semi-cubique

$$x^3 - 3ay^2 = 0. \tag{1}$$

D'un point quelconque P *du plan on peut mener trois tangentes à la courbe* (1). *Désignons par* (C) *le cercle qui passe par les trois points de contact; chercher :*

1° *Le lieu des points* P *pour lesquels le cercle* C *a un rayon constant;*

2° *Le lieu des points* P *pour lesquels le centre du cercle* C *est constamment sur la courbe* (1);

3° *Le lieu des points* P *pour lesquels le cercle* C *touche la courbe* (1).

Soient α, β les coordonnées du point P; les points de contact des tangentes, menées du point (α, β) à la courbe, sont déterminées par l'équation (1), jointe à l'équation de la courbe polaire du point P, par rapport à la parabole (1), c'est-à-dire

$$(2) \qquad \alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2 = 0.$$

En éliminant y entre ces deux équations, on trouve une équation du cinquième degré en x, qui, suppression faite des racines $x^2 = 0$, provenant de ce que l'origine est un point double de la courbe, s'écrit

$$(3) \qquad x^3 - 6\alpha x^2 + 9\alpha^2 x - 12a\beta^2 = 0 \text{ (*)}.$$

Or, les coordonnées des trois points de contact satisfaisant à l'équation $x^3 - 3ay^2 = 0$, si dans l'équation (3) on remplace x^3 par $3ay^2$, on aura l'équation d'une courbe passant par ces trois points de contact; cette équation est, en divisant par 3,

$$(4) \qquad ay^2 - 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 4a\beta^2 = 0.$$

Les équations (2) et (4) représentent deux coniques, passant par les trois points de contact. Ces coniques ont leurs axes parallèles, puisque, dans chacune d'elles, les

(*) En supposant $a > 0$, pour qu'il soit possible de mener par le point P trois tangentes réelles à la parabole (1), il faut que l'équation (3) ait ses trois racines réelles et positives : ce qui exige qu'on ait $\alpha^3 - 3a\beta^2 > 0$.

(G.)

axes sont parallèles aux axes des coordonnées. On peut donc faire passer un cercle par leurs points d'intersection, et ce cercle sera précisément le cercle C, qui passe par les trois points de contact.

Il s'ensuit qu'on obtiendra l'équation de C en déterminant λ par la condition que l'équation

$$ay^2 - 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - 4a\beta^2 + \lambda(\alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2) = 0,$$

représente un cercle, ce qui donne

$$a - \lambda a = -2\alpha + \lambda\alpha, \quad \lambda = \frac{a + 2\alpha}{a + \alpha},$$

d'où l'on déduit, pour l'équation du cercle C,

$$(5) \quad x^2 + y^2 - \frac{3\alpha}{a}(a+\alpha)x + \frac{2\beta}{\alpha}(a + 2\alpha)y + \frac{4\beta^2}{\alpha}(a+\alpha) = 0.$$

Cherchons maintenant les équations des divers lieux géométriques demandés :

1° *Lieu des points pour lesquels le cercle* (C) *a un rayon constant.*

Le carré du rayon de ce cercle ayant pour expression

$$R^2 = \frac{9\alpha^2}{4a^2}(a + \alpha)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}(a + 2\alpha)^2 - \frac{4\beta^2}{\alpha}(a + \alpha),$$

cette équation, entre α et β, est celle du lieu, en rempla çant α et β par x et y, et, résolvant par rapport à y^2, on obtient

$$(6) \qquad y^2 = \frac{x^2[4a^2R^2 - 9x^2(a+x)^2]}{4a^4},$$

équation du sixième degré. On voit immédiatement que les directions asymptotiques de la courbe, représentée par l'équation (6), sont imaginaires; cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, comme on devait s'y attendre. Sa forme dépendra des valeurs relatives de R et de a (*).

2° *Lieu des points pour lesquels le cercle* C *a son centre sur la courbe* (1).

Les coordonnées du centre de C étant

$$X = \frac{3\alpha}{2a}(a+\alpha), \quad Y = -\frac{\beta}{\alpha}(a+2\alpha),$$

écrivons que ces coordonnées vérifient l'équation (1), nous aurons ainsi

$$\frac{27\alpha^3}{8a^3}(a+\alpha)^3 - 3a\frac{\beta^2}{\alpha^2}(a+2\alpha)^2 = 0,$$

ou

$$y^2 = \frac{9x^5(a+x)^3}{8a^4(a+2x)^2};$$

telle est l'équation du lieu. La courbe qu'elle représente est symétrique par rapport à l'axe des x. Pour toute valeur positive de x, l'ordonnée y a deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Pour des valeurs négatives de x, on doit avoir $x < -a$; de sorte que si l'on prend sur l'axe des x, à partir de l'origine O, dans le sens des x négatifs, une distance $OA = a$, et qu'on mène AA′ parallèle à OY, entre OY et AA′, il n'y aura aucun point de la courbe. L'origine et A sont deux points de rebroussement, la tangente de rebroussement est l'axe des x; les directions asymptotiques se confondent avec l'axe des y.

Note. — M. Laurans n'a pas traité le cas où le cercle C doit être tangent à la parabole (1).

(*) Dans une discussion assez étendue de l'équation (6), M. Laurans a distingué les trois cas $R < \frac{3a}{8}$, $R = \frac{3a}{8}$, $R > \frac{3a}{8}$, et montré quelle est dans chacun d'eux la forme de la courbe. Nous regrettons de devoir, faute d'espace, laisser au lecteur à faire cette discussion.

Question 1155

(voir 2e série, t. XIV, p. 48);

PAR M. MORET-BLANC.

1. Les coordonnées des points de contact des tangentes menées du point P (X, Y) à la courbe

$$(1)\qquad x^3 - 3ay^2 = 0$$

doivent satisfaire à la condition

$$(2)\qquad Xx^2 - 2aYy - ay^2 = 0;$$

d'où, en éliminant y,

$$(3)\qquad x^3 - 6Xx^2 + 9X^2x - 12aY^2 = 0,$$

équation qui détermine les abscisses des trois points de contact.

Soit

$$(4)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle (C), en la combinant avec les équations (1) et (2) pour éliminer y^2, on a

$$y = \frac{x^3 + 3ax^2 - 6a\alpha x + 3a(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{6a\beta},$$

et

$$y = \frac{(X+a)x^2 - 2a\alpha x + a(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{2a(Y+\beta)},$$

d'où

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(Y+\beta)x^3 - 3(\beta X - aY)x^2 - 6a\alpha Y x \\ &\qquad\qquad + 3aY(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (3) et (5) devant avoir les mêmes racines, il faut qu'on ait

$$(6)\qquad \frac{Y+\beta}{1} = \frac{\beta X - aY}{2X} = -\frac{2a\alpha Y}{3X^2} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 - R^2}{4Y}.$$

1° Des deux premières équations (6) on tire

$$\beta = -\frac{(2X+a)Y}{X}, \quad \alpha = \frac{3X(X+a)}{2a};$$

ces valeurs, substituées dans la troisième, donnent

$$(7) \qquad 9X^4(X+a)^2 - 4a^2R^2X^2 + 4a^4Y^2 = 0,$$

équation du lieu des points P, *pour lesquels le rayon du cercle* (C) *est constant et égal à* R.

2° Si l'on reporte ces valeurs de α et β dans l'équation (1), on obtient

$$(8) \qquad 9X^5(X+a)^3 - 8a^4(2X+a)^2Y^2 = 0,$$

équation du lieu des points P, *pour lesquels le centre du cercle* (C) *est sur la courbe* (1).

3° Le cercle (C) coupe la courbe (1) en six points (*), dont les abscisses sont déterminées par l'équation

$$(9)\left\{\begin{aligned} & x^6 + 6ax^5 + (9a^2 - 12a\alpha)x^4 \\ & \quad + 6a(\alpha^2 - \beta^2 - 6a\alpha - R^2)x^3 \\ & \quad + 18a^2(3\alpha^2 + \beta^2 - R^2)x^2 - 36a^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)x \\ & \qquad\qquad + 9a^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation admet les trois racines de l'équation (3); son premier membre est divisible par celui de l'équation (3), et le quotient

$$(10) \quad x^3 + 6(X+a)x^2 + 9(X+a)^2x - \frac{12.a(X+a)^2Y^2}{X^2} = 0$$

donnera les trois autres racines.

Pour que le cercle (C) touche la courbe (1), il faut que l'une des équations (3) et (10) ait des racines égales, ou qu'elles aient une racine commune.

(*) Parmi ces six points, il y en a au plus quatre qui soient réels. (G.)

La première condition donne $X^3 - 3aY^2 = 0$, en supprimant la solution $Y = 0$ qui donne bien pour x deux valeurs égales, mais non deux points coïncidents.

Le lieu est la courbe proposée (1), ce qu'il était facile de prévoir.

La seconde condition donne

$$(11) \qquad X^2(X + a) + 3aY^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (X + a) = 0.$$

En éliminant x entre les équations (3) et (10), on obtient la troisième condition

$$(12) \quad 9X^3(x + a)(2X + a)^2 - 2a^4Y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad 2X + a = 0 \ (^*).$$

Les équations (1), (11) et (12) représentent les *lieux des points* P *pour lesquels le cercle* (C) *est tangent à la courbe* (1) (**).

2. En appliquant la même méthode à la courbe

$$(1) \qquad x^3 - 3ay = 0,$$

on obtient successivement

$$(2) \qquad Xx^2 - aY - 2ay = 0,$$

$$(3) \qquad 2x^3 - 3Xx^2 + 3aY = 0,$$

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0,$$

et par l'élimination de y entre (1) et (4)

$$(5) \quad x^6 - 6a\beta x^3 + 9a^2x^2 - 18a^2\alpha x + 9a^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$$

(*) Lorsque $2X + a = 0$, les équations (3) et (10) ont les mêmes racines. Le premier membre de l'équation (9) est le carré du premier membre de l'équation (3); il en résulte que l'équation (9) a trois racines *doubles;* deux de ces racines sont imaginaires, la troisième est réelle. (G.)

(**) C'est-à-dire *pour lesquels* l'équation (9) a des racines égales; resterait à considérer les valeurs correspondantes de l'ordonnée y, particulièrement dans le cas où l'on suppose $2X + a = 0$. (G.)

dont le premier membre doit être divisible par celui de l'équation (3), ce qui donne les conditions

$$(6)\quad \begin{cases} 9X^4 - 8aXY + 16a^2 - 16a\beta X = 0, \\ 16a\alpha + 3X^2Y = 0, \\ 16a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \beta Y - R^2) - 9aX^3Y + 4a^2Y^2 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$\alpha = -\frac{3X^2Y}{16a}, \quad \beta = \frac{9X^4 - 8aXY + 16a^2}{16aX}$$

et

$$(7)\ 9X^4(X^2Y^2 - 16aXY + 9X^4 + 32a^2) - 256(R^2X^2 - a^2) = 0,$$

équation du *lieu des points* P *pour lesquels le cercle* (C) *a un rayon constant.*

En substituant les valeurs de α et β dans $\alpha^3 - 3a\beta = 0$, on a

$$(8)\qquad 256a^3(9X^4 - 8aXY + 16a^2) - 9X^7Y^7 = 0,$$

équation du lieu des points P *pour lesquels le centre du cercle* (C) *est sur la courbe* (1).

En égalant à zéro le quotient de (5) par (3), on trouve

$$(10)\qquad 4Xx^3 + 6X^2x^2 + 9X^3x + 6aXY - 24a^2 = 0.$$

La condition pour que l'équation (3) ait deux racines égales est $X^3 - 3aY = 0$, ou $Y = 0$; cette dernière solution est admissible, car l'origine est un point d'inflexion, et l'axe des X est une tangente double.

La condition pour que l'équation (10) ait des racines égales est

$$(X^4 - 4aXY + 16a^2)(11X^4 - 12aXY + 48a^2) + 16X^8 = 0.$$

En éliminant x entre les équations (3) et (10), on obtient la condition pour qu'elles aient une racine commune

$$72aX^4(XY-6a)^2-(27X^4+16aXY-32a^2)$$
$$(8aX^2Y^2+9X^5Y-32a^2XY+32a^3)=0.$$

Les deux dernières équations, avec $X^3-3aY=0$, $Y=0$, représentent le lieu du point P pour lequel le cercle (C) touche la courbe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Pierre Mondat, professeur au collége d'Annecy; B. Launoy; Gambey.

Question 1165

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 192);

PAR M. H. LEMELLE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

La différence des carrés des distances de deux points de l'axe d'une parabole, également distants du foyer, à une tangente quelconque est constante.

(H. BROCARD.)

Soient M et M′ deux points de l'axe d'une parabole, pris à la même distance (a) du foyer F; CD une tangente quelconque, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe de la courbe; MN, M′N′, FF′ les perpendiculaires abaissées des points M, M′, F sur la tangente; on a

$$FF' = \frac{M'N' + MN}{2};$$

et si l'on mène la droite MR parallèle à CD, et rencontrant M′N′ en un point R, on aura

$$RM' = M'N' - MN.$$

Or le point F′ est sur la tangente AF′ menée au sommet A de la parabole; il en résulte que

$$FF' = \frac{p}{2\sin\alpha};\quad \text{d'où}\quad M'N' + MN = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

D'autre part

$$\text{RM}' \quad \text{ou} \quad \text{M}'\text{N}' - \text{MN} = \text{MM}' \sin\alpha = 2a \sin\alpha;$$

donc

$$(\text{M}'\text{N}' + \text{MN})(\text{M}'\text{N}' - \text{MN}) = (\text{M}'\text{N}'^2 - \text{MN}^2) = 2ap = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Henri Jacob, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon; Gambey; Launoy; Moreau; Lez; Chadu; S. F., de Cherbourg; B. V. Střastny et Y. Sěbesta, élèves à l'École Polytechnique bohême, à Prague; A. Michel; H. Garreta; Louis Goulin, élèves du Lycée de Rouen; Scordeur, maître auxiliaire au Lycée de Lille; A. Tourrettes; Vladimir Habbe, à Odessa; Vandaine, de l'École Sainte-Geneviève.

Question 1166

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 192);

PAR M. C. CHADU.

Trouver à l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC *un point* O *tel, que les angles* OAB, OBC, OCA *soient égaux.* (H. Brocard.)

On voit immédiatement que ce point se trouve à l'intersection de trois segments capables des suppléments des angles C, A, B, et décrits sur les côtés a, b, c.

En décrivant sur les côtés a, b, c des segments capables des suppléments des angles B, C, A, on trouverait un second point O′ pour lequel on aurait

$$\widehat{\text{O}'\text{AC}} = \widehat{\text{O}'\text{CB}} = \widehat{\text{O}'\text{BA}}.$$

Considérons le point O, désignons par α la valeur commune des angles OAB, OBC, OCA, et calculons $\tan\alpha$.

Les triangles AOB, AOC donnent respectivement

$$\frac{\text{OA}}{\sin(\text{B} - \alpha)} = \frac{c}{\sin \text{B}}, \quad \frac{\text{OA}}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin \text{A}};$$

par suite

$$b \sin\alpha \sin B = c \sin A \sin(B - \alpha),$$
$$\tang\alpha(b \sin B + c \sin A \cos B) = c \sin A \sin B.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $2a$, et remplaçons les produits

$$a \sin B, \quad ac \sin B, \quad 2ac \cos B$$

par leurs valeurs respectives

$$b \sin A, \quad 2S, \quad a^2 + c^2 - b^2.$$

Nous aurons, en divisant de part et d'autre par $\sin A$,

$$\tang\alpha(a^2 + b^2 + c^2) = 4S.$$

En tenant compte de la relation

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$
$$\sin\alpha = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \frac{2S}{m},$$

en posant

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = m^2.$$

Nous aurons donc

$$OA = \frac{b^2c}{m}, \quad OB = \frac{c^2a}{m}, \quad OC = \frac{a^2b}{m}.$$

D'où l'on déduit les deux formules suivantes :

$$\frac{\overline{OA}^2}{b^2} + \frac{\overline{OB}^2}{c^2} + \frac{\overline{OC}^2}{a^2} = 1,$$
$$\frac{\text{tr.}(AOB)}{b^2c^2} = \frac{\text{tr.}(BOC)}{c^2a^2} = \frac{\text{tr.}(COA)}{a^2b^2} = \frac{S}{m^2}.$$

On trouverait des formules analogues pour le point O', par exemple,

$$O'A = \frac{bc^2}{m}, \quad O'B = \frac{ca^2}{m}, \quad O'C = \frac{ab^2}{m},$$

par suite

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{b}{c}, \quad \frac{OB}{O'B} = \frac{c}{a}, \quad \frac{OC}{O'C} = \frac{a}{b},$$

et

$$OA.OB.OC = O'A.O'B.O'C.$$

Note. — Solutions de MM. Morel; Lez; Étienne Gatti, étudiant à l'Université de Turin; Moreau; F. S., de Cherbourg; Gambey; S. Kober, élève à l'École Polytechnique bohème, à Prague; Jacob, élève du Lycée de Dijon; Tourrettes; Launoy; H. Garreta et Louis Goulin, élèves du Lycée de Rouen; Vasselin, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée du Havre; Vladimir Habbe, à Odessa; L.-P. de Cuerne, à Liége; L. Michel; Vandaine, de l'École Sainte-Geneviève.

QUESTIONS.

1173. Lorsque les médianes d'un triangle inscrit dans une ellipse se coupent au centre de la courbe, le lieu du point de concours des hauteurs de ce triangle est une ellipse tangente à la développée. (Poujade.)

1174. Trouver, dans l'intérieur d'un triangle ABC, un point O qui soit tel que, si de ce point on abaisse des perpendiculaires OA', OB', OC', sur les côtés BC, AC, AB de ce triangle, l'aire du triangle A'B'C' soit un maximum.

(Harkema.)

1175. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^y = y^x + 1.$$

1176. Trouver les points de l'espace tels, qu'une conique donnée se projette suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné sur le plan de la conique. (Pellet.)

1177. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = y^2.$$

(H. Brocard.)

SIMPLES REMARQUES SUR LES RACINES ENTIÈRES DES ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

dans laquelle P et Q sont des coefficients entiers, soit fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} R &= 2P^3 + Q^2, \\ S &= 4P^3 + 27Q^2, \\ T &= 50P^3 - 27Q^2. \end{aligned}$$

Cela posé, les observations suivantes peuvent fournir sur la nature des racines, en tant que commensurables ou incommensurables, des indications utiles.

1. On sait que, dans le cas où les trois racines de la proposée sont entières, la quantité $-S$ est égale à un carré.

On peut ajouter (4) que, dans le même cas, les quantités $-R$ et $-T$ sont égales, chacune, à une somme de deux carrés.

D'après cela et un théorème connu, les racines étant entières, tout nombre qui divise l'une quelconque des quantités $-R$, $-T$, après qu'elle a été débarrassée des facteurs carrés qu'elle peut contenir, est une somme de deux carrés premiers entre eux; d'où il suit que, s'il arrivait, par exemple, que l'une de ces quantités $-R$, $-T$, ainsi dégagée, fût divisible par 3 ou par tout autre nombre $4z+3$, qui n'est pas la somme de deux carrés, par cela seul il y aurait lieu de conclure que la proposée n'a pas trois racines entières.

2. Le nombre entier a, pris parmi les diviseurs de Q, ne peut être une racine de la proposée, si $3a^2+P$ et $3a^2+4P$ ne sont pas diviseurs de S, et si a^2+2P et $-3a^2+2P$ ne sont pas diviseurs, respectivement, de R et de T. C'est ce qui ressort facilement des relations qui vont suivre, par lesquelles est exprimée la composition des quantités S, R, T.

3. Pour que la proposée ait toutes ses racines entières, il est nécessaire que, S étant le produit de trois facteurs tels que

$$3a^2+P, \quad 3b^2+P, \quad 3c^2+P,$$

il soit en même temps le produit des trois facteurs

$$3a^2+4P, \quad 3b^2+4P, \quad 3c^2+4P,$$

et que Q^2 soit le produit des trois facteurs

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2.$$

Alors les entiers a, b, c, pris avec des signes convenables, seront les racines dont il s'agit.

En effet les conditions posées conduisent immédiatement à une équation renfermant la proposée, et ayant pour racines les nombres a, b, c, pris avec les deux signes.

On voit donc que, en ce cas, la quantité

$$S=3(3Q)^2+P(2P)^2,$$

ainsi que chacun des facteurs appartenant soit à la première, soit à la deuxième décomposition, est renfermée dans la formule

$$3z^2+Py^2,$$

où il faut observer que P est négatif. On sait d'ailleurs que chaque facteur $3a^2+4P$ de la deuxième décomposition est égal à un carré pris avec le signe négatif (ce qui fait qu'il en est de même pour le produit S).

4. Les conditions ci-dessus, que nous avons tirées de la décomposition de S et de Q^2 en facteurs, peuvent être remplacées, toutes ou en partie, par des conditions analogues, relatives à la décomposition d'autres quantités.

On a, par exemple,

$$R=(a^2+2P)(b^2+2P)(c^2+2P),$$
$$T=(-3a^2+2P)(-3b^2+2P)(-3c^2+2P),$$

où nous supposons toujours que a, b, c sont racines entières de la proposée. Dans la première égalité, R et ses facteurs sont compris dans la formule

$$z^2+2Py^2;$$

dans la deuxième, T et ses facteurs sont compris dans la formule

$$-3z^2+2Py^2.$$

De plus les égalités

$$a^2+2P=-b^2-c^2,$$
$$-3a^2+2P=-(2b+c)^2-(2c+b)^2$$

montrent que chacun de ces facteurs, pris en signe contraire, est la somme de deux carrés (ce qui fait que les produits $-R$, $-T$ sont eux-mêmes des sommes de deux carrés). On reconnaîtra en outre que T et ses trois facteurs, pris en signes contraires, sont aussi représentés, chacun, par une somme de trois carrés.

Inscrivons encore la relation

$$2P^3+27Q^2=(3a^2+2P)(3b^3+2P)(3c^2+2P),$$

qui doit subsister entre les entiers a, b, c, s'ils sont les racines de la proposée. Ici le produit et les facteurs sont compris d'abord dans la formule

$$3z^2 + 2Py^2.$$

L'égalité

$$3a^2 + 2P = (2b + c)^2 - 3b^2$$

nous fait voir ensuite que chaque facteur, pris avec son signe, est aussi renfermé dans la formule

$$u^2 - 3t^2;$$

d'où l'on peut conclure, par un théorème connu, que la même chose a lieu à l'égard du produit.

5. Il n'est pas inopportun de rappeler ici, d'après les éléments, la simplification qui consiste à ramener d'abord l'équation à n'avoir que des racines premières entre elles.

Si les racines, supposées toutes les trois entières, ont des facteurs communs, le premier membre de l'équation est nécessairement de la forme

$$x^3 + g^2Px + g^3Q,$$

g étant le plus grand commun diviseur des racines. Alors, changeant x en gx, l'équation devient

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

où les racines a, b, c sont premières entre elles, et où P est un nombre impair, et Q un nombre pair.

Il est visible, au surplus, que la transformation indiquée peut être appliquée de façon à rendre les racines premières entre elles, non pas d'une manière absolue, mais seulement par rapport à tels facteurs premiers k_1, k_2,..., k_n qu'on voudra, de façon, dis-je, à débarrasser les racines du plus grand produit $k_1^\alpha\, k_2^\beta \ldots\, k_n^\lambda$ qu'elles ont en facteur commun et où n'entrent pas tous les facteurs premiers de g.

Cette simplification partielle peut être utile quand on ne connaît pas tous les facteurs premiers des coefficients, et nous en signalerons bientôt une application importante. En attendant, on voit déjà qu'il suffira que Q soit impair, ou que, après avoir dégagé les racines du plus grand facteur 2^α qui leur est commun, P se maintienne pair, pour qu'on ait la certitude que toutes les racines de la proposée ne sont pas entières.

6. On sait que, si une racine a est entière, les deux autres le sont ou ne le sont pas, selon que la quantité $-3a^2 - 4P$ est ou non égale à un carré, et que, si cette quantité se réduit à zéro, les deux racines sont égales. On sait, en outre, que lorsque la même quantité est un carré avec le signe négatif, les deux racines en question sont des *nombres complexes entiers*, c'est-à-dire qu'elles sont représentées par l'expression $a' \pm b'\sqrt{-1}$, dans laquelle a' et b' sont entiers, auquel cas la racine

$$a = -2a'$$

ne peut être qu'un nombre pair (*).

D'après cela, et vu que la quantité mentionnée ne peut pas devenir un carré si elle se réduit à la forme $3z + 2$, on sera assuré que, lorsque toutes les racines sont réelles et que la valeur absolue de P est de la forme $3p + 2$, deux racines ne peuvent être entières. On sera assuré de même, par des considérations semblables, que, lorsqu'une seule racine est réelle, et que P est un nombre négatif

(*) *Voir*, pour les racines complexes des équations, le tome III de la 1[re] série, p. 41, 145 et 325.

$-(3p-2)$, ou un nombre positif $3p+2$, les deux autres racines ne sont pas exprimées par des nombres complexes entiers. C'est aussi ce qu'on peut voir en raisonnant directement sur la quantité S.

Il y a lieu d'ajouter ici que, considérées par rapport aux trois formes

$$3z, \quad 3z+1, \quad 3z+2,$$

les valeurs absolues des coefficients P, Q, au cas des trois racines entières, ne peuvent appartenir à la même forme.

7. Admettons que l'équation proposée a toutes ses racines entières, et supposons Q positif, ce qui est toujours permis.

Ce qui précède nous conduit à remarquer que cette équation, étant transformée de manière à avoir ses racines débarrassées du plus grand facteur $2^\alpha . 3^\beta$ qui peut leur être commun, se réduira nécessairement à l'une de ces trois formes

1° $\qquad x^3-(6p+1)x+6q=0,$

2° $\qquad x^3-(6p+3)x+6q+2=0,$

3° $\qquad x^3-(6p+3)x+6q+4=0,$

p et q étant des entiers positifs. C'est ce qu'on peut vérifier directement, en s'appuyant sur les égalités

$$\begin{aligned} P &= -(a^2+ab+b^2), \\ Q &= ab(a+b), \end{aligned}$$

considérées relativement à l'équation transformée. Ainsi, toute équation cubique qui ne se ramène pas à l'une ou à l'autre de ces formes ne saurait avoir ses trois racines entières.

On reconnaîtra de même que la proposée ci-dessus est toujours réductible à l'une ou à l'autre des formes

$$1^\circ \qquad x^3 - (4p+1)x + 4q = 0,$$
$$2^\circ \qquad x^3 - (4p+3)x + 4q + 2 = 0,$$

où les racines n'ont pas le nombre 2 pour facteur commun.

On assignerait semblablement les formes exclusives que comporte la même équation lorsque, l'ayant ramenée à avoir ses racines premières entre elles par rapport aux facteurs premiers 2 et k, on distingue les coefficients d'après les formes linéaires

$$2kz,\quad 2kz+1,\quad 2kz+2,\ldots,\quad 2kz+2k-1.$$

8. La remarque suivante permet quelquefois de constater qu'une équation donnée est irréductible.

On sait que, lorsque la quantité $-S$ est égale à un carré, les racines de la proposée sont réelles, et que deux quelconques d'entre elles s'expriment rationnellement en fonction de la troisième et des quantités connues.

S'il arrivait donc que $-S$ fût un carré, et que l'une des indications précédentes nous fît reconnaître que toutes les racines ne peuvent être entières, il s'ensuivrait de nécessité qu'elles sont toutes incommensurables.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les équations de la forme

$$x^3 - 3(p^2+p+1)x + (2p+1)(p^2+p+1) = 0,$$

qui rentrent dans celles considérées par M. Lobatto dans un Mémoire inséré au tome IX de la 1re série du *Journal de Mathématiques* (*). Ici, p étant un entier de signe quelconque, la condition relative à $-S$ est satisfaite; mais

(*) *Voir* aussi l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

le dernier terme est un nombre impair; aucune racine par conséquent ne peut être commensurable.

9. La différence v entre deux quelconques des racines a, b, c de la proposée est donnée, comme on sait, par l'équation du sixième degré

$$v^6 + 6Pv^4 + 9P^2v^2 + S = 0,$$

où toutes les valeurs de v sont entières, si celles de a, b, c le sont elles-mêmes.

Cette équation, il importe de le remarquer, se décompose dans les deux suivantes :

$$v^3 + 3Pv + \sqrt{-S} = 0,$$
$$v^3 + 3Pv - \sqrt{-S} = 0,$$

dont les racines sont, pour l'une, les différences

$$v' = a - b, \quad v'' = b - c, \quad v''' = c - a,$$

et pour l'autre, les mêmes différences prises en signes contraires, savoir

$$-v' = b - a, \quad -v'' = c - b, \quad -v''' = a - c.$$

Les valeurs distinctes de v sont donc données par l'équation cubique

$$v^3 + pv + q = 0,$$

où l'on a fait, pour simplifier, $3P = p$, $-S = q^2$, et où il suffit de prendre q positif.

Lorsque q est un nombre entier, on pourra appliquer à cette équation les considérations exposées plus haut (7) à l'égard de la proposée, et l'on établira par là les corrélations de formes qui doivent subsister entre les coefficients p, q, pour qu'il y ait possibilité que les valeurs de v soient entières. Cela fera donc connaître de nouvelles conditions relatives à la rationnalité des racines

a, b, c; mais un autre résultat important se dégage incidemment de l'équation précédente, et nous ne devons pas omettre de le signaler.

Désignant par S' la quantité $4p^3 + 27q^2$, on a

$$-S' = 27^2 Q^2,$$

par où est d'abord mise en lumière une particularité fort remarquable, relative à l'équation considérée. Elle consiste, comme on voit, en ce que $-S'$ est toujours un carré, lors même que, $-S$ ne l'étant pas, le terme q est irrationnel ou imaginaire.

Rappelons maintenant les relations

$$v'' = -\frac{v'}{2} - \frac{\sqrt{-S'}}{2(3v'^2 + p)},$$

$$v''' = -\frac{v'}{2} + \frac{\sqrt{-S'}}{2(3v'^2 + p)},$$

par lesquelles deux racines quelconques v'', v''' de la même équation sont exprimées en fonction de la troisième racine v' et des quantités connues.

Ces relations, devenant ici

$$v'' = -\frac{v'}{2} + \frac{9Q}{2(v'^2 + P)},$$

$$v''' = -\frac{v'}{2} - \frac{9Q}{2(v'^2 + P)},$$

nous font voir aussitôt que les différences v s'expriment rationnellement en fonction l'une de l'autre et des coefficients de l'équation en x, indépendamment de toute hypothèse sur la quantité S et la nature des racines a, b, c.

Joignant à cela la considération que les différences entre les racines demeurent les mêmes après la transformation linéaire qui ramène une équation quelconque du troisième degré à la forme de la proposée, on établira facilement ce théorème :

Théorème. — *Dans toute équation du troisième degré, dont les racines sont a, b, c, les différences*

$$a - b, \quad b - c, \quad c - a$$

s'expriment toujours en fonction rationnelle l'une de l'autre et des coefficients.

Cette proposition, qui n'avait peut-être pas été remarquée, conduit à des conséquences importantes, et nous pourrons y revenir ; elle n'est d'ailleurs pas isolée. Bornons-nous en ce moment à observer que, la proposée en x ayant ses coefficients entiers, et toutes ses racines n'étant pas supposées entières, aucune racine de l'équation en v ne pourra être entière, et aucune racine, par suite de l'équation

$$V^3 + 6PV^2 + 9P^2V + S = 0,$$

dans laquelle $V = v^2$, ne pourra être un carré.

Note. — Ces *remarques*, conséquences implicites de principes et de formules bien connus, n'ont pas pour but de faciliter, dans la pratique, la recherche des racines entières des équations considérées ; mais elles peuvent être d'un usage avantageux dans l'analyse indéterminée, où l'on est souvent arrêté par la difficulté d'assigner théoriquement les conditions relatives à la rationnalité des racines des équations. Les développements qui précèdent fournissent effectivement des caractères, ou *criteria*, pour juger *a priori*, d'après la forme des coefficients et de quelques fonctions des coefficients, de la possibilité ou de l'impossibilité que certaines équations aient leurs racines entières. C'est pour cette raison, et bien que les propositions énoncées laissent subsister la difficulté théorique en son entier, qu'on a pu croire utile de les consigner ici.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, OU TROIS LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES;

PAR M. VACHETTE,
Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 549.)

I. *Distinction des diverses espèces de permutations contenues dans les* $B_{q,2}$ *intervalles inadmissibles pour l'espèce cherchée.*

Les permutations de l'espèce cherchée appartiennent aux $B_{q,2}$, dont il a été parlé dans un précédent article. Soit $C_{q,2}$ le nombre cherché; toutes les autres permutations, prises parmi les $B_{q,2}$, seront en général des $N_{q,2}$.

Toute $N_{q,2}$ contient un ou plusieurs *intervalles* inadmissibles pour les $C_{q,2}$ dont les seules formes sont $\underline{aba}$, $\underline{abab}$ désignées par S_3, S_4.

Il ne peut y avoir de formes plus complexes; toute lettre C, voisine d'un S_3 ou d'un S_4, ne peut que faire partie d'un intervalle consécutif distinct du premier, comme on le voit dans

$$\underline{aba}\,\underline{cbc},\quad \underline{aba}\,\underline{cdc},\quad \underline{aba}\,\underline{cdcd},\quad \underline{abab}\,\underline{cdc},\quad \underline{abab}\,\underline{cdcd}.$$

Dans un S_3, $\underline{aba}$, il y a une *médiane* b et deux *extrêmes* a; dans un S_4, $\underline{abab}$, il y a deux médianes et deux extrêmes.

Un S_4 emploie complétement deux des q groupes de lettres. Un S_3, $\underline{aba}$, n'emploie complétement qu'un groupe; sa médiane b peut être, ou isolée ailleurs, ou médiane d'un autre S_3.

Un couple de deux S_3, $\underline{aba}$ et $\underline{cbc}$, ayant même médiane, emploie complétement trois des q groupes et donne deux intervalles complémentaires : on le désigne par $2S_3^C$.

Un $N_{q,2}$ peut contenir : 1° r couples d'intervalles complémentaires contenant $6r$ lettres égales deux à deux; 2° u intervalles de forme S_4, contenant $4u$ lettres égales deux à deux; 3° v intervalles distincts de forme S_3, contenant $3v$ lettres, dont $2v$ égales deux à deux, et v lettres distinctes entre elles. On doit avoir

$$3r + 2u + 2v \leqq q \quad \text{et} \quad \geqq 2,$$

car cet $N_{q,2}$ contient au moins un S_3.

On désigne par $N_q(r, u, v)$ le nombre des permutations d'une de ces espèces; r, u, v sont entiers et doivent satisfaire aux inégalités précédentes; ils peuvent être nuls tous les trois, en admettant que $C_{q,2}$ peut s'écrire $N_q(0, 0, 0)$.

L'identité

$$B_{q,2} = C_{q,2} + \Sigma N_q(r, u, v)$$

servira de vérification; la somme Σ comprend tous les termes possibles.

Le nombre des tournantes de l'espèce $N_q(r, u, v)$, tournante complète, est en général $\frac{1}{2q} N_q(r, u, v)$; une exception sera mentionnée plus loin.

Certains $C_{q,2}$ sont, comme les $B_{q,2}$, des tournantes incomplètes; le nombre de leurs tournantes sera $\frac{C_{q,2} + P_q}{2q}$, pour des raisons analogues. On aura aussi à considérer l'ordre q d'une espèce, l'abaissement d'ordre, les variétés d'une même espèce, les variétés asymétriques et les variétés symétriques de fraction $\frac{1}{x}$; et l'on établira, comme dans le premier article, la formule

$$N_q(r, u, v) = 2q\, P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

II. *Moyens de former un intervalle; permutations de l'ordre $q - 1$ qui peuvent servir à former des* $C_{q,2}$.

1° Avec une seule lettre h, on peut former :

Un S_3, $\underline{aba}$ de deux manières, *ahba* ou *abha*;

Un S_4, $\underline{abab}$ d'une seule, *abhab*.

Avec deux h, on peut former :

Un S_4, $\underline{abab}$ d'une manière, *ahbahb*;

Deux S_3, de quatre manières, puisque chacun d'eux peut être formé de deux manières avec h.

2° Il n'y a que des $B_{q-1,2}$ qui puissent former des $C_{q,2}$ au moyen de deux lettres h nouvelles; au moyen de h, le binaire $\underline{aa}$ donne un S_3, $\underline{aha}$; au moyen de deux h, on a un nouveau binaire, $\underline{ahha}$.

Parmi les $B_{q-1,2}$ on ne peut recourir qu'aux $C_{q-1,2}$, $N_{q-1}(0, 0, 1)$, $N_{q-1}(0, 0, 2)$, $N_{q-1}(0, 2, 0)$, $N_{q-1}(0, 1, 0)$, $N_{q-1}(0, 1, 1)$ et $N_{q-1}(1, 0, 0)$. En effet, pour les $N_{q-1}(0, 0, 0)$, on doit avoir $v < 3$, puisque deux h ne peuvent former que deux S_3; pour les $N_{q-1}(0, u, v)$, on doit avoir $u + v < 3$, ce qui répond ou à deux S_4, ou à un seul S_4, ou à un seul S_4 et un S_3; pour les $N_{q-1}(r, u, v)$, r n'étant pas nul, on doit avoir $r = 1$, $u = 0$, $v = 0$, car on ne peut former qu'un couple de $2S_3^{C}$.

III. *Formule du nombre* $C_{q,2}$.

1° Part des $C_{q-1,2}$.

Les lettres h peuvent porter, dans les numéros de 1 à $2q$ qu'elles ont dans la résultante, deux numéros séparés au moins par deux places; ainsi, un numéro étant donn à l'une d'elles, l'autre ne peut en avoir que $2q - 5$; on aura $\frac{2q(2q-5)}{2}$ systèmes de places. La part sera

$$q(2q-5)C_{q-1,2}.$$

2° Part des $N_{q-1}(0, 0, 1)$.

Avec une des lettres h, on forme le S_3 de deux manières, et le second h

$$\underline{ab^h a}\ldots$$

peut occuper, pour chacune de ces manières, autant de places qu'il y a de lettres en dehors de S_3, savoir $2q - 2 - 3$ ou $2q - 5$: aussi chaque tournante de l'espèce considérée en fournit $2(2q-5)$ à l'espèce cherchée; la part fournie en tournantes sera

$$\frac{2(2q-5)}{2(q-1)} N_{q-1}(0, 0, 1),$$

et en permutations, si l'on multiplie par $2q$,

$$\frac{2q(2q-5)}{q-1} N_{q-1}(0, 0, 1).$$

3° Part des $N_{q-1}(0, 0, 2)$.

Avec les deux h on a quatre manières de former les deux S_3 : la part sera

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(0, 0, 2).$$

4° Part des $N_{q-1}(0, 1, 0)$.

Si l'on forme le S_4 avec un seul h

$$\underline{ab^h ab}\ldots,$$

le second h peut occuper autant de places, plus une, qu'il y a de lettres en dehors de S_4, $2q - 2 - 4$ ou $2q - 6$: on a ainsi $2q - 5$ systèmes.

Si on le forme avec les deux h, il y en a 1 de plus.

En tout, il y en a $2q - 4$: la part sera

$$\frac{2q(q-2)}{q-1} N_{q-1}(0, 1, 0).$$

5° Part des $N_{q-1}(0, 1, 1)$.

On forme S_4 d'une manière, et S_3 de deux. Il y a deux systèmes. La part sera

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(0, 1, 1).$$

6° Part des $N_{q-1}(0, 2, 0)$.

On forme chaque S_4 d'une manière. La part sera

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(0, 2, 0).$$

7° Part des $N_{q-1}(1, 0, 0)$.

On forme chaque S_3 de deux manières. La part sera

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(1, 0, 0).$$

Si l'on ajoute toutes ces parts et qu'on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q} C_{q-1,2} = (2q-5)(q-1) C_{q-1,2} &+ 2(2q-5) N_{q-1}(0,0,1)\\ &+ 4 N_{q-1}(0, 0, 2) + 2(q-2) N_{q-1}(0, 1, 0)\\ &+ 2 N_{q-1}(0,1,1) + N_{q-1}(0,2,0) + 4 N_{q-1}(1,0,0).\end{aligned}$$

IV. *Décomposition des* $B_{2,2}$, *des* $B_{3,2}$ *et des* $B_{4,2}$.

1° On a vu (1^er article, IV) que $B_{2,2} = 2$; on a une tournante incomplète à deux places, $\underline{abab}$; elle est de l'espèce $N_2(0, 1, 0)$; ainsi

$$N_2(0, 1, 0) = 2.$$

Cette espèce donne l'exception annoncée (I): on a une seule variété symétrique de fraction $\frac{1}{4}$; car la permutation peut commencer à l'une des quatre lettres, sans changer la variété; donc $1\,\frac{2q\,P_q}{4} = N_q(0, 1, 0)$, et, comme $q = 2$, $N_2(0, 1, 0) = 2$.

2° On a vu (1er article, IV) que $B_{3,2} = 24 = 4P_3$, $C_{3,2} = 6 = P_3$, $\underline{abc}\,\underline{abc}$; par la formule on a

$$\tfrac{2}{3}C_{3,2} = 2N_2(0, 1, 0) = 4.$$

$$N_3(1,0,0) = 18 = 3P_3, \quad \text{d'où} \quad B_{3,2} = P_3 + 3P_3 = 4P_3.$$

Un $B_{3,2}$ ne peut en effet contenir un S_4; $\underline{abab}\,cc$ est inadmissible. S'il contient un S_3, $\underline{aba}$, il contient forcément son complémentaire, $\underline{cbc}$: on a une seule variété, $\underline{aba}\,\underline{cbc}$, symétrique de fraction $\frac{1}{2}$ pour les $N_3(1,0,0)$; d'où $N_3(1, 0, 0) = \frac{2.3P_3}{2}\,1 = 3P_3$.

3° On sait que $B_{4,2} = 31\,P_4$. Or

$C_{4,2} =$	$7P_4$;	par la formule $C_{4,2}$.
$N_4(0, 0, 1) =$	$8P_4$;	une seule variété asymétrique $aba\,\underline{cdb}cd$; $N_4(0, 0, 1) = 1.2.4P_4$.
$N_4(0, 0, 2) =$	$8P_4$;	une seule variété asymétrique $ab\underline{a}\,\underline{cdc}\,bd$. Point de $N_4(0, 1, 0)$, ni de $N_4(0, 1, 1)$.
$N_4(0, 2, 0) =$	$4P_4$;	une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{abab}\,\underline{cdcd}$; $N_4(0, 2, 0) = \frac{2.4P_4}{2}$.
$N_4(1, 0, 0) =$	$4P_4$;	une variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{aba}d\,\underline{cbc}d$.
	$\overline{31\,P_4}$.	

V. *Abaissement d'ordre du nombre* $N_q(r, u, v)$ *quand* v *n'est pas nul; formule* (r, u, v).

L'espèce $N_q(r, u, v)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, u, v)$ tournantes; si l'on fait commencer une tournante à l'un des v intervalles distincts de forme S_3, on ne comptera que v des $2q$ permutations de la tournante, en tout $\frac{v}{2q} N_q(r, u, v)$.

Si on enlève les extrêmes de $\underline{aba}$, on obtient des permutations d'ordre $q-1$, à l'aide desquelles on peut revenir à l'espèce cherchée; leur nombre sera le nombre des permutations d'ordre q, relatives à a, et, pour les avoir toutes, on multipliera ce nombre par q.

Il convient d'examiner ce que produit l'enlèvement des a de $\underline{aba}$. Autour du b restant peut se former un S_4, un S_3 ou rien :

$$\left.\begin{matrix}\underline{cbcb}\\ \underline{bcbc}\end{matrix}\right\}\ \text{par les formes}\ \left\{\begin{matrix}c\,\underline{aba}\,cb,\\ bc\,\underline{aba}\,c,\end{matrix}\right.$$

$$\underline{cbc}\quad\text{par}\quad c\,\underline{aba}\,c,$$

$$\underline{bcb}\quad\text{par}\quad \left\{\begin{matrix}\underline{aba}\,cb,\\ bc\,\underline{aba}.\end{matrix}\right.$$

S'il se forme un S_4, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u+1, v-1)$; le nombre de S_4 a augmenté de 1, et celui des S_3 distincts a diminué de 1. Chacune des tournantes de cette espèce, commencée par un des $u+1$ intervalles S_4, fournit $2(u+1)$ permutations à l'espèce cherchée, puisqu'on peut entourer de deux a l'une des deux médianes d'un S_4 : la part ainsi fournie est

$$\frac{2(u+1)}{2(q-1)} N_{q-1}(r, u+1, v-1)$$

ou

$$\frac{u+1}{q-1} N_{q-1}(r, u+1, v-1).$$

S'il se forme un S_3, $\underline{bcb}$ et que sa médiane C ne fasse pas partie d'un autre S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u, v)$; un des S_3 distincts a été remplacé par un autre. Chacune de ces tournantes, commencée par un des v intervalles distincts S_3, fournit $3v$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a l'une des trois lettres de ces S_3 ; la part ainsi fournie est

$$\frac{3v}{2(q-1)} N_{q-1}(r, u, v).$$

Quand la médiane de $\underline{bcb}$ fait partie d'un autre S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r+1, u, v-2)$; le nombre des couples de $2S_3^C$ a augmenté de 1, et le nombre des S_3 distincts a diminué de 2. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $2(r+1)$ intervalles S_3 des $r+1$ couples de $2S_3^C$, fournit $4(r+1)$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a l'une des extrêmes b d'un de ces S_3, $\underline{bcb}$. La part sera

$$\frac{4(r+1)}{2(q-1)} N_{q-1}(r+1, u, v-2)$$

ou

$$\frac{2(r+1)}{q-1} N_{q-1}(r+1, u, v-2).$$

S'il ne se produit aucun intervalle, on a l'espèce $N_{q-1}(r, u, v-1)$; le nombre des intervalles distincts S_3 a diminué de 1. Dans chaque tournante, il y a $2(q-1)-6r-4u-4(v-1)$ lettres isolées dont la semblable n'existe dans aucun des intervalles. Chacune de ces tournantes, commencée par une de ces lettres, fournit $2(q-3r-2u-2v+1)$ permutations à l'espèce cherchée ; on entoure de deux a cette lettre initiale. La part sera

$$\frac{q-3r-2u-2v+1}{q-1} N_{q-1}(r, u, v-1).$$

La somme des parts, multipliée par q, donne $\frac{v}{2q}N_q(r, u, v)$; si l'on multiplie tout par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule (r, u, v)

$$\begin{aligned}\frac{v(q-1)}{2q^2}&N_q(r, u, v)\\ &=(u+1)N_{q-1}(r, u+1, v+1)+\frac{3v}{2}N_{q-1}(r, u, v)\\ &\quad+2(r+1)N_{q-1}(r+1, u, v-2)\\ &\quad+(q-3r-2u-2v+1)N_{q-1}(r, u, v-1).\end{aligned}$$

VI. *Cas particuliers de la formule* (r, u, v); *formules* $(0, u, v)$ *et* $(0, 1, 1)$, $(r, 0, v)$, $(0, 0, v)$ *et* $(0, 0, 1)$ *et* $(0, 0, 2)$.

1° La formule (r, u, v), pour $r=0$, donne la formule $(0, u, v)$

$$\begin{aligned}\frac{v(q-1)}{2q^2}N_q(0, u, v)&=(u+1)N_{q-1}(0, u+1, v-1)\\ &\quad+\frac{3v}{2}N_{q-1}(0, u, v)+2N_{q-1}(1, u, v-2)\\ &\quad+(q-2u-2v+1)N_{q-1}(0, u, v-1),\end{aligned}$$

et celle-ci pour $u=1$ et $v=1$ donne la formule $(0, 1, 1)$ relative à une des espèces qui forment $C_{q,2}$

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{2q^2}N_q(0, 1, 1)&=2N_{q-1}(0, 2, 0)\\ &\quad+\tfrac{3}{2}N_{q-1}(0, 1, 1)+(q-3)N_{q-1}(0, 1, 0).\end{aligned}$$

2° Pour $u=0$, elle donne la formule $(r, 0, v)$

$$\begin{aligned}\frac{v(q-1)}{2q^2}N_q(r, 0, v)&=N_{q-1}(r, 1, v-1)+\frac{3v}{2}N_{q-1}(r, 0, v)\\ &\quad+2(r+1)N_{q-1}(r+1, 0, v-2)\\ &\quad+(q-3r-2v+1)N_{q-1}(r, 0, v-1).\end{aligned}$$

3° Pour $r = 0$ et $u = 0$, elle donne la formule $(0, 0, v)$

$$\frac{v(q-1)}{2q^2} N_q(0,0,v) = N_{q-1}(0, 1, v-1) + \frac{3v}{2} N_{q-1}(0, 0, v) + 2N_{q-1}(1, 0, v-2) + (q - 2v + 1) N_{q-1}(0, 0, v-1),$$

qui en comprend deux autres; pour $v = 1$ et $v = 2$, relatives à deux des espèces qui forment $C_{q,2}$, les formules $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, 2)$

$$\frac{q-1}{2q^2} N_q(0, 0, 1) = N_{q-1}(0, 1, 0) + \tfrac{3}{2} N_{q-1}(0, 0, 1) + (q-1) C_{q-1,2},$$

car $N_{q-1}(0, 0, 0)$ n'est autre chose que $C_{q-1,2}$;

$$\frac{q-1}{q^2} N_q(0, 0, 2) = N_{q-1}(0, 1, 1) + 3N_{q-1}(0, 0, 2) + 2N_{q-1}(1, 0, 0) + (q-3) N_{q-1}(0, 0, 1).$$

(*A suivre.*)

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1874.)

Question de Mathématiques spéciales;

PAR M. E. FIOT,

Professeur de Mathématiques au lycée de Sens.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales; on imagine une conique quelconque c, doublement tangente à chacune des coniques données. Trouver et discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique c.

Principes sur les coniques bitangentes à une troisième.

Lorsque deux coniques sont bitangentes à une troisième, les cordes de contact passent par le point de concours des sécantes communes à ces deux coniques, correspondant aux cordes de contact.

Si les sécantes sont parallèles, les cordes de contact leur sont respectivement parallèles.

C'est un théorème bien connu, résultant de ce que toute conique bitangente à une conique $s = 0$ a pour équation

$$s - k\alpha^2 = 0.$$

Distinction a priori *des différentes parties du lieu cherché.*

L'ellipse et l'hyperbole homofocales données se coupent en quatre points A, B, C, D situés aux sommets d'un rectangle concentrique à ces coniques. Des trois couples de sécantes communes, il y en a un, (AC, BD), concentrique aux deux courbes; les deux autres, (AB, CD), (AD, BC), sont respectivement parallèles aux axes OX, OY : il en est de même, dans ces trois cas, des cordes de contact.

Premier cas. — *Sécantes communes concentriques.*

Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole homofocales sont

$$s = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad s' = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

en supposant $a^2 > \lambda > b^2$.

Soient $y - mx = 0$, $y - m'x = 0$ les équations des cordes de contact; l'équation de la conique c pourra se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$c = s - k(y - mx)^2 = 0, \quad c = s' - k'(y - m'x)^2 = 0.$$

Exprimons que ces deux équations représentent la même conique : nous aurons les relations

$$\frac{1}{a^2} - km^2 = \frac{1}{a^2-\lambda} - k'm'^2, \quad \frac{1}{b^2} - k = \frac{1}{b^2-\lambda} - k',$$
$$km = k'm'.$$

En éliminant k et k' entre ces trois équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on obtient la relation

$$mm' = -\frac{b^2(b^2-\lambda)}{a^2(a^2-\lambda)},$$

entre les coefficients angulaires m, m' des deux cordes de contact.

Recherche des équations des tangentes. — Le diamètre de l'ellipse, conjugué de la droite $y - mx = 0$, a pour coefficient angulaire $-\frac{b^2}{a^2m}$; par suite, les tangentes à l'ellipse, parallèles à ce diamètre, ont pour équation

$$(1) \qquad y = -\frac{b^2x}{a^2m} \pm \frac{b\sqrt{b^2+a^2m^2}}{am}.$$

On trouve de même que les tangentes à l'hyperbole, conjuguées de la droite $y - m'x = 0$, ont pour équation

$$(2) \quad y = -\frac{(b^2-\lambda)}{(a^2-\lambda)m'}x \pm \frac{\sqrt{b^2-\lambda}\sqrt{(a^2-\lambda)m'^2+b^2-\lambda}}{m'\sqrt{a^2-\lambda}}.$$

On aura l'équation du lieu cherché en éliminant m, m' entre les équations (1), (2) et

$$mm' = -\frac{b^2(b^2-\lambda)}{a^2(a^2-\lambda)}.$$

Élimination de m et m'. — Je commence par rendre rationnelles les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(a^2my + b^2x)^2 = a^2b^2(a^2m^2 + b^2),$$
$$[(a^2-\lambda)m'y + (b^2-\lambda)x]^2$$
$$= (a^2-\lambda)(b^2-\lambda)[(a^2-\lambda)m'^2 + (b^2-\lambda)];$$

puis, dans cette dernière équation, je remplace m' par sa valeur

$$m' = -\frac{b^2(b^2-\lambda)}{a^2(a^2-\lambda)m};$$

après réduction, on trouve

$$(a^2mx - b^2y)^2 = a^4m^2(a^2-\lambda) + b^4(b^2-\lambda).$$

On a donc à éliminer m entre les équations

$$(a^2my + b^2x)^2 = a^2b^2(a^2m^2 + b^2),$$
$$(a^2mx - b^2y)^2 = a^4m^2(a^2-\lambda) + b^4(b^2-\lambda);$$

en les additionnant membre à membre, il vient

$$(a^4m^2 + b^4)(x^2+y^2) = (a^4m^2 + b^4)(a^2 + b^2 - \lambda),$$

équation qui se dédouble en deux autres :

$$a^4m^2 + b^4 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - \lambda.$$

Si l'on ne tient pas compte des imaginaires, le lieu est, dans le premier cas, le cercle représenté par

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - \lambda \quad (*);$$

on doit avoir $\lambda < a^2$ donc : $a^2 + b^2 - \lambda$ est une quantité toujours positive, et, par conséquent, le cercle est toujours réel.

Deuxième cas. — *Sécantes communes parallèles à l'axe* OX; *cordes de contact aussi parallèles à* OX.

Soient $y - h = 0$, $y - h' = 0$ les équations des cordes

(*) En remplaçant dans l'équation $s' - ks = 0$ l'indéterminée k par

$$\frac{a^2b^2}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)},$$

il vient

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2 - \lambda) = 0;$$

donc le cercle que cette équation représente passe par les quatre points A, B, C, D, communs aux deux coniques données. (G.)

de contact, l'équation de la conique c pourra s'écrire sous l'une ou l'autre des formes

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-k(y-h)^2=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)-k'(y-h')^2=0;$$

il en résulte

$$\frac{a^2-\lambda}{a^2}=\frac{(b^2-\lambda)(1-b^2k)}{b^2[1-k'(b^2-\lambda)]}=\frac{kh}{k'h'}=\frac{1+kh^2}{1+k'h'^2};$$

ces trois relations peuvent s'écrire

$$a^2kh-(a^2-\lambda)k'h'=0,\quad a^2kh^2-(a^2-\lambda)k'h'^2+\lambda=0,$$
$$b^2(a-\lambda)[1-k'(b^2-\lambda)]=a^2(b^2-\lambda)(1-kb^2).$$

Les deux premières donnent k et k'; en substituant dans la troisième, on obtient la relation qui lie les paramètres h, h'. On trouve ainsi, sans difficulté,

$$(b^2-a^2)hh'=b^2(b^2-\lambda).$$

Recherche des tangentes correspondant aux cordes h, h'. — Les coordonnées du pôle de la droite $y-h=0$, relativement à l'ellipse, sont

$$x=0,\quad y=\frac{b^2}{h}.$$

Il s'ensuit que le système des tangentes menées de ce point à l'ellipse a pour équation

$$(3)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)(b^2-h^2)-(y-h)^2=0.$$

De même, les coordonnées du pôle de la droite $y-h'=0$, par rapport à l'hyperbole, sont

$$x=0,\quad y=\frac{b^2-\lambda}{h'}.$$

Le système des deux tangentes issues de ce point a pour équation

$$(4)\quad \left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)(b^2-\lambda-h'^2)-(y-h')^2=0.$$

En éliminant h et h' entre les équations (3) et (4) et la relation

$$(b^2-a^2)hh'=b^2(b^2-\lambda),$$

on aura l'équation du lieu cherché.

Élimination. — Je commence par éliminer h' entre les deux dernières équations

$$h'=\frac{b^2(b^2-\lambda)}{(b^2-a^2)h},$$

d'où

$$\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1\right)\left[b^2-\lambda-\frac{b^4(b^2-\lambda)^2}{h^2(b^2-a^2)^2}\right]$$
$$-\left[y-\frac{b^2(b^2-\lambda)^2}{h(b^2-a^2)}\right]^2=0.$$

En simplifiant, on trouve que cette équation, ordonnée par rapport à h, devient

$$(5)\quad \begin{cases}(b^2-a^2)^2[x^2-(a^2-\lambda)]h^2+2b^2y(b^2-a^2)(a^2-\lambda)h\\ \qquad -b^4[x^2(b^2-\lambda)+y^2(a^2-\lambda)]=0.\end{cases}$$

En ordonnant de même l'équation (3), on a

$$(6)\quad (a^2y^2+b^2x^2)h^2-2a^2b^2yh-b^4(x^2-a^2)=0.$$

L'élimination de la première puissance de h entre les deux équations (5) et (6) donne

$$[(b^2-a^2)^2(x^2-a^2+\lambda)a^2+(a^2y^2+b^2x^2)(b^2-a^2)(a^2-\lambda)]h^2$$
$$-a^2b^4[x^2(b^2-\lambda)+y^2(a^2-\lambda)]$$
$$-b^4(x^2-a^2)(b^2-a^2)(a^2-\lambda)=0$$

ou, en simplifiant,

$$\begin{aligned} h^2(b^2-a^2)[x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda) \\ -a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)] \\ -b^4[x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda) \\ -a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)]=0. \end{aligned}$$

On aperçoit le facteur $h^2(b^2-a^2)-b^4$, lequel est toujours négatif, puisque $b^2-a^2<0$; si l'on supprime ce facteur, il reste l'équation de la conique

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} x^2(2a^2b^2-a^4-b^2\lambda)+a^2y^2(a^2-\lambda) \\ -a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)=0. \end{aligned} \right.$$

Tel est le lieu relatif au second cas.

TROISIÈME CAS. — *Sécantes et cordes de contact parallèles à l'axe* OY.

L'équation du lieu cherché se déduit de l'équation (7) en changeant x en y et a en b; d'où la nouvelle conique

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} y^2(2a^2b^2-b^4-a^2\lambda)+b^2x^2(b^2-\lambda) \\ -b^2(b^2-\lambda)(a^2-b^2)=0\ (*). \end{aligned} \right.$$

Discussion relative aux deux coniques (7) et (8). — Posons

$$2a^2b^2-a^4-b^2\lambda=\mathrm{A},\quad a^2(a^2-\lambda)=\mathrm{B},\quad a^2(a^2-\lambda)(b^2-a^2)=\mathrm{C};$$
$$b^2(b^2-\lambda)=\mathrm{A}',\quad 2a^2b^2-b^4-a^2\lambda=\mathrm{B}',\quad b^2(b^2-\lambda)(a^2-b^2)=\mathrm{C}';$$

(*) Les équations (7) et (8) s'obtiennent en remplaçant dans l'équation $s'-ks=0$ l'indéterminée k, successivement par $\dfrac{b^2(\lambda-a^2)}{a^2(\lambda-b^2)}$ et $\dfrac{a^2(\lambda-b^2)}{b^2(\lambda-a^2)}$, ce qui prouve que les coniques (7) et (8) passent chacune par les quatre points d'intersection des coniques données s et s'. En outre, les coordonnées $x=0$, $y=\pm\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{-1}$ des foyers imaginaires de l'ellipse et de l'hyperbole homofocales s et s' vérifient l'équation (7), et les coordonnées $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $y=0$ des foyers réels de ces mêmes courbes s et s' satisfont à l'équation (8). (G.)

les équations (7) et (8) des deux coniques deviendront

$$Ax^2 + By^2 = C, \quad A'x^2 + B'y^2 = C'.$$

Or les hypothèses

$$a^2 > \lambda, \quad b^2 < a^2, \quad \lambda > b^2$$

donnent

$$a^2 - \lambda > 0, \quad b^2 - a^2 < 0, \quad b^2 - \lambda < 0;$$

ainsi l'on a toujours

$$B > 0, \quad C < 0, \quad A' < 0, \quad C' < 0.$$

Toute la discussion porte sur les valeurs de A et de B', qui peuvent s'écrire

$$A = b^2\left[\frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2} - \lambda\right], \quad B' = a^2\left[\frac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2} - \lambda\right],$$

ou

$$A = b^2(\lambda' - \lambda), \quad B' = a^2(\lambda'' - \lambda),$$

en posant

$$\lambda' = \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{b^2} \quad \text{et} \quad \lambda'' = \frac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}.$$

Il est facile de voir que l'on a $\lambda' < b^2$ et $a^2 > \lambda'' > b^2$; il en résulte d'abord que la valeur de A est toujours négative. Le signe de B' est le même que celui de la différence $\lambda'' - \lambda$ des quantités λ'' et λ, toutes deux comprises entre b^2 et a^2. Lorsque λ varie depuis b^2 jusqu'à $\lambda'' = \dfrac{b^2(2a^2 - b^2)}{a^2}$ exclusivement, B' est positif, et, en mettant en évidence les signes des coefficients, les équations des deux coniques sont

$$-Ax^2 + By^2 = -C \quad \text{hyperbole};$$
$$-A'x^2 + B'y^2 = -C' \quad \text{hyperbole}.$$

Si λ varie de λ'' à a^2, on a

$$B' < 0;$$

et, en mettant toujours les signes des coefficients en évidence, les équations des deux coniques sont

$$-Ax^2 + By^2 = -C \quad \text{hyperbole;}$$
$$-A'x^2 - B'y^2 = -C' \quad \text{ellipse réelle.}$$

Résumé. — Si l'on ne tient pas compte des imaginaires, le lieu se compose de trois lignes :

Un cercle réel et deux autres coniques qui sont des hyperboles quand λ est compris entre b^2 et $\frac{b^2(2a^2-b^2)}{a^2}$, et une hyperbole et une ellipse réelle si λ est compris entre $\frac{b^2(2a^2-b^2)}{a^2}$ et a^2 (*).

Note. — MM. Tourrettes et Gambey ont résolu la même question au moyen de calculs analogues à ceux qui précèdent; M. A. Fabre en a donné une solution géométrique fondée sur les propriétés projectives des figures, démontrées dans le *Traité de Poncelet*.

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1874).

Question de Mécanique élémentaire;

PAR M. A. TOURRETTES.

On donne une série de masses pesantes dont les centres de gravité sont distribués le long d'une tige AB *mobile autour d'un de ses points* C, *supposé fixe. La tige est soutenue en* A *par un fil qui passe sur un point* P, *situé sur la verticale de* C, *et dont l'extrémité supporte un poids de masse* μ (**).

(*) Lorsque $\lambda = \frac{b^2(2a^2-b^2)}{a^2} = \lambda''$, $B' = 0$, et l'équation $A'x^2 + B'y^2 = C'$ se réduit à $x = \pm\sqrt{\frac{C'}{A'}} = \pm\sqrt{a^2-b^2}$; elle représente deux droites parallèles à l'axe OY, menées par les foyers réels de deux coniques données. (G.)

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

On demande de déterminer et de discuter les conditions d'équilibre du système.

Je désigne par a, d, l les trois côtés CA, CP, PA du triangle ACP; par α, α', α'',... les distances des masses m, m', m'',... au point C, ces distances étant positives ou négatives suivant qu'elles sont comptées du côté CA ou du côté CB; par m_1 la masse de la tige, et par α_1 la distance de son centre de gravité au point C; par θ l'angle PCB.

Le système étant mobile autour du point fixe C, la somme algébrique des moments des forces est nulle dans la position d'équilibre. Donc

$$m\alpha\sin\theta + m'\alpha'\sin\theta + \ldots + m_1\alpha_1\sin\theta$$
$$= m''\alpha''\sin\theta + \ldots + \mu a \sin\widehat{PAC};$$

mais

$$\sin\widehat{PAC} = \frac{d}{l}\sin\theta.$$

Substituant et divisant tous les termes par $\sin\theta$, il vient

$$l = \frac{\mu a d}{m\alpha + m'\alpha' + \ldots + m_1\alpha_1 - m''\alpha'' - \ldots}.$$

Posant

$$m\alpha + \ldots - m''\alpha'' - \ldots = M\bar{\alpha},$$

on trouve

$$l = \frac{\mu a d}{M\bar{\alpha}}.$$

Connaissant l, on aura facilement la position de la tige dans le cas de l'équilibre. Des points C et P on décrira deux circonférences avec les rayons a et l; les intersections seront les deux positions d'équilibre, symétriques de la verticale PC.

Supposons le point P extérieur au cercle de rayon a; les valeurs limites de l seront $d + a$ et $d - a$, ce qui exige que $\bar{\alpha}$ satisfasse aux inégalités

$$\frac{\mu a d}{M(d-a)} > \bar{\alpha} > \frac{\mu a d}{M(d+a)}.$$

Si P est sur le cercle, on aura

$$\bar{\alpha} > \frac{\mu a}{2M}.$$

Si P est intérieur, il faudra

$$\frac{\mu a d}{M(a-d)} > \bar{\alpha} > \frac{\mu a d}{M(a+d)}.$$

Quand l est égal à l'une des valeurs limites, la tige est verticale : si l'extrémité A est en bas, l'équilibre est instable ; si elle est en haut, l'équilibre est stable.

Jusqu'ici j'ai supposé $\bar{\alpha}$ positif ; si, par la disposition ou la grandeur des masses, le dénominateur de la valeur de l est négatif, il n'y a pas de position d'équilibre correspondante, à moins de supposer a ou d négatif. Si a est négatif, ce point d'attache du fil sera en B ; si d est négatif, le point sera au-dessous de C.

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1871).

Question de Mécanique

(voir 2e série, t. X, p. 472) ;

PAR M. A. TOURRETTES.

Une tige homogène pesante, dont on néglige les dimensions transversales, est en mouvement dans un plan vertical. On donne pour une certaine époque sa vitesse de rotation et la position du centre instantané de rotation, qu'on supposera situé sur la direction même de la tige. En cet instant, la tige heurte par un de ses points, qui devient ainsi momentanément immobile, un *obstacle fixe. On propose de déterminer d'abord les effets du choc, puis le mouvement ultérieur de la tige.*

On examinera comment les effets du choc varient avec la position de l'obstacle fixe.

Soient G le centre de gravité de la tige; C le point qui reçoit le choc; O le centre instantané de rotation; x la distance GC; a la distance OG; Mk^2 le moment d'inertie autour du centre de gravité; ω, ω' les vitesses de rotation autour de G avant et après le choc; v, v' les vitesses de translation du centre de gravité avant et après le choc; enfin, soit R la force du choc.

Il s'agit de déterminer d'abord R, ω' et v'. Nous supposerons, en premier lieu, que la barre est dépourvue d'élasticité; puis nous étudierons le cas où elle serait douée d'une élasticité e.

La rotation autour du centre de gravité donne l'équation

$$(1) \qquad \omega' - \omega = -\frac{Rx}{Mk^2}.$$

La translation du centre de gravité fournit

$$(2) \qquad v' - v = -\frac{R}{M};$$

d'ailleurs

$$(3) \qquad v = a\omega.$$

Il faut encore une autre équation. Nous la trouverons en exprimant qu'au moment du choc le point C est immobile; or sa vitesse est $v' + \omega' x$; donc nous aurons

$$(4) \qquad v' + \omega' x = 0.$$

Éliminant ω, v, v' entre ces équations, on trouve

$$(5) \qquad R = Mk^2\omega \frac{x+a}{x^2+k^2};$$

puis, au moyen de (2) et de (4), il vient

$$(6) \qquad \omega' = \frac{\omega(k^2 - ax)}{x^2 + k^2},$$

$$(7) \qquad v' = -\frac{\omega x(k^2 - ax)}{x^2 + k^2}.$$

Ces trois équations déterminent les effets du choc. Je les discuterai un peu plus loin.

Connaissant ω' et v', il est facile d'avoir le mouvement ultérieur de la tige. Le centre de gravité G décrit une parabole, comme un point de masse M lancé avec la vitesse v' inclinée de α sur l'horizon. Cette parabole, si l'on prend l'origine au centre de gravité à l'instant du choc, a pour équation

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2v'^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Pendant que le point G décrit la parabole, la barre tourne uniformément autour de ce point avec la vitesse ω'.

Si, à l'instant du choc, la barre est horizontale, le point G décrit une verticale, comme un point de masse M lancé de bas en haut avec la vitesse initiale v', pendant que la barre tourne uniformément autour du point G.

Examinons maintenant comment varient les effets du choc avec la position de l'obstacle fixe C. Prenons la dérivée de R par rapport à x

$$\frac{dR}{dx} = -Mk^2\omega \frac{x^2 + 2ax - k^2}{(x^2 + k^2)^2}.$$

Égalant à zéro le numérateur

$$x^2 + 2ax - k^2 = 0,$$

nous aurons les valeurs de x qui répondent au maximum ou au minimum de R ; ces valeurs sont

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + k^2} = \begin{cases} x', \\ x''. \end{cases}$$

On voit sans peine que la première valeur

$$x + a = \sqrt{a^2 + k^2}$$

répond à un maximum

$$R' = \frac{M k^2 \omega}{2(\sqrt{a^2 + k^2} - a)},$$

et la deuxième valeur

$$x + a = -\sqrt{a^2 + k^2}$$

à un minimum

$$R'' = -\frac{M k^2 \omega}{2(\sqrt{a^2 + k^2} + a)};$$

mais, si l'on ne considère que la valeur absolue de R'', on peut dire que les deux racines x', x'' correspondent à des valeurs maxima de R. Le point D, fourni par x', est un centre de percussion maximum de même sens que l'impulsion primitive R ; le point D' correspondant à x'', et situé à gauche du centre instantané, est aussi un centre de percussion maximum, mais de sens contraire à l'impulsion primitive.

Si l'on appelle l la distance du centre de percussion ordinaire au point O, on sait que

$$\sqrt{a^2 + k^2} = \sqrt{al};$$

par suite

$$OD = \sqrt{al}, \quad OD' = -\sqrt{al}.$$

Ainsi OD est moyenne proportionnelle entre les distances du centre instantané de rotation au centre de gravité et au centre de percussion P. Le point D est entre G et P, et l'on peut remarquer que le segment DD' est divisé harmoniquement par G et P, car

$$\overline{OD}^2 = OG.OP.$$

Si l'on substitue dans ω' et v' les valeurs de x qui correspondent au maximum, on trouve

$$\omega' = \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$v'_1 = -\frac{\omega}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + k^2}\right), \quad v'_2 = \frac{\omega}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + k^2}\right).$$

Remarques. — Les valeurs de ω' et v' données par les formules (6) et (7) s'annulent pour $x = \frac{k^2}{a}\cdot$ Cette distance est celle du centre de percussion ordinaire P. On voit que, quand la barre rencontre l'obstacle fixe par ce point, les vitesses de rotation et de translation sont détruites. Si $x = 0$, c'est-à-dire si la barre frappe par son centre de gravité, $R = Ma\omega$, $\omega' = \omega$, $v' = 0$. La vitesse de translation seule est détruite, et la rotation est la même qu'avant le choc. Si l'on cherche la valeur de R pour $x = \frac{k^2}{a}$, on trouve $Ma\omega$. Ainsi la percussion est la même que quand le corps frappe par son centre de gravité.

Passons au cas d'une barre élastique. Soit e le coefficient d'élasticité.

La percussion totale est plus grande que dans le cas d'une élasticité nulle dans le rapport de $1 + e$ à 1. Nous aurons donc

$$R_e = M k^2 \omega (1 + e) \frac{x + a}{x^2 + k^2},$$

$$\omega'_e = -\frac{\omega[ex^2 + a(1 + e)x - k^2]}{x^2 + k^2},$$

$$v'_e = \frac{\omega x[ex^2 + a(1 + e)x - k^2]}{x^2 + k^2}.$$

Si l'on cherche les valeurs de x qui rendent R_e maximum, on trouve les mêmes résultats qu'au cas de l'élasticité nulle. Ces valeurs de x, substituées dans ω'_e, v'_e, donneraient les vitesses de rotation et de translation correspondantes, et le problème se poursuivrait sans difficulté.

QUESTIONS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES (ANNÉE 1874).

(ÉNONCÉS.)

Aout 1874.

1. On fait tourner une parabole autour de la tangente au sommet; déterminer, sur la surface de révolution ainsi engendrée, une ligne telle, qu'en chacun de ses points la section normale de la surface qui passe par la tangente à la courbe ait un rayon de courbure infini.

2. Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur la surface d'un cylindre droit à axe vertical, et attiré vers un point fixe par une force proportionnelle à la distance; pression sur le cylindre.

Novembre 1874.

1. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} + xf'(t) - y\varphi'(t) = 0, \quad \frac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + yf'(t) = 0.$$

2. Étant donné le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

évaluer l'aire de la partie de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Un mobile M, attiré vers un point O par une force fonction de la distance, se meut de manière qu'il se trouve constamment sur une spirale logarithmique, ayant O pour pôle et tournant autour de ce point avec une vitesse angulaire constante donnée ; quelle est la loi de la force attractive? Déterminer la nature la plus générale de la trajectoire qu'un mobile peut décrire sous l'influence d'une pareille force.

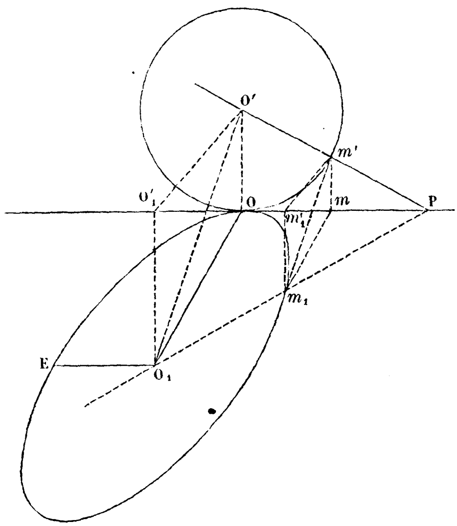
ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION OBLIQUE D'UN CERCLE. — CONSTRUCTION SIMPLIFIÉE DES AXES D'UNE ELLIPSE DONT ON CONNAIT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS ;

PAR M. A. JULLIEN,
Professeur de Sciences.

1. Soit O' (*fig.* 1) un cercle placé sur le plan vertical de projection et tangent à la ligne de terre. Rappelons les constructions par lesquelles on obtient l'ombre portée d'un tel cercle sur le plan horizontal, quand on l'éclaire au moyen de rayons parallèles à une direction donnée OO_1, $O'O'_1$. On sait que cette ombre portée, ou projection oblique, est une ellipse qui a pour centre O_1, qui est tangente à la ligne de terre en O, et qui a pour diamètres conjugués la droite O_1O et une parallèle O_1E à la ligne de terre, égale au rayon du cercle.

Pour avoir l'ombre portée d'un point quelconque m' de la circonférence, on peut déterminer la trace horizontale m_1 du rayon lumineux mm_1, $m'm'_1$ mené par m' ; mais observons que, O_1P étant la projection oblique de la droite $O'P$ qui passe par m', le point m_1 doit se trouver sur O_1P ; observons, en outre, que les triangles O_1OO', m_1mm' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que, par suite, les droites $m_1 m'$ et $O_1 O'$ sont parallèles. Si donc on prolonge $O'm'$

Fig. 1.

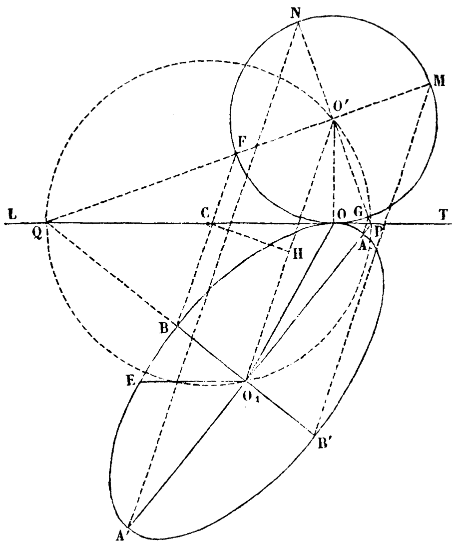


jusqu'en P, et si l'on joint $O_1 P$, une parallèle à la droite $O_1 O'$ menée par le point m' donnera m_1 sur $O_1 P$.

2. Chaque système de deux diamètres perpendiculaires du cercle fournit, en projection oblique, un système de deux diamètres conjugués de l'ellipse, et l'on aura les axes de la courbe, si l'on détermine le système du cercle qui se projette suivant deux droites perpendiculaires.

Décrivons un cercle (*fig.* 2) qui passe par les deux points O_1, O' et qui ait son centre C sur la ligne de terre. P et Q étant les points où ce cercle et la ligne de terre se rencontrent, joignons les points O_1 et O' aux points P et Q. Les angles $PO'Q$ et PO_1Q sont droits comme inscrits dans une demi-circonférence; par conséquent les axes de l'ellipse sont les droites AA′, BB′ suivant lesquelles se projettent les diamètres GN, FM du cercle.

Fig. 2.



3. De ce qui précède résulte un moyen facile de construire les axes d'une ellipse dont on a deux diamètres conjugués O_1O et O_1E. Par le point O on mène une parallèle LT à O_1E; on élève à LT une perpendiculaire OO′ égale à O_1E, et l'on décrit un cercle ayant son centre sur LT et passant par O_1 et O′. Les droites O_1P et O_1Q, qui vont du point O_1 aux deux points P et Q où le cercle coupe la ligne LT, donnent les directions des axes. Il est remarquable que cette construction soit précisément celle à laquelle conduit le théorème de Chasles sur les segments de la tangente parallèle à l'un des diamètres conjugués.

Quant aux longueurs des axes, elles se déterminent bien simplement : il suffit de décrire le cercle O', ce qui est aisé, puisque nous avons le centre et le rayon de ce cercle, de joindre le point O' aux points P et Q, et de mener des parallèles à la droite O_1O' par les points où les droites ainsi obtenues rencontrent la circonférence O'. Ces parallèles coupent les axes en des points qui sont les sommets de l'ellipse.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. Gambey.* — La formule $S = p'R$, que M. C. Chadu propose de démontrer, est indiquée comme exercice dans la Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, page 315, n° 457. Il n'y a de différence que dans l'énoncé ; mais on sait que le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné et celui qu'on forme en joignant les pieds des hauteurs de ce dernier sont une seule et même chose.

Quant à la première partie de la même question, elle est immédiatement résolue par les formules suivantes faciles à établir :

$$p' = h \sin A = h' \sin B = h'' \sin C,$$

ou par celles-ci, qui en sont une conséquence,

$$p' = a \sin B \sin C = b \sin C \sin A = c \sin A \sin B,$$

et dans lesquelles a, b, c, h, h', h'' sont les côtés et les hauteurs du triangle ABC.

Oserai-je, à mon tour, proposer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* les questions suivantes, analogues à celles dont je viens de m'occuper ?

QUESTIONS. — *Soient* A, B, C, h, h', h'' *les angles et* *les hauteurs d'un triangle* ABC ; $2p'$, r', R' *le périmètre et les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs de* ABC ; S *et* S' *les surfaces des deux triangles :*

1° *Construire* ABC, *connaissant les angles* A, B, C *et le rayon* r', *ou bien les angles et la surface* S'.

2° *Démontrer les formules*

$$S = \frac{hh'h''}{2p'} = 2R'r' \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

2. M. P. Barbarin, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV, nous adresse une Note relative aux propriétés de la courbe qui a pour équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$.

1° Cette courbe est le lieu géométrique des sommets des paraboles tangentes à deux droites rectangulaires fixes OX, OY, et dont les foyers appartiennent à la circonférence décrite du point de rencontre de ces deux droites, comme centre, avec un rayon égal à r.

2° Elle est l'enveloppe d'une droite de longueur constante r, dont les deux extrémités glissent sur les deux droites fixes et rectangulaires OX, OY.

3° Elle est encore le lieu d'un point d'un cercle roulant intérieurement, sans glisser, sur un cercle de rayon quadruple.

C'est ce que M. Barbarin démontre par des calculs et des constructions géométriques assez simples.

On pourrait ajouter que l'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$ représente aussi l'enveloppe des ellipses dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites OX, OY, et dans lesquelles la somme des demi-axes $a + b$ est une quantité constante r.

3. Nous avons reçu de MM. Astor, Vasselin, Edmond de Lamaze, de Cuerne et Moret-Blanc les solutions des

questions 1161, 1162, 1165, et de la question proposée au concours d'admission à l'Ecole Normale supérieure (année 1874); ces solutions nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro précédent des *Nouvelles Annales*.

4. M. Goulin, élève au Lycée de Rouen, nous fait observer que nous avons oublié de mentionner sa solution de la question 1139; c'est un oubli que nous nous empressons de réparer.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Traité de Trigonométrie, par SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut, professeur au Collége de France. In-8, avec figures dans le texte ; 5e édition, revue et augmentée; 1875. (L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, en date du 5 août 1862). Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix : 4 francs.

Lois nouvelles des puissances des nombres, Propriétés nouvelles des fractions décimales périodiques (Extrait succinct d'un Mémoire) ; par GUSTAVE DE CONINCK, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55 (1875).

Introduction à l'étude de l'Homographie, Divisions et faisceaux homographiques, Divisions et faisceaux en involution ; par J.-B.-V. REYNAUD, professeur agrégé de Mathématiques pures et appliquées au Lycée de Toulouse. Prix : 1 fr. 50 c. Paris, Ch. Delagrave, libraire, rue des Écoles, 58. Toulouse, Ed. Privat, libraire-éditeur, rue des Tourneurs, 45 (1875).

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tome VII (1874).

Juin. — Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV^e livre des *Éléments* d'Euclide. Lettre de M. Th.-H. *Martin*, Membre de l'Institut, à D.-B. Boncompagni. Extrait du *Kitâb al Mobdrek d'Abau'l wfa al Djouëini* transcrit d'après le manuscrit 1912 du *Supplément arabe* de la Bibliothèque nationale de Paris, et traduit pour la première fois en français par *Aristide Marre*, membre de la Société asiatique de Paris.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Juillet. — Intorno alla vita ed ai lavori di *Andalò di Negro*, matematico ed astronomo genovese del secolo decimoquarto, e d'altri matematici e cosmografi genovesi. Memoria di *Cornelio de Simoni*.

Catalogo dei lavori di *Andalò di Negro*. B. Boncompagni.

Aout. — Intorno a due scritti di *Raffaele Gualterotti*, Fiorentino, relativi alla apparizione di una nuova stella nell'anno 1604. Nota dell' ing^{re} *Ferdinando Jacoli*.

Lettere inedite di *Raffaele Gualterotti*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SEPTEMBRE. — Notizie storiche sulle frazioni continue del secolo decimoterzo al decimosettimo; per *Antonio Favaro.*

OCTOBRE. — Notizie storiche sulle frazioni continue del secolo decimoterzo al decimosettimo ; per *Antonio Favaro* (continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

NOVEMBRE. — Notizie storiche sulle frazioni continue del secolo decimoterzo al decimosettimo ; per *Antonio Favaro* (continuazione).

DÉCEMBRE. — Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo; per *Antonio Favaro* (fine).

Paragone di due metodi per la determinazione approssimativa di quantità irrazionali ; del Dre *Sigismondo Günther.* Traduzione dal tedesco del Dre *Alfonso Sparagna.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Tirages à part. — Intorno a due scritti di *Raffaele Gualterotti*, Fiorentino, relativi alla apparizione di una nuova stella avvenuta nell'anno 1604. Nota dell' ingrre *Ferdinando Jacoli*, professore nella R. Scuola degli allievi macchinisti di Marina in Venezia. (Estratto dal *Bullettino*, tomo VII, agosto 1874.)

Notizie storiche sulle frazioni continue, del secolo decimoterzo al decimosettimo ; per *Antonio Favaro*, professore nella regia Università di *Padova.*

(Estratto dal *Bullettino*, tomo VII, settembre-dicembre 1874.)

Paragone di due metodi per la determinazione approssimativa di quantità irrazionali del Dre *Sigismondo Günther*, traduzione dal tedesco del Dre *Alfonso Sparagna.* (Estratto del *Bullettino*, tomo VII, dicembre 1874).

Roma, tipografia delle scienze matematiche e fisiche, via lata, n° 211 (1875).

I principi della moderna Geometria, esposti da G. PERI e G. BELLACCHI (*), professori di Matematiche nell' Istituto tec-

---

(*) L'un des deux auteurs de cet intéressant Ouvrage, le professeur G. Peri, est mort en décembre dernier. Les regrets que ce savant professeur a laissés ont été éloquemment exprimés par son ancien collaborateur, le très-honorable M. Bellacchi. (G.)

nico provinciale di *Firenze*, *per dimostrare le proprietà delle curve e superficie di* 2[e] *grado*, *in conformità del nuovi programmi ufficiali*, *per gli Instituti tecnici del regno*, libri tre, seguiti da un *Appendice sul poligono di multiplicazione, inalzamento a potenza ed estrazione di radice dalle linee rette.* 1 volume con 24 tavole, prezzo : L. 9, 25. Pistoia, coi tipi di G. Niccolai.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 142

(voir 1[re] série, t. VI, p. 134);

PAR M. H. BROCARD.

Un cône droit du second degré étant coupé par un plan perpendiculaire à un plan principal, concevons une sphère concentrique au cône et tangente au plan sécant: le plan tangent à cette sphère, mené perpendiculairement à l'axe du cône, coupe le plan principal suivant une droite dont la partie interceptée dans le cône est égale au paramètre de la section conique.

(JACQUES BERNOULLI.)

Soient SA, SB (*) les deux génératrices du cône situées dans le plan principal considéré ; AB la trace du plan sécant perpendiculaire à ce plan principal ; P la projection de S sur AB ; la droite SP sera le rayon de la sphère. Soit SI le rabattement de SP sur l'axe du cône ; par le point I menons, dans le plan principal, la droite HIK perpendiculaire à SI, et limitée aux génératrices

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

SA, SB. Il s'agit de démontrer que HIK est le paramètre de la conique d'intersection du cône et du plan AB.

En effet, si l'on désigne par α l'angle SAB; par 2β celui du cône, et par d la distance SA, la conique rapportée à l'axe ABX, et à une perpendiculaire AY située dans le plan sécant, a pour équation

$$y^2 = \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta} x^2,$$

où $\dfrac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta}$ représente le paramètre de la conique. Or, dans le triangle rectangle SIK, on a $\mathrm{IK} = \mathrm{IS} \operatorname{tang}\beta = \mathrm{SP} \operatorname{tang}\beta = d \sin\alpha \operatorname{tang}\beta$. La proposition est donc établie.

Cette remarque simple mérite d'être signalée dans les cours de Mathématiques spéciales. Elle conduit à une construction directe du paramètre, lorsqu'on applique la méthode de *Dandelin*.

Question 1167

(voir 2e série, t. XIV, p. 192);

PAR M. F. STORDEUR,
Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Démontrer la formule

$$\frac{4}{\pi} = \operatorname{tang} 45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{4} + \ldots$$

(L. BOURGUET.)

Je circonscris au cercle, de rayon égal à l'unité, des polygones réguliers de 4, 8, ..., 2^{n+2} côtés; si $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $p_0, p_1, \ldots, p_n$ désignent respectivement les valeurs des côtés et des périmètres de ces polygones, on aura

$$a_0 = 2 \operatorname{tang} 45^\circ, \ldots, a_n = 2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n};$$

$$p_0 = 2^3 \operatorname{tang} 45^\circ, \ldots, p_n = 2^{n+3} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}.$$

Le nombre π est, comme on sait, la limite de $\frac{p_n}{2}$ quand n croît indéfiniment; il en résulte

$$\frac{4}{\pi} = \lim \frac{8}{p_n} = \lim \frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}}.$$

Cela posé, la formule connue

$$\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tang} a} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{a}{2}$$

donne successivement

$$\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tang} 45^\circ} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2},$$

$$\frac{1}{2^2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2}} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^{n-1}}} + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n};$$

additionnant ces n équations, et observant que

$$\frac{1}{\operatorname{tang} 45^\circ} = \operatorname{tang} 45^\circ,$$

il vient

$$\frac{1}{2^n \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}} = \operatorname{tang} 45^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{45^\circ}{2^n}.$$

En faisant croître n indéfiniment, le premier membre de cette dernière équation tend vers $\frac{4}{\pi}$, et le second tend vers la série convergente de l'énoncé; la proposition est donc démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Meyl, ancien officier d'Artillerie, à la Haye; L.-P. de Cuerne, à Liége; Edmond de Lamaze, élève des Dominicains, à l'école de Sorrèze; Brocard; Moret-Blanc; Chadu; Moreau; de Virieu.

Question 1168

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 192);

Par M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

(1) $$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

En prenant x pour base d'un système de numération, nous aurons $y^2 = 11111$. Cherchons donc, pour trouver la valeur de y, à extraire la racine carrée de ce nombre par le procédé ordinaire :

$$\begin{array}{c|l}
1.11\;11 & 10a \\ \cline{2-2}
1.1.11 & \\
 & 20a \\
2a.a^2 & \quad a \\ \cline{1-1}
0.0 &
\end{array}$$

Le premier chiffre de la racine est 1; le second est 0, puisque 1 ne peut contenir 2; quant au troisième, en le désignant par a, il faut, pour que l'opération se fasse exactement, que l'on ait

$$a^2 = 11 \quad \text{et} \quad 2a = 11,$$

et par suite

$$a^2 = 2a = x + 1, \quad \text{d'où} \quad a = 2 \text{ et } x = 3.$$

D'ailleurs $x = 1$ ne satisfait pas à l'équation proposée, donc la seule solution en nombres entiers positifs a lieu pour $x = 3$, et elle donne $y = 3^2 + 2 = 11$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Brocard et Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1178. Soient P un point pris sur l'axe d'une conique à centre, et MN une tangente quelconque limitée aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe: démontrer que la puissance du point P, par rapport à la circonférence de diamètre MN, est constante.

(LAISANT.)

1179. Soient MN une tangente quelconque à une parabole, limitée en M à la tangente au sommet et en N à une perpendiculaire fixe quelconque, élevée sur l'axe de la courbe; P un point fixe quelconque pris sur cet axe : démontrer que la puissance du point M, par rapport à la circonférence de diamètre NP, est constante.

(LAISANT.)

1180. Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base.

(ÉDOUARD LUCAS.)

RECTIFICATIONS.

Tome XIV, page 75, ligne 5, en remontant :

au lieu de $t = 8n \pm 1$, *lisez* $t = 8n \pm 3$.

» page 239, ligne 4, en remontant :

au lieu de Leomare, *lisez* Lamaze.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $2q$ LETTRES ÉGALES DEUX A DEUX, OU TROIS LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES

(voir même tome, p. 299);

PAR M. VACHETTE,
Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

VII. *Abaissement d'ordre du nombre* $N_q(r, u, 0)$, *quand u n'est pas nul.*

L'espèce $N_q(r, u, 0)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, u, 0)$ tournantes; si l'on commence une tournante par un des u intervalles S_4, on comptera $\frac{u}{2q} N_q(r, u, 0)$ permutations.

Autour d'un S_4, $\underline{abab}$, que l'on enlève, il peut se produire :

1° Un S_4 ou un assemblage équivalent de quatre lettres

$$\left.\begin{array}{l}\underline{fefe}\\ \underline{feef}\end{array}\right\} \text{par les formes} \left\{\begin{array}{l}fe\,\underline{abab}\,fe\\ fe\,\underline{abab}\,ef;\end{array}\right.$$

l'assemblage $\underline{feef}$ équivaut à un S_4, car il n'existe plus de lettres pareilles à e et f dans le reste de la permutation;

2° Un S_3

$$efe \text{ par les formes réciproques} \left\{\begin{array}{l}e\,\underline{abab}\,fe\\ ef\,\underline{abab}\,e;\end{array}\right.$$

3° Un assemblage irrégulier de trois lettres

$$\left.\begin{array}{c}\underline{ef}\\ \underline{fe}\end{array}\right\}\text{ par les formes réciproques }\left\{\begin{array}{l}e\,\underline{abab}\,ef\\ ef\,\underline{abab}\,e;\end{array}\right.$$

4° Aucun intervalle nouveau.

Dans le deuxième et le troisième cas, la lettre f ne fait plus partie d'aucun autre intervalle; car elle appartiendrait à un S_3 n'ayant point son complémentaire, ce qui est contraire à l'hypothèse $\nu = 0$.

Pour le premier, le deuxième et le quatrième cas, on enlève S_4 et l'on abaisse ainsi à l'ordre $q - 2$; le nombre de permutations relatives à a et b, ainsi compté, devra être multiplié par $q(q-1)$; car il y a $q(q-1)$ manières de faire un S_4 avec deux des q lettres distinctes.

Dans le premier cas, on obtient l'espèce $N_{q-2}(r, u, 0)$; un S_4 est remplacé par un autre. Chacune des tournantes de cette espèce, commencée par un des u intervalles S_4, fournit $2u$ permutations à l'espèce cherchée, si l'on place $\underline{abab}$ au milieu de cet S_4 dont on alterne ou non les deux dernières lettres. La part sera

$$\frac{2u}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u, 0).$$

Dans le deuxième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u-1, 1)$. Le nombre des S_4 a diminué de 1, et l'on a obtenu un nouvel S_3 sans son complémentaire. Chacune de ces tournantes, commencée par cet S_3, fournit deux permutations à l'espèce cherchée; car on peut placer $\underline{abab}$ de deux manières dans cet S_3. La part sera

$$\frac{2}{2(q-2)} N_{q-2}(r, u-1, 1).$$

Dans le quatrième cas, on obtient $N_{q-2}(r, u-1, 0)$;

le nombre des S_4 a diminué de 1. Il reste

$$2q-4-4r-3(u-1)$$

lettres, ou isolées, ou initiales d'un des intervalles. Chacune des tournantes commencée par une de ces lettres fournit $2q-4r-3u-1$ permutations à l'espèce cherchée, en plaçant $\underline{ab}\,ab$ devant cette lettre. La part sera

$$\frac{2q-4r-3u-1}{2(q-2)}\,N_{q-2}(r,u-1,0).$$

La somme de ces trois parts, multipliée par $q(q-1)$, sera

$$\begin{aligned}\frac{q(q-1)}{2(q-2)}&[2uN_{q-2}(r,u,0)+2N_{q-2}(r,u-1,1)\\&+(2q-4r-3u-1)N_{q-2}(r,u-1,0)].\end{aligned}$$

Dans le troisième cas, celui des figures réciproques $e\,\underline{ab}\,ab\,ef$, $fe\,\underline{ab}\,ab\,e$, on enlève $e\,\underline{ab}\,ab\,e$, et l'on abaisse à l'ordre $q-3$; le nombre des permutations relatives aux trois lettres a, b, e, ainsi compté, devra être multiplié par $q(q-1)(q-2)$, car il y a $q(q-1)(q-2)$ manières de former une séquence $e\,\underline{ab}\,ab\,e$ avec trois des q lettres distinctes. Or on obtient ainsi, dans l'ordre $q-3$, des espèces composées, quant aux intervalles, de la même manière que les permutations d'ordre $q-2$, fournies par une des deux figures du premier cas et par celles du deuxième et du quatrième cas. La part sera donc, en changeant q en $q-1$ dans la somme précédente, multipliée par $q(q-1)(q-2)$ au lieu de $q(q-1)$, et en divisant par 2 le premier terme de la parenthèse, car, $e\,\underline{ab}\,ab\,e$ placé au milieu d'un S_4, $\underline{fg}\,fg$, ne devra donner que la seule figure *fge* $\underline{ab\,ab}$ *efg*, et jamais la figure *gfe* $\underline{ab\,ab}$ *efg*,

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{2(q-3)}\left[u\mathrm{N}_{q-3}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 0)\right].$$

Si l'on ajoute les deux sommes, on obtient

$$\frac{u}{2q}\mathrm{N}_q(r, u, 0);$$

divisant tout par $q(q-1)$, on a la formule $(r, u, 0)$

$$\frac{u}{2q^2(q-1)}\mathrm{N}_q(r, u, 0)$$
$$= \frac{1}{2(q-2)}\left[2u\mathrm{N}_{q-2}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-2}(r, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 1)\mathrm{N}_{q-2}(r, u-1, 0)\right]$$
$$+ \frac{q-2}{2(q-3)}\left[u\mathrm{N}_{q-3}(r, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(r, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 4r - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 0)\right].$$

VIII. *Cas particuliers de la formule précédente.*

Si l'on y fait $r = 0$, on obtient la formule $(0, u, 0)$

$$\frac{u}{2q^2(q-1)}\mathrm{N}_q(0, u, 0)$$
$$= \frac{1}{2(q-2)}\left[2u\mathrm{N}_{q-2}(0, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-2}(0, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 3u - 1)\mathrm{N}_{q-2}(0, u-1, 0)\right]$$
$$+ \frac{q-2}{2(q-3)}\left[2u\mathrm{N}_{q-3}(0, u, 0) + 2\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 1)\right.$$
$$\left. + (2q - 3u - 3)\mathrm{N}_{q-3}(0, u-1, 0)\right].$$

Elle en comprend deux autres, pour $u = 1$ et $u = 2$, relatives à deux des espèces que forment $\mathrm{C}_{q,2}$; ce sont les formules $(0, 1, 0)$ et $(0, 2, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2q^2(q-1)}\,&N_q(0,1,0)\\ &= C_{q-2,2} + \frac{1}{q-2}\,[N_{q-2}(0,1,0) + N_{q-2}(0,0,1)]\\ &\quad + (q-2)C_{q-3,2} + \frac{q-2}{2(q-3)}\,[N_{q-3}(0,1,0) + 2N_{q-3}(0,0,1)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^2(q-1)}\,&N_q(0,2,0)\\ &= \frac{1}{q-2}\Big[2N_{q-2}(0,2,0) + N_{q-2}(0,1,1)\\ &\qquad + \frac{2q-7}{2}\,N_{q-2}(0,1,0)\Big]\\ &\quad + \frac{q-2}{q-3}\Big[N_{q-3}(0,2,0) + N_{q-3}(0,1,1)\\ &\qquad + \frac{2q-9}{2}\,N_{q-3}(0,1,0)\Big].\end{aligned}$$

Remarques. — 1° La formule $(0, 1, 0)$ ne peut s'appliquer qu'à partir de $q = 6$.

On trouve directement (IV), $N_2(0, 1, 0) = 2$.

Il n'y a ni $N_3(0, 1, 0)$, ni $N_4(0, 1, 0)$; car dans le premier cas $\underline{abab}$ entraîne $\underline{abab}\,cc$, et dans le deuxième cas $\underline{abab}\,\underline{cdcd}$.

Pour $N_5(0, 1, 0)$, il ne faut prendre dans la formule que le premier terme

$$\frac{1}{50.4}N_5(0,1,0) = C_{3,2} = P_3, \quad \text{d'où} \quad N_5(0,1,0) = 10P_5;$$

les autres termes de la formule n'existent point, à l'exception du terme $N_2(0, 1, 0)$ qui ne peut rien fournir; car si l'on place $e\,\underline{abab}\,e$ au milieu de $\underline{cdcd}$, on obtient $cde\,\underline{abab}\,ecd$ ou $e\,\underline{abab}\,e\;\underline{cdcd}$ de l'espèce $N_5(0, 2, 0)$. Ce résultat se vérifie directement; on a la seule variété asymétrique $\underline{ab\,ab}\,cde\,cde$; donc

$$N_5(0, 1, 0) = 1.2.5\,P_5.$$

2° La formule (0, 2, 0) ne peut aussi s'appliquer qu'à partir de $q = 6$. Il ne peut y avoir de permutations de cette espèce qu'à partir de $q = 4$.

Pour $q = 4$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec $\underline{ef\,ef}$ on peut placer $\underline{ab\,ab}$ de deux manières, soit avant un e, soit avant un f, pour obtenir deux S_4, tandis qu'en général on ne le place que d'une seule; en outre, la tournante $N_2(0, 1, 0)$ est incomplète et ne contient que deux permutations au lieu de quatre; il faut donc multiplier par 4 le résultat que donne la formule; or elle donne $\frac{1}{48}N_4(0, 2, 0) = \frac{1}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{1}{2}$, et l'on prendra $N_4(0, 2, 0) = 48.2 = 4P_4$ trouvé directement (IV).

Pour $q = 5$, la formule contient le seul terme $N_2(0, 1, 0)$. Or avec $\underline{ef\,ef}$ on peut placer $c\,\underline{ab\,ab}\,c$ de deux manières au lieu d'une, et l'autre raison subsiste encore : il faut multiplier par 4 ; or la formule donne

$$\frac{1}{100}N_5(0, 2, 0) = \frac{3}{4}N_2(0, 1, 0) = \frac{3}{2},$$

et l'on prendra $N_5(0, 2, 0) = 100.6 = 5\,P_5$. On le vérifie directement ; il n'y a qu'une seule variété, symétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{ab\,ab}\,e\,\underline{cd\,cd}\,e$; donc

$$N_5(0, 2, 0) = 1.2.5P_5.\tfrac{1}{2} = 5\,P_5.$$

Pour $q = 6$, on obtient

$$\frac{1}{36.5}N_6(0, 2, 0) = \tfrac{1}{4}.2N_4(0, 2, 0) = 2\,P_4,$$

d'où

$$N_6(0, 2, 0) = 12\,P_6.$$

On le vérifie, il ne peut exister que les deux variétés suivantes, symétriques de fraction $\frac{1}{2}$,

$$\left.\underline{abab}\;\right|\begin{matrix} cf \\ cf \end{matrix}\left|\;\underline{cdcd}\;\right|\begin{matrix} cf \\ fe \end{matrix}\Bigg|$$

et

$$N_6(0, 2, 0) = 2.2.6P_6.\tfrac{1}{2} = 12P_6.$$

IX. *Abaissement d'ordre du nombre* $N_q(r, 0, 0,)$; *cas particulier.*

L'espèce $N_q(r, 0, 0)$ contient $\frac{1}{2q} N_q(r, 0, 0)$ tournantes, et si l'on commence une des tournantes par un des $2r$ intervalles S_3, on comptera $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$ permutations.

Si l'on enlève les extrêmes d'un des S_3, les deux a de $\underline{aba}$, autour de b, il peut se former un S_4, un S_3, ou rien :

$$\left.\begin{matrix} \underline{bc\,bc} \\ \underline{cb\,cb} \end{matrix}\right\} \text{ par les formes réciproques } \left\{\begin{matrix} \underline{aba}\,\underline{cbc} \\ \underline{cbc}\,\underline{aba} \end{matrix}\right. ;$$

$\underline{dbd}$ par la forme $d\,\underline{aba}\,d$ (et dans ce cas il existe un S_3 complémentaire de $\underline{dbd}$, $\underline{cbc}$ par exemple).

On multipliera par q le nombre de permutations ainsi compté relativement à a.

S'il se forme un S_4, on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 1, 0)$; le nombre des couples de S_3 complémentaires a diminué de 1, et il s'est formé un S_4. Chacune de ces tournantes, commencée par S_4, donne deux permutations à l'espèce cherchée si l'on entoure de deux a l'une des extrêmes de S_4. La part sera

$$\frac{2}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 1, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q-1} N_{q-1}(r-1, 1, 0).$$

S'il se forme un S_3, on a l'espèce $N_{q-1}(r, 0, 0)$; le S_3 enlevé est remplacé par un autre de même médiane.

Chacune de ces tournantes, commencée par un des $2r$ intervalles S_3, fournit $2r$ permutations à l'espèce cherchée; on entoure de deux a l'une des médianes de ces S_3. La part sera

$$\frac{2r}{2(q-1)} N_{q-1}(r, 0, 0) \quad \text{ou} \quad \frac{r}{q-1} N_{q-1}(r, 0, 0);$$

sinon, on a l'espèce $N_{q-1}(r-1, 0, 1)$; le nombre des couples de $2S_3^c$ a diminué de 1, et il s'est formé un S_3 distinct. Chaque tournante, commencée par le S_3 distinct, fournit une permutation à l'espèce cherchée; on entoure de deux a la lettre b isolée, semblable à la médiane du S_3 distinct. La part sera

$$\frac{1}{2(q-1)} N_{q-1}(r-1, 0, 1).$$

Si l'on ajoute les trois parts, et qu'on multiplie par q, on obtient $\frac{r}{q} N_q(r, 0, 0)$; multipliant par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule $(r, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{r(q-1)}{q^2} N_q(r, 0, 0) = N_{q-1}&(r-1, 1, 0) \\ &+ rN_{q-1}(r, 0, 0) + \tfrac{1}{2}N_{q-1}(r-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Cette formule, pour $r = 1$, comprend la formule $(1, 0, 0)$, relative à l'une des espèces qui forment $C_{q,2}$

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{q^2} N_q(1, 0, 0) = N_{q-1}&(0, 1, 0) \\ &+ N_{q-1}(1, 0, 0) + \tfrac{1}{2}N_{q-1}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Elle ne peut s'appliquer à $q = 3$, on a trouvé directement (IV)

$$N_3(1, 0, 0) = 3P_3 = 18.$$

Or elle donnerait

$$\tfrac{2}{9}N_3(1, 0, 0) = N_2(0, 1, 0) = 2, \quad \text{d'où} \quad N_2(0, 1, 0) = 9;$$

c'est que la tournante de $N_2(o, 1, o)$, $\underline{ab\,ab}$ est incomplète à deux permutations au lieu de quatre; le résultat de la formule doit être multiplié par 2.

Pour $q = 4$, on trouve

$$\tfrac{3}{16} N_4(1, o, o) = N_3(1, o, o) = 3P_3,$$

d'où

$$N_4(1, o, o) = 4P_4 \text{ (IV)}.$$

X. *Calcul direct de* $N_{2\nu}(o, o, \nu)$, $N_{2u}(o, u, o)$ et $N_{3r}(r, o, o)$.

1° Une permutation de l'espèce $N_{2\nu}(o, o, \nu)$ peut avoir, relativement à la médiane b de l'un des ν intervalles S_3, les quatre formes suivantes :

$$\underline{aba}\,f\,\underline{cdc}\,bd\,\underline{efe},$$
$$\underline{ba}\,f\,\underline{cdc}\,bd\,\underline{efe}\,\underline{a},$$
$$\underline{a}f\,\underline{cdc}\,bd\,\underline{efe}\,\underline{ab},$$
$$bd\,\underline{efe}\,\underline{aba}\,f\,\underline{cdc},$$

selon que l'intervalle $\underline{aba}$ est initial, ou coupé aux extrêmes, ou que la deuxième lettre b (semblable à la médiane) commence la permutation. Si l'on suppose chaque S_3 condensé en sa médiane, on obtient une $B_{\nu,2}$, (*voir* le premier article, I), car la lettre isolée b, séparée de la médiane b par deux lettres au moins dans la permutation primitive, en est séparée par une lettre au moins dans la permutation résultante.

Chacune de ces $B_{\nu,2}$ contient ν des 2ν lettres distinctes d'une $N_{2\nu}$; pour reproduire les $N_{2\nu}$, il faut entourer l'une des deux lettres d'un des ν couples de lettres d'une $B_{\nu,2}$ avec un des ν autres couples qui ont été éliminés; on peut le faire de deux manières pour chacun des $\nu - 1$ couples de la $B_{\nu,2}$ qui n'a point sa lettre en tête de la permutation et de quatre manières pour l'autre couple, eu égard aux quatre formes examinées plus haut; ainsi, avec l'un de arrangements d'espèce $A_{2\nu,\nu}$ des ν couples qui ferment, on obtient, pour une des $B_{\nu,2}$, $2^{\nu+1}$ permutations; pour tous les arrangements, on en a $2^{\nu+1}A_{2\nu,\nu}$, et pour toutes les $B_{\nu,2}$, on a la formule (2ν)

$$N_{2\nu}(0, 0, \nu) = 2^{\nu+1}A_{2\nu,\nu}B_{\nu,2}.$$

Si $\nu = 2$,

$$N_4(0, 0, 2) = 2^3 A_{4,2} B_{2,2} = 2^3.4.3.2 = 8P_4,$$

comme on l'a vérifié (IV).

Si $\nu = 3$,

$$N_6(0, 0, 3) = 2^4 A_{6,3} B_{3,2} = 2^4.6.5.4.4P_3 = 64P_6.$$

2° Soit, pour $u = 5$, une des tournantes de l'espèce $N_{2u}(0, u, 0)$

$$\underline{abab}\;\underline{cdcd}\;\underline{efef}\;\underline{ghgh}\;\underline{ikik}.$$

Il n'y a que cette variété, symétrique de fraction $\frac{1}{u}$; donc $N_{2u}(0, u, 0) = \frac{1}{u}4uP_{2u}$, et l'on a la formule ($2u$)

$$N_{2u}(0, u, 0) = 4P_{2u}$$

et, si $u = 3$,

$$N_6(0, 3, 0) = 4P_6;$$

3° Soit, pour $r = 3$, une des tournantes de l'espèce $N_{3r}(r, 0, 0)$

$$\underline{aba}\;\underline{cec}\;\underline{ded}\;\underline{fhf}\;\underline{gbg}\;\underline{ihi}.$$

Si l'on condense chaque S_3 en une de ses lettres extrêmes, on obtient

$$acdfgi,$$

une des permutations de l'espèce $A_{3r,2r}$, ou l'un des arrangements de $3r$ lettres distinctes, prises $2r$ à $2r$.

Pour revenir des $A_{3r,2r}$ aux N_{3r}, il faut doubler chacune des $2r$ lettres distinctes d'une $A_{3r,2r}$ et intercaler une des r autres lettres distinctes entre chacun des binaires ainsi formés. Ces r lettres, rangées dans un des ordres possibles, forment une permutation d'espèce P_r : la première lettre de cette P_r occupant la première place vacante dans la permutation $A_{3r,2r}$ binarisée, sa semblable occupe une des $2r-1$ autres places; la deuxième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r-3$ autres places; la troisième lettre occupant la première place laissée vacante, sa semblable occupe une des $2r-5$ autres places, et ainsi de suite : la dernière lettre distincte et sa semblable occupent les deux seules places restées vacantes. Pour chacune des $A_{3r,2r}$, on obtient

$$1.3.5\ldots(2r-1)P_r A_{3r,2r} = 1.3.5\ldots(2r-1)P_{3r};$$

mais, comme le premier intervalle qui commence la permutation peut la commencer par l'une de ses trois lettres, il faut multiplier par 3 le nombre précédent, et l'on a la formule $(3r)$

$$N_{3r}(r,0,0) = 3.1.3.5\ldots(2r-1)P_{3r},$$

Pour $r=1$.......... $N_3(1,0,0) = 3P_3$ (IV),

Pour $r=2$.......... $N_6(2,0,0) = 9P_6$.

XI. *Calculs depuis $q=5$ jusqu'à $q=7$.*

1° Décomposition des $B_{5,2}$, on a trouvé $B_{5,2} = 293\,P_5$.

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{5,2} = 68\,P_5$
$(0,0,1)$	$N_5(0,0,1) = 100$
$(0,0,2)$	$N_5(0,0,2) = 60$
$(0,1,0)$ (*voir* VIII)	$N_5(0,1,0) = 10$
$(0,1,1)$	$N_5(0,1,1) = 20$
$(0,2,0)$ (*voir* VIII)	$N_5(0,2,0) = 5$
$(1,0,0)$	$N_5(1,0,0) = 10$
$(r,0,v)$ pour $r=1$, $v=1$ et $q=5$...	$N_5(1,0,1) = 10$
$(r,u,0)$ pour $r=1$, $u=1$ et $q=5$...	$N_5(1,1,0) = 10$
On vérifie......	$293\,P_5$

2° **Décomposition des $B_{6,2}$; on a trouvé $B_{6,2} = 3326 P_6$.**

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{6,2} = 837\, P_6$
$(0, 0, 1)$	$N_6(0, 0, 1) = 1200$
$(0, 0, 2)$	$N_6(0, 0, 2) = 624$
$(2, v)$	$N_6(0, 0, 3) = 64$
$(0, 1, 0)$	$N_6(0, 1, 0) = 120$
$(0, 1, 1)$	$N_6(0, 1, 1) = 168$
$(0, u, v)$ pour $u = 1$, $v = 2$ et $q = 6$.	$N_6(0, 1, 2) = 48$
$(0, 2, 0)$	$N_6(0, 2, 0) = 12$
$(0, u, v)$ pour $u = 2$, $v = 1$ et $q = 6$.	$N_6(0, 2, 1) = 12$
$(2u)$	$N_6(0, 3, 0) = 4$
$(1, 0, 0)$	$N_6(1, 0, 0) = 84$
$(r, 0, v)$ pour $r = 1$, $v = 1$ et $q = 6$.	$N_6(1, 0, 1) = 108$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 1$ et $q = 6$.	$N_6(1, 1, 0) = 36$
$(3r)$	$N_6(2, 0, 0) = 9$
On vérifie	$3326\, P_6$

3° Décomposition des $B_{7,2}$; on a trouvé $B_{7,2} = 44189 P_7$.

Formule.	
$C_{q,2}$	$C_{7,2} = 11863\, P_7$
$(0, 0, 1)$	$N_7(0, 0, 1) = 16198$
$(0, 0, 2)$	$N_7(0, 0, 2) = 8176$
$(0, 0, 3)$	$N_7(0, 0, 3) = 1400$
$(0, 1, 0)$	$N_7(0, 1, 0) = 1386$
$(0, 1, 1)$	$N_7(0, 1, 1) = 1764$
$(0, u, v)$ pour $u = 1$, $v = 2$ et $q = 7$.	$N_7(0, 1, 2) = 672$
$(0, 2, 0)$	$N_7(0, 2, 0) = 98$
$(0, u, v)$ pour $u = 2$, $v = 1$ et $q = 7$.	$N_7(0, 2, 1) = 126$
$(0, u, 0)$ pour $u = 3$ et $q = 7$.	$N_7(0, 3, 0) = 14$
$(1, 0, 0)$	$N_7(1, 0, 0) = 938$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1$, $v = 1$ et $q = 7$.	$N_7(1, 0, 1) = 1050$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 1$ et $v = 2$.	$N_7(1, 0, 2) = 168$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 1$ et $q = 7$.	$N_7(1, 1, 0) = 168$
(r, u, v) pour $r = 1$, $u = 1$, $v = 1$ et $q = 7$.	$N_7(1, 1, 1) = 84$
$(r, u, 0)$ pour $r = 1$, $u = 2$ et $q = 7$.	$N_7(1, 2, 0) = 21$
$(r, 0, 0)$ pour $r = 2$ et $q = 7$.	$N_7(2, 0, 0) = 63$
On vérifie	$44189\, P_7$

THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

A la page 144 du tome IX des *Nouvelles Annales* (1re série), se trouve une Note ainsi conçue :

Comment démontrer que

$$\frac{x^m - 1}{x - 1}\,\frac{x^{m-1} - 1}{x^2 - 1}\cdots\frac{x^{m+1-p} - 1}{x^p - 1}$$

est une fonction entière de x, m et p étant des entiers positifs dont le premier n'est pas inférieur au second.

1. Posons, b étant un entier positif,

$$F(x, z, m, b) = (1 + z)(1 + zx^b)\ldots(1 + zx^{(m-1)b}).$$

$F(x, z, m, b)$ est une fontion entière de x et de z et du degré m par rapport à celle-ci; on peut poser

$$\text{(A)}\qquad (1 + z)(1 + zx^b)\ldots(1 + zx^{(m-1)b}) = \sum_{p=0}^{p=m} (x_p z^p).$$

2. On a $x_0 = 1$. Dans l'hypothèse $1 \overline{\overline{<}} p \leqq m$, x_p est une fonction entière de x, et, comme elle est la somme de produits dont chacun contient p facteurs égaux à des termes différents de la série

$$x^0,\quad x^b,\quad x^{2b},\ldots,\quad x^{(m-1)b},$$

le terme le moins élevé de x_p est de degré égal à

$$0 + b + 2b + \ldots + (p - 1)\,b \quad \text{ou} \quad \frac{p-1}{1}\,\frac{p}{2}\,b\,;$$

donc $\dfrac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}}$ est une fonction entière de x.

3. Dans l'identité (A), remplaçons z par zx^b

$$(1+z)(1+zx^b)\ldots(1+zx^{(m-1)b})\times\frac{1+zx^{mb}}{1+z}=\sum_{p=0}^{p=m}(x_p x^{pb} z^p),$$

d'où

$$\text{(B)}\qquad (1+z)\sum_{p=0}^{p=m}(x_p x^{pb} z^p)=(1+zx^{mb})\sum_{p=0}^{p=m}(x_p z^p),$$

d'où, $1 \overline{\overline{<}} p \leqq m$,

$$\text{(C)}\qquad x^{pb}x_p + x^{(p-1)b}x_{p-1} = x_p + x^{mb}x_{p-1}.$$

4. L'identité C donne les identités suivantes :

$$x_p = x^{(p-1)b}\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{pb}-1}x_{p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{p+r-1} = x^{(p+r-2)b}\frac{x^{(m+2-p-r)b}-1}{x^{(p+r-1)b}-1}x_{p+r-2};$$

multipliant membre à membre,

$$x_{p+r-1} = x^{\frac{2p+r-3}{1}\frac{r}{2}b}\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{pb}-1}\cdots\frac{x^{(m+2-r-p)b}-1}{x^{(p+r-1)b}-1}x_{p-1};$$

posant $p=1$ et remplaçant r par p,

$$\frac{x_p}{x^{\frac{p-1}{1}\frac{p}{2}b}} = \frac{x^{mb}-1}{x^b-1}\,\frac{x^{(m-1)b}-1}{x^{pb}-1}\cdots\frac{x^{(m+1-p)b}-1}{x^{bp}-1}.$$

Or, en vertu du n° 2, le premier membre de cette égalité est une fonction entière de x : il en est donc de même du second. C. Q. F. D

RECTIFICATION

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 433 du tome XVIII des *Nouvelles Annales*, on trouve (ligne 3, en remontant) une formule qui, en tenant compte d'une faute d'impression signalée par l'auteur page 461, peut, ce nous semble, être écrite ainsi qu'il suit :

$$0 = \sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{2}{h^!(2m+1-h)^!}\right].$$

Cette formule paraît inexacte.

2. L'identité

$$\frac{(2m+1)^!}{h^!(2m+1-h)^!} = \frac{(2m)^!}{(h-1)^!(2m+1-h)^!} + \frac{(2m)^!}{h(2m-h)^!}$$

donne

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m+1)^!}{h^!(2m+1-h)^!}\right] = \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m)^!}{(h-1)^!(2m+1-h)^!}\right] \\ \displaystyle + \sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m)}{(h)^!(2m-h)^!}\right] \end{array}\right\}$$

ou bien

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m+1)^!}{h^!(2m+1-h)^!}\right] = \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=m}\left[(-1^h) \frac{(2m)^!}{(h-1)^!(2m+1-h)^!}\right] \\ \displaystyle - \sum_{h=1}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m)^!}{(h-1)^!(2m+1-h)^!}\right] \\ \displaystyle + (-1)^m \frac{(2m)^!}{m^! m^!} \end{array}\right\};$$

d'où

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{(2m+1)!}{h!(2m+1-h)!}\right] = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!m!},$$

et enfin

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left[(-1)^h \frac{2}{h!(2m+1-h)!}\right] = (-1)^m \frac{2}{2m+1}\,\frac{1}{m!m!}.$$

NOTE SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES ET DES VOLUMES DE RÉVOLUTION;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soit AB une courbe plane quelconque; en tournant autour d'un axe z situé dans son plan, elle engendrera une surface de révolution. Supposons que le plan méridien ait tourné d'un angle α et proposons-nous de chercher le centre de gravité de la surface du fuseau ABA'B'.

Soient M un point de la courbe méridienne, $\mathrm{MP} = x$ la distance à l'axe et N un point infiniment voisin de M. On peut prendre, pour éléments de la surface du fuseau, les surfaces telles que MN, M'N', engendrées par les éléments MN de la courbe méridienne, que nous représenterons par l'équation

$$x = f(z).$$

Si l'on désigne par A l'aire du fuseau; par ξ, η, ζ les coordonnées de son centre de gravité; par z_0 et z_1 les valeurs de z correspondant aux extrémités A et B de la courbe méridienne et par ds l'élément MN de cette courbe, on trouve sans peine

$$A = \alpha \int_{z_0}^{z_1} x\,ds, \quad A\zeta = \alpha \int_{z_0}^{z_1} xz\,ds,$$

$$A\xi = \sin\alpha \int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds, \quad A\eta = (1 - \cos\alpha) \int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds.$$

On déduit d'abord de ces formules que la valeur de ζ est indépendante de α, ce qui est évident *a priori*; ensuite, si l'on pose

$$B = \frac{\int_{z_0}^{z_1} x^2\,ds}{\int_{z_0}^{z_1} x\,ds},$$

on a

$$\xi = B\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \eta = B\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}.$$

Si ρ désigne la distance du centre de gravité à l'axe et θ l'angle que fait, avec le plan méridien initial, celui qui contient le centre de gravité, on a

$$\tang\theta = \frac{\eta}{\xi} = \tang\frac{\alpha}{2}, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\alpha}{2},$$

et

$$\rho = B\frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{1}$$

Cherchons maintenant le centre de gravité du volume engendré par AB. Si l'on désigne ce volume par V et les coordonnées de son centre de gravité par ξ', η', ζ', on aura

$$V = \frac{\alpha}{2} \int_{z_0}^{z_1} x^2\,dz, \quad V\zeta' = \frac{\alpha}{2} \int_{z_0}^{z_1} x^2 z\,dz,$$

$$V\xi' = \frac{1}{2}\sin\alpha \int_{z_0}^{z_1} x^3\,dz, \quad V\eta' = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) \int_{z_0}^{z_1} x^3\,dz.$$

Si l'on pose

$$C = \frac{\int_{z_0}^{z_1} x^3 dz}{\int_{z_0}^{z_1} x^2 dz},$$

on déduit la formule précédente

$$\xi' = C\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \eta' = C\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

Donc, si ρ' est la distance du centre de gravité à l'axe, θ' l'angle du plan méridien passant par le centre de gravité avec le plan méridien initial, on trouve, comme précédemment,

(2) $$\theta' = \frac{\alpha}{2} = \theta, \quad \rho' = C\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une courbe quelconque tourne autour d'un axe situé dans son plan, les centres de gravité du fuseau et du coin qu'elle engendre décrivent des courbes semblables, et ces courbes restent semblables à elles-mêmes quand on change la courbe méridienne.

QUESTIONS

Par M. H. LAURENT,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Si l'on forme la somme des produits des m premiers nombres naturels un à un, deux à deux, etc., ces sommes seront les coefficients de $x(x+1)\ldots(x+m-1)$ développé suivant les puissances de x.

En posant alors

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$$
$$= x^m + f(m, 1)x^{m-1} + f(m, 2)x^{m-2} + \ldots,$$

1° $f(m, 1), f(m, 2) \ldots$ seront des polynômes entiers en m, de degrés 2, 4, 6, ...;

2° On aura, quel que soit m, entier ou fractionnaire, positif ou négatif,

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{-m} = 1 - \frac{f(m, 1)}{m-1}x + \frac{f(m, 2)}{(m-1)(m-2)}x^2 + \ldots,$$

pour $x < 2\pi$ en valeur absolue;

3° On déduira de là le développement de $l\,\dfrac{e^x - 1}{x}$ suivant les puissances de x;

4° On aura

$$\left[\frac{l(1-x)}{-x}\right]^m = 1 + \frac{f(m+1, 1)}{m+1}x + \frac{f(m+2, 2)}{(m+1)(m+2)}x^2 + \ldots,$$

pour $x < \frac{1}{2}$ en valeur absolue;

5° On déduira de là le développement de $l[l(1+x)] - lx$ suivant les puissances de x;

6° On aura

$$\frac{1}{z^m} = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} + \frac{f(m, 1)}{z(z+1)\ldots(z+m)} + \ldots$$
$$+ \frac{f(m+k, k+1)}{z(z+1)\ldots(z+k+m)} + \ldots,$$

pourvu que z soit plus grand que l'unité, ou mieux que la partie réelle de z, supposé imaginaire, soit plus grande que l'unité.

Wronski avait déjà remarqué que $\dfrac{\Delta^m 0^{m+k}}{1.2.3\ldots m}$ était égal à $f(-m, k)$.

23.

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Lorsque l'équation du troisième degré est ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

on sait qu'il faut et qu'il suffit, pour que les trois racines soient réelles, que l'on ait

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0.$$

Lorsque l'équation est complète, la condition de réalité des racines peut s'exprimer d'une façon tout à fait analogue, comme le montre le théorème que voici :

2. THÉORÈME. — *Si l'on désigne par $f(x)$ le premier membre de l'équation complète du troisième degré*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et par $f'(x)$ sa dérivée, pour que les trois racines de cette équation soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right) + 27f^2\left(-\frac{a}{3}\right) \leq 0.$$

Pour le démontrer, faisons disparaître le second terme de notre équation complète en remplaçant x par $y - \frac{a}{3}$. Nous obtenons ainsi l'équation du troisième degré

$$f\left(y - \frac{a}{3}\right) = 0,$$

dont les racines sont évidemment réelles ou imaginaires en même temps que celles de la proposée.

Cette nouvelle équation, si l'on en développe le premier membre suivant la formule de Taylor, peut s'écrire

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)+\frac{y}{1}f'\left(-\frac{a}{3}\right)+\frac{y^2}{1.2}f''\left(-\frac{a}{3}\right)$$
$$+\frac{y^3}{1.2.3}f'''\left(-\frac{a}{3}\right)=0.$$

Or, puisque la transformation effectuée fait disparaître le second terme, on a

$$f''\left(-\frac{a}{3}\right)=0.$$

De plus, il est visible qu'on a aussi

$$f'''\left(-\frac{a}{3}\right)=1.2.3.$$

Donc notre équation en y se réduit à

$$y^3+f'\left(-\frac{a}{3}\right)y+f\left(-\frac{a}{3}\right)=0,$$

qui est de la forme

$$y^3+py+q=0.$$

Par conséquent, pour que ses racines et, par suite, les racines de la proposée, soient toutes réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right)+27f^2\left(-\frac{a}{3}\right)\leq 0,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

3. *Remarque.* — De même que l'équation complète du troisième degré renferme, comme cas particulier,

l'équation privée du second terme, de même la formule que nous venons d'établir est tout à fait générale et renferme, comme cas particulier, la formule

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0,$$

que nous avons rappelée en commençant.

4. *Application.* — Pour donner un exemple de l'emploi de notre formule, considérons l'équation

$$x^3 - 3kx^2 - 3x + k = 0,$$

qui donne, comme on sait, $\tang \frac{a}{3}$ lorsqu'on y suppose k égal à $\tang a$.

Ici nous avons

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 - 3x + k,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6kx - 3,$$
$$-\frac{a}{3} = k,$$
$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = -2k(1 + k^2),$$
$$f'\left(-\frac{a}{3}\right) = -3(1 + k^2),$$

et, par suite,

$$4f'^3\left(-\frac{a}{3}\right) + 27f^2\left(-\frac{a}{3}\right) = -4 \cdot 27(1 + k^2)^2.$$

Comme ce dernier résultat est négatif pour toute valeur réelle de k, on voit que la relation de condition est toujours satisfaite, et, par suite, que l'équation actuelle a toujours ses trois racines réelles.

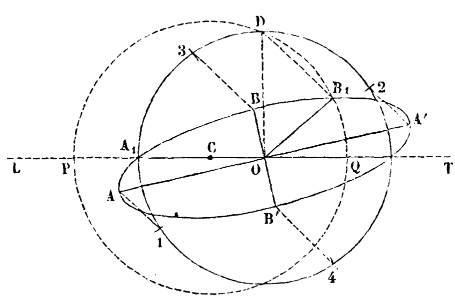
ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION OBLIQUE D'UN CERCLE. — CONSTRUCTION SIMPLIFIÉE DES AXES D'UNE ELLIPSE DONT ON CONNAIT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS ;

PAR M. A. JULLIEN,
Professeur de Sciences.

(*Suite de l'article inséré dans le numéro de juillet* 1875.)

1. La construction suivante est basée sur les mêmes considérations géométriques que celle qui a été donnée précédemment, mais elle est plus simple au point de vue graphique.

Soient OA_1 et OB_1 deux diamètres conjugués d'une ellipse. Décrivons un cercle ayant O pour centre et OA_1 pour rayon. Ce cercle peut être considéré comme étant



situé sur l'un des plans de projection ; l'ellipse devient alors sa projection oblique, son ombre portée, sa perspective cavalière ou militaire, et notamment OB_1 est la projection oblique du rayon OD perpendiculaire au diamètre OA_1 que nous prenons pour ligne de terre.

Décrivons un cercle qui ait son centre C sur la ligne de terre et qui passe par D et B_1. P et Q étant les points où ce cercle rencontre la ligne de terre, observons que l'angle droit PDQ se projetterait obliquement suivant un angle droit PB_1Q. Il est d'ailleurs inutile de tracer ces angles.

2. *Axes de l'ellipse.* — Pour avoir les axes de l'ellipse en direction, il suffit de mener par le point O des parallèles aux droites PB_1, QB_1.

3. *Sommets de l'ellipse.* — Déterminons les points 1, 2, 3, 4 où des parallèles aux droites PD, QD rencontreraient le cercle O, et par ces points menons des parallèles à DB_1. Les points où ces dernières parallèles coupent les axes de l'ellipse sont les sommets.

4. Dans un très-grand nombre de questions, telles que les sections planes des cylindres et des cônes, les ombres portées, les voûtes en stéréotomie, etc., on a immédiatement deux diamètres conjugués d'une ellipse. La considération du cercle dont cette ellipse est la projection oblique permettrait de résoudre par des tracés simples, avant même que les axes ne soient déterminés, la plupart des problèmes qui s'y rapportent : tracé de la courbe par points, tangentes, intersections, segments ou secteurs dans un rapport donné, etc.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874.

Mathématiques spéciales.

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier $F(x)$, satisfaisant aux relations

$$F(1-x) = F(x),$$
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m},$$

est

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q\Big[A_0(x^2 - x + 1)^{3n} + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2 + A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{2n}\Big],$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes quelconques.

Mathématiques élémentaires.

Étant données les quatre arêtes AB, DA, BC, CD d'un tétraèdre, déterminer le tétraèdre de manière que son volume soit maximum. Le tétraèdre ainsi déterminé, calculer les deux autres arêtes BD et AC et le volume dans les deux cas suivants :

1° Lorsque deux arêtes opposées AB et CD sont égales, ainsi que les deux arêtes BC et AD ;

2° Lorsque les deux arêtes consécutives AB et BC sont égales, ainsi que les deux arêtes CD et DA.

Comparer les volumes en supposant que les deux arêtes AB et AD ont respectivement des longueurs égales dans les deux cas.

Philosophie.

Étant donnés un cercle de rayon R et deux rayons rectangulaires OA et OB, déterminer les côtés OC et OE d'un rectangle OCDE, inscrit dans le quart de cercle AOB, et tel que, si l'on fait tourner la figure autour du rayon OA, la surface totale du cylindre engendré soit égale à la surface d'une circonférence de rayon donné a.

Rhétorique.

I. On donne deux sphères tangentes extérieurement et dont l'une a un rayon double de celui de l'autre. A l'ensemble de ces deux sphères on circonscrit un tronc de cône, dont on demande le volume et la surface totale, connaissant le rayon de la petite sphère.

II. Distance du Soleil à la Terre. Rapport du volume du Soleil à celui de la Terre. Rapport des masses.

Seconde.

I. Étant donné un tétraèdre, on suppose que l'on mène par chaque arête un plan parallèle à l'arête opposée, et l'on demande : 1° quel sera le solide ainsi obtenu; 2° quel sera le rapport de son volume à celui du tétraèdre.

II. La différence de deux nombres est a, et la somme de leurs racines carrées est aussi égale à a; quels sont ces deux nombres?

Troisième.

I. On donne un cercle et deux points fixes A et B sur la circonférence; par ces deux points, on mène deux cordes égales de grandeur quelconque; trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.

II. Démontrer que, si la somme $3^n + 1$, dans laquelle n représente un nombre entier, est un multiple de 10, la somme $3^{n+1} + 1$ sera aussi un multiple de 10.

CONCOURS DES DÉPARTEMENTS.

Mathématiques spéciales.

Si l'on considère la fonction e^{-x^2} de la variable x et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnaît que la dérivée de l'ordre n est égale au produit de la fonction e^{-x^2} par un polynôme entier en x que l'on représentera par $\varphi_n(x)$:

1° Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes

$$\varphi_n(x) = 2x\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\varphi_{n-2}(x),$$
$$\varphi'_n(x) = -2n\varphi_{n-1}(x),$$
$$\varphi''_n(x) - 2x\varphi'_n(x) + 2n\varphi_n(x) = 0,$$

$\varphi'_n(x)$ désignant la dérivée première du polynôme $\varphi_n(x)$, et $\varphi''_n(x)$ la dérivée seconde ;

2° Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$, ordonné suivant les puissances de la variable x.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Mathématiques appliquées et Géométrie descriptive.

I. *Mécanique.* — Qu'appelle-t-on rendement d'une machine? Pourquoi le rendement est-il toujours inférieur à l'unité?

Une machine à vapeur met en jeu un système de pompes qui élèvent l'eau d'un fleuve à 155 mètres de hauteur pour l'alimentation d'une ville. On demande de calculer à $\frac{1}{100}$ près le rendement de ce système de pompes, en supposant : 1° que la force de la machine, mesurée sur l'arbre de couche, soit de 1500 chevaux-vapeur; 2° que les réservoirs de la ville reçoivent 30 000 mètres cubes d'eau en vingt-quatre heures.

II. *Géométrie descriptive.* — Construire les projections et la vraie grandeur de la section faite par un plan dans un prisme oblique. Le prisme a pour base un carré ABCD, de 5 centimètres de côté, situé sur le plan horizontal, et dont le côté AB, parallèle à la ligne de terre, est éloigné de cette ligne de 5 centimètres en avant du plan vertical. Pour définir la direction de ses arêtes latérales, on imagine un cube qui serait construit sur la base ABCD au-dessus du plan horizontal; les arêtes latérales du prisme sont parallèles à la diagonale de ce cube, qui a pour trace horizontale le point C.

Le plan sécant passe par la ligne de terre et divise en deux parties égales le dièdre formé par la partie antérieure du plan horizontal et par la partie supérieure du plan vertical.

Après avoir construit en vraie grandeur la section demandée, on mesurera ses angles et ses côtés, et l'on calculera sa surface. On donnera les résultats numériques ainsi obtenus.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1875).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Trouver le lieu géométrique de l'intersection des deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection?

Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Application particulière au point maximum du lieu.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Sphère et prisme.

Ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille de papier et à 18 centimètres au-dessus du bord inférieur de la feuille.

Sphère. — Le centre de la sphère au milieu de la largeur de la feuille en o, o'.

$o'\omega = o\omega = 85^{mm}$.

Rayon de la sphère $= 80^{mm}$.

Prisme. — On mène par o une droite oa faisant un angle de 45 degrés avec la ligne de terre. On prend $oa = 45^{mm}$.

Le point a étant la projection d'un point de la sphère, on cherchera sa projection verticale a'. On mènera en ce point une tangente à la sphère, tangente dont oa sera la projection horizontale. Cette tangente sera une arête d'un prisme à section carrée, dont un des plans diagonaux sera vertical et aura sa trace confondue avec oa. Le côté du carré est égal à 105 millimètres. On demande :

De représenter par ses projections la portion de la sphère supposée solide contenue dans le prisme, c'est-à-dire le solide commun aux deux corps.

COMPOSITION DE TRIGONOMÉTRIE.

Trouver les angles et la surface d'un triangle dont les côtés sont

$$a = 34752,18,$$
$$b = 20396,75,$$
$$c = 19974,89.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1875).

Composition de Mathématiques.

Trouver le lieu des pieds des normales menées d'un point donné P à une série d'ellipses qui ont un sommet commun B, la même tangente en ce point, et telles que, pour chacune d'elles, le rapport de l'axe parallèle à la tangente commune au second axe soit égal à une constante donnée K.

Construire le lieu dans les cas particuliers suivants : on prendra le point P sur la bissectrice de l'un des angles formés par la tangente et la normale communes à toutes les ellipses en B, et l'on attribuera à K successivement l'une des valeurs $\sqrt{3}$ et 2.

Composition de Physique.

I.

On a dans deux éprouvettes : d'une part, 4 centimètres cubes de gaz à 7 degrés sous la pression de 56 centimètres de mercure, et, d'autre part, 6 centimètres cubes d'un autre gaz à 17 degrés sous la pression de 58 centimètres. On introduit ces deux gaz dans une troisième éprouvette pleine de mercure, où leur mélange prend une température de 15 degrés. On demande à quelle hauteur le mercure s'élèvera dans cette éprouvette, dont la section est de 1 centimètre carré et la hauteur, au-dessus du niveau extérieur, de 21 centimètres ; le baromètre est à 76 centimètres.

On prendra pour coefficient de dilatation des gaz la fraction $\frac{1}{273}$, et l'on négligera la dilatation du mercure et celle du verre.

II.

Avec du verre d'indice $\frac{3}{2}$ on a fait une lentille biconvexe dont les deux faces ont 11 centimètres de rayon de courbure. On a ensuite monté cette lentille dans la paroi verticale d'une caisse, et l'on a placé devant, à une distance de 22 centimètres, un objet éclairé. On demande de construire l'image et de déterminer sa position et son grossissement. (On négligera l'épaisseur de la lentille, comme l'indique le programme.)

Si maintenant on verse dans la caisse de l'eau, dont l'indice est $\frac{4}{3}$, l'image se déplacera, et l'on déterminera encore sa nouvelle position et son grossissement.

Enfin on désignera par R le rayon commun aux deux faces de la lentille, et l'on cherchera l'équation générale des foyers conjugués P et P′ dans ce système optique composé de verre et d'eau; on en déduira les foyers principaux F et F′ dans l'air et dans l'eau, et l'on introduira les deux longueurs focales dans l'équation des foyers conjugués; on se servira de ces foyers pour construire l'image, et l'on donnera l'expression générale de son grossissement.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1875).

Épure ($2^h 30^m$).

Un tronc de cône droit s'appuie par sa grande base circulaire sur le plan horizontal de projection. Le rayon R de cette grande base vaut 70 millimètres, et son centre C est à une distance de 80 millimètres de la ligne de terre. L'arête latérale du tronc a une longueur égale au rayon R et fait un angle de 45 degrés avec le plan horizontal. Dans l'intérieur de ce tronc de cône, et sur le même axe, est placé un petit cône renversé, dont le sommet est au point C, et dont la base coïncide avec la base supérieure du tronc.

Soit AB l'arête latérale du tronc de cône, qui est parallèle au plan vertical de projection, le point A étant sur la grande base et le point B sur la petite base.

On demande :

1° De construire les projections de l'ensemble des deux corps;

2° De construire les projections des sections faites dans les deux corps par un plan perpendiculaire à l'arête AB, au point B;

3° De mener, par le point où la verticale du point A perce le plan sécant, une tangente à la section faite dans le petit cône;

4° De trouver le point où cette tangente perce le tronc de cône.

Composition de Mathématiques (3 heures).

PREMIÈRE QUESTION. *Calcul logarithmique.* — 1° Calculer la valeur positive de x, donnée par l'équation

$$x^2 = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

en faisant $R = 6366^{km}$, et $\alpha = 23^\circ 27' 21''$.

2° Calculer les angles positifs, compris entre zéro et 180 degrés, donnés par la formule

$$\sin x = \sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi,$$

en faisant $\varphi = 80^\circ 25' 57''$.

DEUXIÈME QUESTION. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-c},$$

dans laquelle les quantités données a, b, c sont réelles et positives. Donner les conditions pour que les racines soient aussi réelles et positives.

TROISIÈME QUESTION. — On donne deux parallèles et sur leur plan deux points p et p', compris entre ces parallèles et à égale distance de chacune d'elles. Cela posé, on demande de mener par le point p' une sécante, telle que la partie comprise entre ces parallèles soit vue du point p sous un angle de 45 degrés. Donner la condition de possibilité.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (ANNÉE 1875).

Calcul numérique de Trigonométrie rectiligne.

Dans un triangle ABC, on donne le côté $a = 45^{m},49$, le côté $b = 34^{m},58$, l'angle $C = 69^{\circ}28'$, et l'on propose de calculer la longueur de la droite CD qui joint le sommet C au milieu de la base AB.

Tracé graphique de Géométrie descriptive.

Un plan, incliné de 60 degrés sur le plan horizontal, passe par une droite située dans ce dernier plan et faisant un angle de 30 degrés avec la ligne de terre. Dans le plan incliné, on décrit un triangle équilatéral dont le côté a 5 centimètres, un des côtés parallèle à la trace horizontale étant placé à 4 centimètres de cette trace. Un tétraèdre a pour base ce triangle et pour hauteur 10 centimètres comptés sur la perpendiculaire au plan, menée par le centre du triangle.

Les candidats, après avoir fait les projections du tétraèdre, indiqueront la suite des constructions, sans les démontrer, et les parties invisibles sur les deux plans de projection.

QUESTION D'EXAMEN

(voir 2e série, t. XIV, p. 227).

Dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$, la fonction $\frac{1}{\log z}$ reste finie pour les valeurs de z comprises entre zéro et 1, mais devient infinie pour $z = 1$. Dans ce cas, si l'on désigne par ε une quantité positive, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\log z}$ est, *par définition,* la limite vers laquelle tend $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z}$, quand ε tend vers zéro.

Faisons dans cette intégrale les deux substitutions $z = x^m$, $z = x^n$, la limite inférieure restera la même; mais *la limite supérieure changera,* et l'on aura, en toute rigueur,

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dz}{\log z} = \int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx = \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx.$$

Soit $m > n$, il en résultera $\sqrt[m]{1-\varepsilon} > \sqrt[n]{1-\varepsilon}$, et l'équation

$$\int_0^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx = 0$$

pourra s'écrire

$$\int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx + \int_{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[m]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx - \int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{n-1}}{\log x}\,dx = 0,$$

ou

$$\int_0^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{\log x}\,dx = \int_{\sqrt[m]{1-\varepsilon}}^{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \frac{x^{m-1}}{\log x}\,dx.$$

L'intégrale du second membre rentre dans la catégorie de celles que Cauchy a appelées *intégrales définies singulières,* et sa valeur est, d'après la règle qu'il a donnée,

$$(\xi - 1)\frac{\xi^{m-1}}{\log \xi}\log\frac{m}{n},$$

ξ étant compris entre $\sqrt[n]{1-\varepsilon}$ et $\sqrt[m]{1-\varepsilon}$. Les deux membres, étant égaux quel que soit ε, auront des limites égales, ε tendant vers zéro; ξ tend alors vers 1, et la règle de L'Hôpital donne

$$\log\frac{m}{n}$$

pour la valeur du second membre, qui ne se réduit à zéro que si $m = n$. Ch. B.

Note. — MM. de Virieu, Moret-Blanc et Pellet expliquent à très-peu de chose près le paralogisme de la même manière. Quant au calcul de M. Allaretti, MM. Laisant et Küss font observer qu'il renferme des erreurs manifestes qui interdisent toute conclusion.

SOLUTION DES QUESTIONS PROPOSÉES PAR LE P. PEPIN

(voir même tome, p. 275);

PAR M. MORET-BLANC.

1. Théorème. — *Si l'on désigne par a et b deux nombres entiers quelconques, l'un des produits*

$$ab(a^2 - b^2),\quad (a^2 - 2b^2)(a^2 - 4b^2)$$

est toujours divisible par 7, savoir : le premier, si la somme $a^2 + b^2$ est de l'une des formes $7l$, $7l+1$, $7l+2$, $7l+4$, et le second si cette somme est de l'une des formes $7l+3$, $7l+5$, $7l+6$.

Démonstration. — Un nombre quelconque est de l'une des formes $7l$, $7l \pm 1$, $7l \pm 2$, $7l \pm 3$.

Les formes correspondantes des carrés sont $7l$, $7l+1$, $7l+4$, $7l+2$.

Le produit $ab(a^2-b^2)$ est évidemment divisible par 7 :

1° Quand l'un des nombres a et b est divisible par 7;

2° Quand a^2 et b^2 sont de même forme.

Dans ces deux cas, a^2+b^2 est de l'une des formes $7l$, $7l+1$, $7l+2$, $7l+4$.

Si l'on a

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=7l+1, & b^2=7l+4 \\ a^2=7l+4, & b^2=7l+2 \\ a^2=7l+2, & b^2=7l+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2-2b^2=7l, \\ a^2+b^2=7l+(3,5,6), \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=7l+1, & b^2=7l+2 \\ a^2=7l+4, & b^2=7l+1 \\ a^2=7l+2, & b^2=7l+4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2-4b^2=7l, \\ a^2+b^2=7l+(3,5,6). \end{array}$$

Le théorème est donc démontré.

2. Théorème. — *Soient a et b deux nombres entiers quelconques : l'un des deux produits*

$$ab(a^2-3b^2)(a^2-4b^2), \quad (a^2-b^2)(a^2-5b^2)(a^2-9b^2)$$

est toujours divisible par 11, *savoir : le premier, si la somme a^2+b^2 est de l'une des formes*

$$(1) \qquad 11l+(0,1,3,4,5,9),$$

et le second, si cette somme est de l'une des formes

$$(2) \qquad 11l+(2,6,7,8,10).$$

Démonstration. — Formes des nombres : $11l$, $11l\pm1$, $11l\pm2$, $11l\pm3$, $11l\pm4$, $11l\pm5$.

Formes des carrés $11l$, $11l+1$, $11l+4$, $11l+9$, $11l+5$, $11l+3$.

Si l'un des nombres a et b est de forme $11\,l$, ab est divisible par 11.

$$\left.\begin{array}{ll}
a^2 = 11\,l + 1, & b^2 = 11\,l + 4 \\
a^2 = 11\,l + 4, & b^2 = 11\,l + 5 \\
a^2 = 11\,l + 9, & b^2 = 11\,l + 3 \\
a^2 = 11\,l + 5, & b^2 = 11\,l + 9 \\
a^2 = 11\,l + 3, & b^2 = 11\,l + 1
\end{array}\right\} a^2 - 3b^2 = 11\,l,$$

$$\left.\begin{array}{ll}
a^2 = 11\,l + 1, & b^2 = 11\,l + 3 \\
a^2 = 11\,l + 4, & b^2 = 11\,l + 1 \\
a^2 = 11\,l + 9, & b^2 = 11\,l + 5 \\
a^2 = 11\,l + 5, & b^2 = 11\,l + 4 \\
a^2 = 11\,l + 3, & b^2 = 11\,l + 9
\end{array}\right\} a^2 - 4b^2 = 11\,l.$$

Dans tous ces cas, $a^2 + b^2$ appartient à l'une des formes (1).

Si a^2 et b^2 sont de même forme, $a^2 - b^2$ est divisible par 11.

$$\left.\begin{array}{ll}
a^2 = 11\,l + 1, & b^2 = 11\,l + 9 \\
a^2 = 11\,l + 4, & b^2 = 11\,l + 3 \\
a^2 = 11\,l + 9, & b^2 = 11\,l + 4 \\
a^2 = 11\,l + 5, & b^2 = 11\,l + 1 \\
a^2 = 11\,l + 3, & b^2 = 11\,l + 5
\end{array}\right\} a^2 - 5b^2 = 11\,l,$$

$$\left.\begin{array}{ll}
a^2 = 11\,l + 1, & b^2 = 11\,l + 5 \\
a^2 = 11\,l + 4, & b^2 = 11\,l + 9 \\
a^2 = 11\,l + 9, & b^2 = 11\,l + 1 \\
a^2 = 11\,l + 5, & b^2 = 11\,l + 3 \\
a^2 = 11\,l + 3, & b^2 = 11\,l + 4
\end{array}\right\} a^2 - 9b^2 = 11\,l.$$

Dans tous ces cas, $a^2 + b^2$ appartient à l'une des formes (2), ce qui démontre le théorème.

3. Théorème. — *Soient $a, b, c, \ldots$ des facteurs premiers inégaux, $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, et $\varphi(n)$ la fonction nu-*

mérique qui exprime combien dans la suite $1, 2, 3, \ldots, n$ *il y a de nombres premiers relativement à* n. *Cette fonction jouit de la propriété exprimée par l'équation suivante :*

$$m = \varphi(m) + \sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right) + \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta}\right)$$
$$+ \sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma}\right) + \ldots + a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots$$

Soit, par exemple, $m = 3^2.5^2$, *on a*

$$3^2.5^2 = 225 = \varphi(225) + 5\varphi(9) + 3\varphi(25) + 15.$$

La suite des nombres entiers depuis 1 jusqu'à m comprend :

1° Les nombres premiers avec m; leur nombre est $\varphi(m)$;

2° Ceux qui ne sont divisibles que par un seul des nombres premiers $a, b, c, \ldots$; leur nombre est

$$\sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right).$$

En effet, on obtiendra ceux qui n'admettent que le facteur a, en multipliant les nombres premiers avec $\frac{m}{a^\alpha}$, dont le nombre est $\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right)$ par les multiples de a, non supérieurs à a^α, dont le nombre est $\frac{a^\alpha}{a} = a^{\alpha-1}$; il y en a donc $a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right)$. De sorte que $\sum a^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha}\right)$ exprime combien, de 1 à m, il y a de nombres divisibles par un seul des nombres premiers $a, b, c, \ldots$;

3° Les nombres qui sont divisibles par deux des nombres premiers $a, b, c, \ldots$; il y en a évidemment

$$\sum a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta}\right);$$

4° Ceux qui sont divisibles par trois des facteurs a, b, c,...; leur nombre est

$$\sum a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \varphi\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma}\right), \ldots .$$

Enfin ceux qui sont divisibles par tous les facteurs premiers a, b, c,...; il y en a

$$a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots .$$

Comme de 1 à m il y a m nombres, l'égalité est démontrée.

Legendre a démontré qu'aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube. On peut énoncer le théorème suivant, plus général :

Aucun nombre triangulaire n'est égal à un cube multiplié par une puissance entière quelconque d'un nombre premier de l'une des deux formes $18m+5$, $18m+11$, *ni à un cube multiplié par une puissance quelconque de* 2 *ou par le double d'un nombre premier* $18m+11$, *ou encore par le double du carré d'un nombre premier* $18m+5$.

Il faut démontrer qu'on ne peut avoir en nombres entiers

$$x(x+1) = 2p^n z^3,$$

p étant un nombre premier de la forme $18m+5$ ou $18m+11$. On peut supposer $n=1$ ou $n=2$, car, si l'on a $n=3n'$, $n=3n'+1$ ou $n=3n'+2$, le facteur $p^{3n'}$ pourra être compris dans z^3. Cela posé, on aura

$$x = 18m + \left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ & & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17 \end{matrix}\right\},$$

$$x+1 = 18m + \left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ & & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 0 \end{matrix}\right\},$$

$$x(x+1) = 18m + (0,\ 2,\ 6,\ 12),$$
$$z^3 = 18m + (0,\ 1,\ 8,\ 9,\ 10,\ 17),$$
$$2z^3 = 18m + (0,\ 2,\ 16),$$
$$p^n = 18m + (5,\ 7,\ 11,\ 13) \qquad (n = 1 \text{ ou } n = 2).$$

1° Supposons d'abord qu'aucun des nombres x, $x+1$ ne soit multiple de 18. On aura

$$x(x+1) = 18m + (2,\ 6,\ 12),$$
$$2p^n z^3 = 18m + (4,\ 8,\ 10,\ 14).$$

L'égalité $x(x+1) = 2p^n z^3$ est donc impossible.

Si l'on remplace p^n par 2, 4, $2(18m+11)$ ou $2(18m+5)^2 = 18m+14$, le second membre reste toujours de l'une des formes $18m + (4, 8, 10, 14)$, et l'impossibilité subsiste.

2° Soit x un multiple de 18; décomposons z en deux facteurs u et v dont l'un soit premier avec 18 : on aura

$$x = 2u^3 = 18m,$$
$$x+1 = p^n v^3 = 18m+1,$$
$$p^n = 18m + (5,\ 7,\ 11,\ 13),$$
$$v^3 = 18m + (1,\ 9,\ 17),$$
$$p^n v^3 = 18m\,(5,\ 7,\ 11,\ 13).$$

L'égalité $x+1 = p^n v^3$ est encore impossible.

Si l'on remplace p^n par $2(18m+11)$ ou par $2(18m+5)^2$, il faudra qu'on ait

$$x = 4u^3,$$
$$x+1 = 18m + (7,\ 11)\,v^3.$$

Or

$$17m + (7,\ 11)\,v^3 = 18m + (7,\ 9,\ 11).$$

Il y a donc encore impossibilité.

On voit qu'il en sera encore de même si $x+1 = 18m$; x sera alors de la forme $18m+17$, incompatible avec celle de $p^n v^3$.

Dans le cas où l'on ferait $p = 2$, on aurait

$$x = 2^n u^3,$$
$$x + 1 = v^3,$$

ou *vice versâ*, d'où

$$v^3 - 2^n u^3 = 1 \quad \text{ou} \quad 2^n u^3 - v^3 = 1,$$

ou bien

$$v^3 \pm 1 = 2^n u^3.$$

Mais Legendre a démontré que l'équation

$$x^3 + y^3 = 2^n z^3$$

est impossible en nombres entiers positifs ou négatifs. Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

SOLUTION DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE PROPOSÉES PAR M. CASIMIR REY

(voir même tome, p. 273);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient deux cylindres de révolution de rayon r, dont les axes se rencontrent, et soit a la portion d'axe de l'un des cylindres interceptée par l'autre cylindre. On demande de prouver par la Géométrie élémentaire que :

1° *Le volume commun aux deux cylindres a pour mesure*

$$(1) \qquad \frac{8}{3} a r^2;$$

2° *La surface de ce volume a pour mesure*

$$(2) \qquad 8ar;$$

3° *Deux plans parallèles aux axes interceptent une* *zone qui a pour mesure*

$$4ah.$$

Remarque I. — *Quand les axes sont perpendiculaires, les formules* (1) *et* (2) *prennent les valeurs remarquables*

$$\frac{2a^3}{3} \text{ et } 4a^2.$$

Remarque II. — *Ces formules servent à mesurer les voussoirs et les douelles des voûtes en plein cintre et en arc de cloître droites ou biaises.*

La section du volume commun aux deux cylindres par le plan des axes est un losange ABCD dont le côté est égal à a, et la hauteur à $2r$; l'aire de cette section est donc

$$2ar.$$

L'intersection des deux surfaces cylindriques se projette sur le plan des axes, suivant les diagonales AC, BD, leur intersection O est la projection du point le plus élevé, en supposant le plan horizontal.

La section faite dans le volume commun par un plan parallèle au plan des axes, mené à la distance h, est un losange semblable au premier, ayant pour hauteur la corde d'intersection de la section droite de l'un des cylindres par le plan sécant.

Les losanges étant semblables, leurs aires sont entre elles comme les carrés des hauteurs; l'aire de la section est donc

$$2ar\frac{r^2-h^2}{r^2} = 2ar - 2ar\frac{h^2}{r^2}.$$

Or $2ar\frac{h^2}{r^2}$ est l'aire de la section qui serait faite dans une pyramide ayant pour base ABCD et pour hauteur r, par un plan parallèle à la base, mené à la distance h du sommet. Le volume compris entre les deux plans est donc la différence des volumes d'un prisme et d'une pyramide ayant pour hauteur h et pour bases respectivement $2ar$ et $2ar\frac{h^2}{r^2}$; ce volume a donc pour mesure

$$2arh - 2ar\frac{h^2}{r^2}\frac{h}{3} = \frac{2ah(3r^2 - h^2)}{3r}.$$

Si, dans cette formule, on fait $h = r$, on aura pour mesure du volume commun situé d'un côté du plan des axes

$$\frac{4}{3}ar^2,$$

mesure qu'on obtiendrait immédiatement en remarquant que ce volume est la différence d'un prisme et d'une pyramide ayant pour base ABCD et pour hauteur r. La mesure du volume commun tout entier est donc

$$\frac{8}{3}ar^2.$$

Ce volume peut être décomposé en pyramides ayant pour bases les éléments de surface et pour sommet le point O, et, par suite, r pour hauteur commune. On a donc

$$V = S\frac{r}{3},$$

d'où

$$S = \frac{3V}{r} = 8ar.$$

Si, du volume $\frac{2ah(3r^2-h^2)}{3r}$, on retranche la pyramide qui a pour base $2ar\frac{r^2-h^2}{r^2}$ et pour hauteur h, et dont la mesure est $\frac{2ah(r^2-h^2)}{3r}$, le volume restant $\frac{4}{3}arh$ a pour mesure le produit de sa surface convexe par $\frac{r}{3}$, pour la même raison que plus haut; cette surface a donc pour mesure

$$4ah,$$

et il en est de même de la surface comprise entre deux plans parallèles au plan des axes, h étant la distance de ces deux plans.

On peut aussi trouver directement la mesure de la surface, et en déduire celle du volume par le raisonnement inverse.

En effet, soit a' le côté du losange, intersection du volume commun par un plan parallèle au plan des axes, mené à la distance h, $2c$ la corde d'intersection par ce plan de la section droite d'un des cylindres. Considérons l'élément de surface compris entre ce plan et le plan parallèle infiniment voisin. Soient d la distance des deux plans, et mn l'arc de circonférence de la section droite comprise entre eux. L'élément de surface a pour mesure

$$4a' \times mn.$$

Or

$$\frac{a'}{a} = \frac{c}{r} = \frac{d}{mn};$$

donc

$$4a' \times mn = 4ad.$$

C'est l'aire d'un rectangle ayant pour base $4a$ et pour hauteur d; il en résulte que l'aire comprise entre deux plans parallèles au plan des axes et distants de h a pour mesure

$$4ah,$$

et celle du volume commun tout entier

$$8ar,$$

d'où, pour l'expression de ce volume,

$$8ar\frac{r}{3} = \frac{8}{3}ar^2.$$

Quand les axes sont perpendiculaires, $a = 2r$; les formules (1) et (2) deviennent

$$V = \frac{2}{3}a^3, \quad S = 4a^2.$$

Note. — M. Ch.-Ph. Cahen, lieutenant au 1er régiment du Génie, à Versailles, nous adresse également une solution fort simple des questions précédentes, qu'il étend aux voûtes à sections elliptiques dont les intersections sont des courbes planes.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Laisant. — Les observations de M. Moret-Blanc (mai 1875, p. 229) ont ramené mon attention sur les lois relatives aux fractions périodiques insérées dans le tome XIII, pages 569-571. La loi I, qui consiste en une remarque assez simple, a été énoncée incidemment par moi dans une Note intitulée : *Moyen de trouver la période d'une fraction périodique sans faire de division*, et insérée dans le journal *les Mondes*, en 1869 (t. XIX, p. 331). Je ne saurais dire si cette propriété avait été déjà remarquée précédemment.

La plupart des lois suivantes, avec un grand nombre d'autres propriétés, ont été signalées dans les articles ci-dessus énoncés, que M. Étienne Beaujeux et moi avons publiés dans les *Nouvelles Annales*, il y a déjà plusieurs années.

De quelques propriétés des fractions périodiques (2^e série, t. VII, p. 289; 1868).

Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques (2^e série, t. IX, p. 221, 271, 302, 354; 1870).

Ni mon collaborateur, ni moi, nous n'avons la prétention d'avoir inventé *toutes* les propriétés indiquées dans nos articles; certaines d'entre elles sont bien connues. Mais le titre : *Propriétés* NOUVELLES *des fractions périodiques*, placé en tête des énoncés du tome XIII, p. 569, me semble, dans l'espèce, être peu justifié.

Extrait d'une Lettre de M. Moret-Blanc à M. Gerono. — La solution de la question 1155, insérée dans le numéro de juin, exige une discussion que j'ai eu tort d'omettre; toutefois l'incertitude qu'elle laisse subsister peut être levée en quelques mots.

Lorsque $2X + a = 0$, l'équation (9), comme vous l'avez fait remarquer, admet trois racines doubles; mais le centre du cercle (C) se trouvant alors sur l'axe des x, ce cercle coupe la courbe proposée en des points symétriques; la condition de contact exigerait une racine quadruple qui serait une racine double des équations (3) et (10) : la solution $2X + a = 0$ doit donc être complétement rejetée, comme $Y = 0$.

Dans tous les autres cas, le centre du cercle (C) n'étant pas sur l'axe des x, ce cercle ne peut couper la courbe proposée en des points symétriques par rapport à cet axe; une racine double ne peut donc provenir que d'un contact réel ou imaginaire.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1169

(voir 2e série, t. XIII, p. 192);

PAR M. RASSELET,

Élève au collége de Soissons.

On donne sur un même plan deux circonférences inégales : décrire une parabole doublement tangente à *chacune d'elles, et trouver la valeur du paramètre de la parabole en fonction des rayons et de la distance des centres des deux circonférences données.*

Soient O, O' les centres et r, r' les rayons des deux circonférences; $r < r'$. Il est évident : 1° que la ligne OO' des centres est l'axe de la parabole; 2° que le sommet de la parabole se trouve sur le prolongement de la droite O'O du côté du plus petit des deux cercles, dont le centre est O.

Soient M, M' des points de contact de la parabole et des deux circonférences O, O'; les tangentes MS, M'S menées en ces points aux deux cercles rencontrent la droite O'O suffisamment prolongée en des points S, S', et forment ainsi, avec OO', deux triangles rectangles OMS, O'M'S', dont les hypoténuses OS, O'S' ont pour milieu le foyer F de la parabole; les rayons OM, OM' seront des normales à cette courbe, et, si l'on mène des points M, M' des perpendiculaires à l'axe O'O, les sous-normales seront égales chacune au paramètre p de la parabole. Si nous connaissions ce paramètre, la question serait résolue, car il suffirait de prendre à partir du point O une longueur égale au paramètre dans le sens O'O pour avoir le pied de la perpendiculaire MP; le triangle OMS serait alors complétement déterminé, et le milieu F de l'hypoténuse OS serait le foyer de la parabole.

Or les triangles rectangles OMS, O'M'S' donnent

$$r^2 = p \times \text{OS}, \quad r'^2 = p \times \text{O}'\text{S}',$$

d'où

$$\frac{r'^2 - r^2}{p} = \text{O}'\text{S}' - \text{OS} = 2\text{OO}';$$

car, le point F étant, à la fois, le milieu de OS et de O'S', la distance SS' = OO'. On a donc enfin, en désignant par

d la distance OO' des deux centres,

$$p = \frac{r'^2 - r^2}{2d}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que le paramètre p soit moindre que le petit rayon r, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{r'^2 - r^2}{2d} < r.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Garreta et Louis Goulin, élèves au lycée de Rouen; Lez; Gambey; Chadu; Moreau; Launoy; Jacob; Moret-Blanc; P. S., de Cherbourg; L.-P. de Cuerne, à Liége; Georges Vandaine, élève de l'école Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert); H. Gondelon, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

QUESTIONS.

1181. On a

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots,$$

quels que soient les nombres $a, b, c, \ldots$, pourvu que le second membre forme une série convergente (ce qui a toujours lieu, si $a, b, c, \ldots$ sont des nombres positifs croissants, par exemple). (H. Laurent.)

1182. Soient A et B deux points d'un ovale de Descartes dont les foyers sont F et F'.

AF coupe en K le cercle décrit de F comme centre avec FB pour rayon; AF' coupe en H le cercle décrit de F' comme centre avec F'B pour rayon. Joignons FH et F'K, ces droites se coupent en I.

Démontrer que la droite AI passe par un point fixe, lorsque A se meut sur l'ovale. (E. Lemoine.)

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

des formules qui donnent la somme des puissances m de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres, et $\cos ma$, $\sin ma$ en fonction d'une seule des deux lignes $\sin a$ ou $\cos a$;

PAR M. DESBOVES.

THÉORÈME I. — *On forme le tableau*

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{array}{llll}
h & & & \\
l & & & \\
l & h & & \\
l & h+l & & \\
l & h+2l & h & \\
l & h+3l & 2h+l & \\
l & h+4l & 3h+3l & h \\
l & h+5l & 4h+6l & 3h+l \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\right.
$$

comme il suit :

On écrit d'abord l'un au-dessous de l'autre deux nombres quelconques h et l, puis on obtient chacun des termes dans les lignes horizontales suivantes, en ajoutant au terme qui est au-dessus de lui, dans la ligne précédente, celui qui est à la gauche de ce dernier dans la ligne qui précède de deux rangs celle que l'on veut former : dans le tableau ainsi construit, le terme de rang $p+1$, dans la $m+1^{\text{ième}}$ ligne horizontale, est égal à $hC^{m-p-1}_{p-1} + lC^{m-p-1}_{p}$ (C^m_n représente, comme à l'ordinaire, le nombre des combinaisons de m lettres n à n).

Nota. — En formant le tableau (1), on suppose que chaque ligne horizontale commence et se termine par un zéro.

Réduisons d'abord le tableau (1) aux multiplicateurs de l, nous aurons le nouveau tableau

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} 1 \\ 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 10 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

Je dis que les nombres inscrits dans chaque ligne verticale de ce tableau, à partir de la deuxième, sont les nombres des différents ordres du triangle de Pascal. En effet, le tableau (2) peut être considéré comme formé par la même règle que le tableau (1); la seule différence, c'est que les deux premiers nombres du tableau sont maintenant égaux à l'unité. Il suit évidemment de là que, si l'on faisait remonter toutes les lignes verticales, à partir de la deuxième, de telle sorte que les premiers nombres de deux lignes verticales consécutives fussent placés dans deux lignes horizontales, consécutives elles-mêmes, le mode de formation du tableau (2) deviendrait identique à celui du triangle de Pascal. Le tableau (2) serait donc le triangle de Pascal lui-même.

Cela posé, proposons-nous de trouver l'expression générale du terme de rang $p+1$ dans la $m^{\text{ième}}$ ligne horizontale du tableau (2).

A cet effet, on remarque qu'après avoir fait remonter les lignes verticales du tableau (2), comme il a été dit, le deuxième, le troisième, etc., le $(p+1)^{\text{ième}}$ nombre de la $m^{\text{ième}}$ ligne horizontale se placeront respectivement dans les lignes horizontales dont les rangs sont $m-1$, $m-2, \ldots, m-p$. On voit ainsi que le terme de rang $p+1$, dans la $m^{ième}$ ligne horizontale du tableau (2), est le terme de rang $p+1$ dans la $(m-p)^{ième}$ ligne horizontale du triangle de Pascal; il est donc égal à C_p^{m-p-1}, et, par suite, ce dernier nombre est le coefficient de l dans le terme de rang $p+1$ de la $(m+1)^{ième}$ ligne horizontale du tableau (1).

Si maintenant on forme un troisième tableau avec les multiplicateurs de h, on déduit de ce tableau le triangle de Pascal, comme on l'a fait pour le deuxième tableau, et l'on voit ainsi que le coefficient de h, dans le terme général du premier tableau, est C_{p-1}^{m-p-1}. Ce terme général a donc bien l'expression indiquée par l'énoncé.

Théorème II. — *Si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont des fonctions de deux quantités b et c, telles que trois fonctions consécutives u_{n-2}, u_{n-1}, u_n soient liées entre elles par la relation*

$$u_n = bu_{n-1} - cu_{n-2}, \tag{1}$$

les deux premières fonctions u_0, u_1 étant égales à b^0 et b multipliés respectivement par deux coefficients quelconques h et l, le terme de rang $p+1$, dans le développement de u_m, aura pour coefficient

$$(-1)^p (h C_{p-1}^{m-p-1} + l C_p^{m-p-1}).$$

En formant d'abord, d'après la relation (1), les développements de quelques-unes des premières fonctions, on voit que ces fonctions sont des polynômes entiers, dont le degré est égal à l'indice de u, et telles que, d'un terme au suivant, les exposants de b décroissent de deux unités, et les exposants de c croissent d'une unité à partir de zéro. On remarque aussi que les signes des coefficients sont alternativement $+$ et $-$.

On peut d'abord faire voir que la loi des exposants est générale. En effet, si l'on pose

$$u_{n-2} = b^{n-2} - db^{n-4}c + eb^{n-6}c^2 - fb^{n-8}c^3 + \ldots,$$
$$u_{n-1} = b^{n-1} - d'b^{n-3}c + e'b^{n-5}c^2 - f'b^{n-7}c^3 + \ldots;$$

en appliquant la relation (1), on a

$$(2)\quad u_n = b^n - (d'+1)b^{n-2}c + (e'+d)b^{n-4}c^2 - (f'+e)b^{n-6}c^3 + \ldots.$$

On voit que la loi des exposants est vérifiée pour u_n; et, comme elle est vraie pour u_0 et u_1, elle est générale.

La formule (2) établit aussi un mode de formation des coefficients d'une des fonctions au moyen des coefficients des deux fonctions précédentes. On voit que, si les coefficients, abstraction faite des signes, de deux fonctions consécutives sont écrits sur deux lignes horizontales, de telle sorte que les coefficients de la seconde fonction soient placés au-dessous des coefficients de même rang de la première, chaque coefficient de la fonction suivante s'obtiendra en ajoutant au coefficient qui est au-dessus de lui celui qui est à gauche de ce dernier dans la première des trois lignes horizontales. Le mode de formation est donc tout semblable à celui du tableau (1); et, si l'on suppose que u_0 et u_1 aient respectivement pour valeur hb^0 et lb, on voit bien, en tenant compte de l'alternance des signes, que le coefficient du terme qui en a p avant lui, dans le développement de u_m, a pour expression

$$(-1)^p(hC_{p-1}^{m-p-1} + lC_p^{m-p-1}).$$

Applications du théorème II.

Problème I. — *Trouver la somme des puissances m de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres; en d'autres termes, x' et x'' étant* *les racines de l'équation du second degré*

$$x^2 - bx + c = 0,$$

trouver le développement de $x'^m + x''^m$ *en fonction de* b *et* c.

On a

$$x'^0 + x''^0 = 2, \quad x' + x'' = b$$

et, en général,

$$x'^m + x''^m = b(x'^{m-1} + x''^{m-1}) - c(x'^{m-2} + x''^{m-2}) \text{ (*)}.$$

La fonction $x'^m + x''^m$ est donc une fonction u_m dans laquelle h et l sont respectivement égaux à 2 et 1. Alors, en donnant à h et l ces valeurs particulières dans l'expression du coefficient du terme général de u_m, on obtient

$$(-1)^p (2C_{p-1}^{m-p-1} + C_p^{m-p-1})$$

ou

$$(-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p}$$

pour expression du coefficient du terme qui en a p avant lui dans le développement de $x'^m + x''^m$. On a donc

$$x'^m + x''^m = b^m - \frac{m}{1} b^{m-2}c + \frac{m(m-3)}{1.2} b^{m-4}c^2 \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p} b^{m-2p} c^p \ldots.$$

Problème II. — *Exprimer* $\cos ma$ *en fonction de la seule ligne trigonométrique* $\cos a$.

On a

$$2\cos^0 a = 2, \quad 2\cos a = 2\cos a,$$

$$2\cos ma = 2\cos(m-1)a \times 2\cos a - 2\cos(m-2)a.$$

La fonction $2\cos ma$ est donc une fonction u_m telle, que

(*) Voir *Questions d'Algèbre*, p. 71.

b, c, h, l ont respectivement pour valeurs $2\cos a$, 1, 2, 1. Alors l'expression du coefficient du terme général est la même que dans le développement de $x'^m + x''^m$, et l'on a immédiatement

$$2\cos ma = (2\cos a)^m - m(2\cos a)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos a)^{m-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1.2.3\ldots p}(2\cos a)^{m-2p}$$

PROBLÈME III. — *Trouver le développement de* $\frac{\sin ma}{\sin a}$ *en fonction de* $\cos a$ *seulement.*

On a

$$\frac{\sin a}{\sin a} = 1, \quad \frac{\sin 2a}{\sin a} = 2\cos a,$$
$$\frac{\sin ma}{\sin a} = \frac{\sin(m-1)a}{\sin a} 2\cos a - \frac{\sin(m-2)a}{\sin a}.$$

La fonction $\frac{\sin ma}{\sin a}$ est donc une fonction u_{m-1}, telle que b est égal à $2\cos a$, et c, h, l sont égaux à l'unité. D'ailleurs le rang de la fonction $\frac{\sin ma}{\sin a}$ est m, et elle doit être représentée par u_{m-1}. Il suit de là que, pour obtenir le coefficient du terme qui en a p avant lui dans le nouveau développement, on doit faire dans l'expression générale (théorème II) h et l égaux à 1, puis changer m en $m-1$. b et c étant d'ailleurs respectivement égaux à $2\cos a$ et 1, on a

$$\frac{\sin ma}{\sin a} = (2\cos a)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos a)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos a)^{m-5} - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p)}{1.2.3\ldots p}(2\cos a)^{m-2p-1}.$$

Remarque. — En changeant a en $\frac{\pi}{2} - a$ dans les deux formules précédentes, on en déduira deux autres, qui détermineront, en fonction rationnelle de $\sin a$, $\cos ma$ et $\frac{\sin ma}{\cos a}$ si m est pair, $\frac{\cos ma}{\cos a}$ et $\sin ma$ si m est impair.

SOLUTION DES PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES DE M. C. MOREAU

(voir même tome, p. 274);

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Connaissant le mode de décomposition en facteurs premiers de l'entier n, trouver le nombre des racines de la congruence*

$$x^2 \equiv 1 \pmod{n}.$$

Cette question est résolue dans l'*Algèbre supérieure* de Serret, n° 292.

Soit m le nombre des facteurs premiers impairs de n. Le nombre des racines de la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ est 2^m si n est impair ou double d'un impair, 2^{m+1} si n est divisible par 4 et non par 8, et 2^{m+2} si n est multiple de 8.

2. P *désignant le produit de tous les nombres inférieurs à un nombre n et premiers avec lui, indiquer quels sont les cas où n divise* $P+1$.

Quand n est un nombre premier, une puissance d'un nombre premier ou le double d'une telle puissance, ou enfin quand il est égal à 4 (théorème de Wilson généralisé). (Voir l'*Algèbre supérieure* de Serret, n° 296.)

3. *Soient $a, b, \ldots, l$ les différents facteurs qui entrent dans la composition de l'entier n, et m le plus petit commun multiple des nombres* $\frac{n}{2ab\ldots l}$, $a-1$,

$b-1, \ldots, l-1$; *montrer que tout nombre premier avec n satisfait à la congruence*

$$x^m \equiv 1 \pmod{n}.$$

Si $\varphi(n)$ indique combien il y a de nombres premiers avec n et non supérieurs à n, x étant premier avec n, on a

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

théorème de Fermat généralisé par Euler (SERRET, *Alg. sup.*, nº 296, ou LE BESGUE, *Introduction à la théorie des nombres*, nº 41).

Si n est un nombre premier $\varphi(n) = n-1$, et si n est une puissance d'un nombre premier a, $n = a^\alpha$, $\varphi(n) = (a-1)a^{\alpha-1}$.

De plus, si l'on a $x^m \equiv 1 \pmod{n}$, on aura aussi $x^{km} \equiv 1 \pmod{n}$, k étant un nombre entier positif quelconque. Cela posé, soit $n = a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$.

$x^m - 1$ sera divisible par n, s'il l'est séparément par les nombres premiers entre eux $a^\alpha, b^\beta, \ldots, l^\lambda$; c'est-à-dire si m est un multiple de $(a-1)a^{\alpha-1}$, $(b-1)b^{\beta-1}, \ldots$, $(l-1)l^{\lambda-1}$, ou, ce qui revient au même, puisque $a^{\alpha-1}$, $b^{\beta-1}, \ldots, l^{\lambda-1}$ sont premiers entre eux, un multiple de $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}l^{\lambda-1} = \dfrac{n}{ab\ldots l}$ et de $a-1$, $b-1$, $l-1$.

Toutefois, si l'un des facteurs, a par exemple, est égal à 2, on a, n étant impair,

$$x^2 = 8k+1, \quad x^4 = 16k+1, \quad x^8 = 32k+1, \ldots,$$

et, en général,

$$x^{2n-2} \equiv 1 \pmod{2^n};$$

donc, si n est multiple de 8, on pourra remplacer

$$\frac{n}{ab\ldots l} \quad \text{par} \quad \frac{n}{2ab\ldots l}.$$

Il en sera de même si n est multiple de 4, pourvu qu'il y ait un autre facteur premier impair dont l'excès sur l'unité restituera le facteur 2, nécessaire pour que $x^m - 1$ soit divisible par 4.

Si n est un nombre pair non divisible par 4, $\frac{n}{2ab\ldots l}$ est fractionnaire.

On pourra donc prendre pour m le plus petit multiple commun des nombres $\frac{n}{2ab\ldots l}$, $a-1$, $b-1, \ldots, l-1$, toutes les fois que $\frac{n}{2ab\ldots l}$ sera entier, excepté pour $n=4$.

4. *n étant un entier positif quelconque, démontrer l'égalité*

$$1.2.3\ldots n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} (m-k+1)^n.$$

L'égalité développée s'écrit

$$1.2.3\ldots n = (m+1)^n - \frac{n}{1} m^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(m-1)^n - \ldots \pm (m+1-n)^n.$$

Les deux membres représentent chacun la $n^{ième}$ différence de la fonction $(x+1-n)^n$, dans laquelle on donne successivement à x les $n+1$ valeurs $m, m+1, \ldots, m+n$. L'égalité est donc démontrée.

5. *Quels que soient les entiers positifs m, n, p,* on a

$$0 = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} \times (m+kp)(m+kp-1)\ldots(m+kv-n+2).$$

Développons

$$
\begin{aligned}
0 = m(m-1)\ldots(m-n+2) \\
-\frac{n}{1}(m+p)(m+p-1)\ldots(m+p-n+2) \\
+\frac{n(n-1)}{1.2}(m+2p)(m+2p-1)\ldots(m+2p-n+2)\ldots \\
\pm(m+np)(m+np-1)\ldots(m+np-n+2).
\end{aligned}
$$

Le second membre représente $\pm$ la $n^{ième}$ différence de la fonction

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2),$$

dans laquelle on donne successivement à x les valeurs $m, m+p, m+2p, \ldots, m+np$; or, cette fonction étant du degré $n-1$, sa différence $n^{ième} = 0$; donc, etc.

6. *On tire successivement des boules d'une urne qui en contient m, toutes différentes, et avant chaque tirage on remet dans l'urne la boule qui a été extraite au tirage précédent. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité d'amener p fois de suite la même boule avant que pas une des q boules désignées à l'avance ne soit sortie.*

En faisant dans la formule trouvée $m=13$, $p=4$, $q=2$, *on aura la chance du coup appelé* lansquenet *au jeu qui porte ce nom, en se servant d'un nombre infini de jeux de cartes. Cette chance est* $\frac{11}{4771} = 0,0023$ *environ.*

Désignons par A les boules dont l'une doit sortir p fois de suite, et par b celles qui ne doivent pas sortir.

La série des p tirages consécutifs amenant la même boule A peut commencer au premier, au deuxième, au troisième, etc., tirage, et la probabilité de l'événement désigné est la somme des probabilités correspondant à ces différents cas, sans qu'aucune boule B ne sorte.

Premier cas. — La probabilité qu'une boule A sorte au premier tirage est $\frac{m-q}{m}$, la probabilité de la sortie de cette même boule à chacun des tirages suivants est $\frac{1}{m}$ pour chaque tirage, et, par suite, la probabilité de p tirages consécutifs d'une boule A commençant au premier est $\frac{m-q}{m^p}$.

Deuxième cas. — La probabilité de la sortie d'une boule A au premier tirage suivie de la sortie d'une *autre* boule A au second tirage est $\frac{(m-q)(m-q-1)}{m^2}$. La probabilité de la sortie d'une boule A à p tirages consécutifs commençant au second est donc $\frac{(m-q)(m-q-1)}{m^{p+1}}$.

Troisième cas. — La probabilité que les deux premiers tirages amèneront des boules A est $\frac{(m-q)^2}{m^2}$; la probabilité de la sortie au troisième tirage d'une boule A différente de celle qui est sortie au second est $\frac{m-q-1}{m}$; on a donc, pour la probabilité de ces trois événements, $\frac{(m-q)^2(m-q-1)}{m^3}$, et, pour la probabilité de p tirages consécutifs d'une même boule A commençant au troisième,

$$\frac{(m-q)^2(m-q-1)}{m^{p+2}},$$

et ainsi de suite.

La probabilité d'amener p fois de suite une même boule A, avant que pas une des boules B ne soit sortie, est donc

$$\frac{m-q}{m^p}+\frac{(m-q)(m-q-1)}{m^{p+1}}+\frac{(m-q)^2(m-q-1)}{m^{p+2}}+\ldots$$

$$=\frac{m-q}{m^p}\left\{1+\frac{m-q-1}{m}\left[1+\frac{m-q}{m}+\frac{(m-q)^2}{m^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(m-q)^3}{m^3}+\ldots\right]\right\}$$

$$=\frac{m-q}{m^p}\left(1+\frac{m-q-1}{m}\times\frac{m}{q}\right)=\frac{(m-1)(m-q)}{qm^p},$$

$$\mathrm{P}=\frac{(m-1)(m-q)}{qm^p}.$$

Si, dans cette formule, on fait $m=13$, $p=4$, $q=2$, on a

$$\frac{12.11}{2.13^4}=\frac{66}{13^4}=\frac{66}{28561}=0{,}0023 \text{ environ},$$

valeur à très-peu près, mais non rigoureusement égale à celle que donne M. Moreau.

SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET A TROIS VARIABLES;

Par M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

I.

1. Soit considérée l'équation d'une hyperbole sous la forme

$$(1)\qquad u^2-v^2=\mathrm{K},$$

u et v désignant deux fonctions du premier degré en x et y, telles que les droites données par $u=0$, $v=0$ aient un point commun et un seul.

On peut transformer le binôme $u^2 - v^2$ en

$$
\begin{aligned}
u^2 - v^2 &= \lambda(u+v)\frac{u-v}{\lambda} \\
&= \left[\frac{\lambda(u+v)+\dfrac{u-v}{\lambda}}{2}\right]^2 - \left[\frac{\lambda(u+v)-\dfrac{u-v}{\lambda}}{2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

de sorte que, si l'on pose

$$\tag{2} \frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=\lambda', \quad \frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=\lambda'',$$

il vient

$$\tag{3} u^2 - v^2 = (\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2.$$

L'équation proposée peut ainsi être changée en

$$\tag{4} (\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2 = \mathrm{K}.$$

On peut disposer de la constante λ de façon à avoir, par $\lambda' u + \lambda'' v = 0$, $\lambda'' u + \lambda' v = 0$, deux diamètres conjugués quelconques de la courbe.

2. Supposons que le diamètre à représenter par $\lambda' u + \lambda'' v = 0$ soit donné par l'équation

$$mu - nv = 0.$$

Il s'agira d'avoir

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda'}{m} = \frac{\lambda''}{-n} = \frac{\lambda}{m-n} = \frac{\dfrac{1}{\lambda}}{m+n} = \frac{1}{\sqrt{m^2-n^2}} \\
= \frac{\lambda' u + \lambda'' v}{mu - nv} = \frac{\lambda'' u + \lambda' v}{-nu + mv};
\end{aligned}
$$

d'où résultent

$$\lambda' u + \lambda'' v = \frac{mu - nv}{\sqrt{m^2 - n^2}},$$

$$\lambda'' u + \lambda' v = \frac{-nu + mv}{\sqrt{m^2 - n^2}}.$$

L'équation (4) est donc

$$(4') \qquad \frac{(mu - nv)^2}{m^2 - n^2} - \frac{(-nu + mv)^2}{m^2 - n^2} = \mathrm{K}.$$

3. Si les deux diamètres ont pour équations

$$mu - nv = 0, \quad m'u - n'v = 0,$$

on aura, avec

$$\frac{\lambda'}{m} = \frac{\lambda''}{-n} = \frac{\lambda}{m-n} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{m+n} = \frac{1}{\sqrt{m^2 - n^2}} = \frac{\lambda' u + \lambda'' v}{mu - nv},$$

$$\frac{\lambda''}{m'} = \frac{\lambda'}{-n'} = \frac{\lambda}{m' - n'} = \frac{-\frac{1}{\lambda}}{m' + n'} = \frac{1}{\sqrt{n'^2 - m^2}} = \frac{\lambda'' u + \lambda' v}{m' u - n' v},$$

d'où l'équation

$$(4'') \qquad \frac{(mu - nv)^2}{m^2 - n^2} + \frac{(m'u - n'v)^2}{m'^2 - n'^2} = \mathrm{K},$$

eu égard à la relation

$$(5) \qquad mm' - nn' = 0.$$

Qu'on change v en vi et n en ni, n' en ni, cela s'appliquera à l'ellipse.

4. Ainsi l'équation

$$u^2 + v^2 = \mathrm{K}$$

peut se changer en

$$(4') \qquad \frac{(mu + nv)^2}{m^2 + n^2} + \frac{(-nu + mv)^2}{m^2 + n^2} = \mathrm{K},$$

un diamètre de l'ellipse, quelconque, étant donné par

$$mu + nv = 0,$$

le conjugué par

$$-nu + mv = 0;$$

et, si les deux diamètres conjugués ont pour équations

$$mu + nv = 0, \quad m'u + n'v = 0,$$

moyennant la condition

$$mm' + nn' = 0,$$

l'ellipse a pour équation correspondante

$$(4'') \qquad \frac{(mu + nv)^2}{m^2 + n^2} + \frac{(m'u + n'v)^2}{m'^2 + n'^2} = \mathrm{K}.$$

5. *Remarque.* — Du moment que quatre quantités m, n, m', n' sont liées par la relation

$$mm' + nn' = 0,$$

il s'ensuit, d'après cela,

$$\frac{m^2}{m^2 + n^2} + \frac{m'^2}{m'^2 + n'^2} = 1,$$

$$\frac{n^2}{m^2 + n^2} + \frac{n'^2}{m'^2 + n'^2} = 1,$$

$$\frac{mn}{m^2 + n^2} + \frac{m'n'}{m'^2 + n'^2} = 0.$$

Ce sont d'ailleurs des relations faciles à vérifier. En les appliquant à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on retrouve entre les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués des relations connues.

Soient, pour les deux diamètres conjugués, les équations

$$m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} = 0,$$

$$m'\frac{x}{a} + n'\frac{y}{b} = 0.$$

L'équation de l'ellipse sera, sous la forme ($4''$),

$$\frac{\left(m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}\right)^2}{m^2+n^2}+\frac{\left(m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}\right)^2}{m'^2+n'^2}=1$$

ou

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}=1,$$

en posant

$$m\frac{x}{a}+n\frac{y}{b}=\sqrt{m^2+n^2}\,\frac{X}{a'},$$

$$m'\frac{x}{a}+n'\frac{y}{b}=\sqrt{m'^2+n'^2}\,\frac{Y}{b'},$$

d'où, en observant que

$$mn'-m'n=\frac{n'}{m}(m^2+n^2)=-\frac{n}{m'}(m'^2+n'^2),$$

on tire, pour $Y=0$, $X=a'$,

$$\frac{x}{a}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad \frac{y}{b}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

et, par conséquent, les relations reviennent à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

$$xy+x'y'=0;$$

et, comme l'on a

$$(x^2+x'^2)(y^2+y'^2)=(xy'-yx')^2+(xy+x'y')^2,$$

il s'ensuit

$$(xy'-yx')^2=a^2b^2,\ldots.$$

6. Quand on part de l'équation

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

on obtient, par une transformation familière à tous,

$$f(x, y) = \frac{1}{A}(Ax + By + D)^2 + \frac{A}{AC - B^2}\left(\frac{AC - B^2}{A} y + \frac{BD - AE}{A}\right)^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2},$$

Δ étant le discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$u = \frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}}, \quad v = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A} y + \frac{BD - AE}{A}\right),$$

on a

$$mu + nv = m\frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}} + n\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A} y + \frac{BD - AE}{A}\right),$$

$$-nu + mv = -n\frac{Ax + By + D}{\sqrt{A}} + m\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\left(\frac{AC - B^2}{A} y + \frac{BD - AE}{A}\right).$$

Soit donné

$$m_1 x + n_1 y + p_1 = mu + nv = 0 \text{ pour un diamètre,}$$

et soit

$$m_2 x + n_2 y + p_2 = -nu + mv = 0 \text{ pour le conjugué.}$$

Nous avons là

$$m_1 = m\sqrt{A}, \quad n_1 = m\frac{B}{\sqrt{A}} + n\frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}},$$

$$p_1 = m\frac{D}{\sqrt{A}} - n\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{AC - B^2}}\frac{BD - AE}{A},$$

$$m_2 = -n\sqrt{A}, \quad n_2 = -n\frac{B}{\sqrt{A}} + m\frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}},$$

$$p_2 = -n\frac{D}{\sqrt{A}} - m\frac{BD - AE}{\sqrt{A}\sqrt{AC - B^2}};$$

d'où

$$m = \frac{m_1}{\sqrt{A}}, \quad n = \frac{An_1 - Bm_1}{\sqrt{A}\sqrt{AC - B^2}},$$

$$m_2 = -\frac{An_1 - Bm_1}{\sqrt{AC - B^2}}, \quad n_2 = -\frac{Bn_1 - m_1 C}{\sqrt{AC - B^2}}, \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{An_1 - Bm_1}{Bn_1 - Cm_1},$$

ou

$$An_1 n_2 + Cm_1 m_2 - B(m_1 n_2 + n_1 m_2) = 0,$$

puis

$$p_1 = \frac{m_1(DC - BE) - n_1(BD - AE)}{AC - B^2},$$

$$p_2 = \frac{-Dn_1 + Em_1}{\sqrt{AC - B^2}}:$$

d'après quoi

$$m_2 x + n_2 y + p_2 = \frac{m_1(Bx + Cy + E) - n_1(Ax + By + D)}{\sqrt{AC - B^2}},$$

et l'on a, pour l'équation $(4')$,

$$(m_1 x + n_1 y + p_1)^2 + \frac{(m_1 \tfrac{1}{2} f'_y - n_1 \tfrac{1}{2} f'_x)^2}{AC - B^2}$$
$$+ \Delta \frac{An_1^2 - 2Bm_1 n_1 + Cm_1^2}{(AC - B^2)^2} = 0.$$

Ajoutons que, en raison de ce que l'on a

$$m_1x + n_1y + p_1 = \frac{(m_1C - n_1B)\frac{1}{2}f'_x + (m_1A - n_1B)\frac{1}{2}f'_y}{AC - B^2},$$

l'équation est encore

$$\begin{aligned}[]&[(m_1C - n_1B)\tfrac{1}{2}f'_x + (m_1A - n_1B)\tfrac{1}{2}f'_y]^2\\ &\quad + (AC - B^2)(m_1\tfrac{1}{2}f'_y - n_1\tfrac{1}{2}f'_x)^2\\ &\quad + \Delta(An_1^2 - 2Bm_1n_1 + Cm_1^2) = 0.\end{aligned}$$

A prendre $m_1 = n_1 = 1$, il vient

$$\begin{aligned}&\left(x + y - \frac{BE - CD + BD - AE}{AC - B^2}\right)^2\\ &\quad + \frac{(\frac{1}{2}f'_x - \frac{1}{2}f'_y)^2}{AC - B^2} + \Delta\frac{A - 2B + C}{(AC - B^2)^2} = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}[]&[(C - B)\tfrac{1}{2}f'_x + (A - B)\tfrac{1}{2}f'_y]^2\\ &\quad + (AC - B^2)(\tfrac{1}{2}f'_x - \tfrac{1}{2}f'_y)^2 + \Delta(A - 2B + C) = 0.\end{aligned}$$

Si l'on prend $m_1 = - n_1 = 1$, on a

$$\begin{aligned}&\left[x - y - \frac{BE - CD - (BD - AE)}{AC - B^2}\right]^2\\ &\quad + \frac{(\frac{1}{2}f'_x + \frac{1}{2}f'_y)^2}{AC - B^2} + \Delta\frac{A + 2B + C}{(AC - B^2)^2} = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}[]&[(C + B)\tfrac{1}{2}f'_x - (A + B)\tfrac{1}{2}f'_y]^2\\ &\quad + (AC - B^2)(\tfrac{1}{2}f'_x + \tfrac{1}{2}f'_y)^2 + \Delta(A + 2B + C) = 0.\end{aligned}$$

II.

1. Soit considérée la fonction

$$u^2 - v^2 + w^2,$$

u, v, w étant des fonctions du premier degré de x, y, z.

En posant

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda', \quad \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda'',$$

on a

$$u^2 - v^2 + w^2 = u^2 - (\lambda' v + \lambda'' w)^2 + (\lambda'' v + \lambda' w)^2.$$

De là, par

$$\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = \mu', \quad \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) = \mu'',$$

on déduit

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + w^2 = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda'' w)^2 \\ & - (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w)^2 + (\lambda'' v + \lambda' w)^2. \end{aligned}$$

Puis, si l'on fait

$$\frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) = \nu', \quad \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) = \nu'',$$

il vient

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + w^2 = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda''' w)^2 \\ & - [\nu' (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w) + \nu'' (\lambda'' v + \lambda' w)]^2 \\ & + [\nu'' (\mu'' u + \mu' \lambda' v + \mu' \lambda'' w) + \nu' (\lambda'' v + \lambda' w)]^2 \\ = {} & (\mu' u + \mu'' \lambda' v + \mu'' \lambda'' w)^2 \\ & - [\nu' \mu'' u + (\nu' \mu' \lambda' + \nu'' \lambda'') v + (\nu' \mu' \lambda'' + \nu'' \lambda') w]^2 \\ & + [\nu'' \mu'' u + (\nu'' \mu' \lambda' + \nu' \lambda'') v + (\nu'' \mu' \lambda'' + \nu' \lambda') w]^2. \end{aligned}$$

2. Proposons-nous de faire dépendre cette équation de celles de trois plans diamétraux conjugués quelconques, données sous les formes

$$\begin{aligned} mu + nv + pw &= 0, \\ m'u + n'v + p'w &= 0, \\ m''u + n''v + p''w &= 0. \end{aligned}$$

On a d'abord, à l'égard du premier plan,

$$\frac{\mu'}{m}=\frac{\mu''\lambda'}{-n}=\frac{\mu''\lambda''}{p}=\frac{\mu''\lambda}{-n+p}=\frac{\mu''\frac{1}{\lambda}}{-n-p}=\frac{\mu''}{\sqrt{n^2-p^2}}$$

$$=\frac{\mu' u+\mu''\lambda' v+\mu''\lambda'' w}{mu-nv+pw}=\frac{\mu''}{-\frac{n}{\lambda'}}=\frac{\mu''}{\sqrt{n^2-p^2}}$$

$$=\frac{\mu}{m+\sqrt{n^2-p^2}}=\frac{\frac{1}{\mu}}{m-\sqrt{n^2-p^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2-n^2+p^2}},$$

de sorte que

$$\mu' u+\mu''\lambda' v+\mu''\lambda'' w=\frac{mu-nv+pw}{\sqrt{m^2-n^2+p^2}}.$$

On a, en second lieu,

$$\frac{\mu''\nu'}{m'}=\frac{\nu'\mu'\lambda'+\nu''\lambda''}{-n'}=\frac{\nu'\mu'\lambda''+\nu''\lambda'}{p'}=\frac{\mu''\nu' u+\ldots}{m'u-n'v+p'w}$$

$$=\frac{\nu'\mu'\lambda+\nu''\lambda}{-n'+p'}=\frac{\nu'\mu'\frac{1}{\lambda}-\nu''\frac{1}{\lambda}}{-n'-p'}=\frac{\nu'\mu'+\nu''}{\frac{-n'+p'}{\lambda}}$$

$$=\frac{\nu'\mu'-\nu''}{\lambda(-n'-p')}=\frac{\nu'\mu'}{-n'\lambda'-p'\lambda''}=\frac{\nu''}{+n'\lambda''+p'\lambda'}:$$

ce qui donne

$$\frac{\mu''}{m'}=\frac{\mu'}{-n'\lambda'-p'\lambda''},$$

c'est-à-dire

$$-\mu''\lambda' n'-\mu''\lambda'' p'=\mu' m',$$

par conséquent

$$nn'-pp'=mm' \quad \text{ou} \quad mm'-nn'+pp'=0.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\mu''\nu'}{m'}=\frac{\nu'}{-n'\frac{\lambda'}{\mu'}-p'\frac{\lambda''}{\mu'}}=\frac{\nu''}{+n'\lambda''+p'\lambda'},$$

d'où

$$\frac{\mu''\nu'}{m'} = \frac{\nu'}{\frac{n'n - p'p}{\sqrt{n^2 - p^2}}\frac{\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}{m}} = \frac{\nu''}{\frac{+ n'p + p'n}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\nu'}{\frac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}{\sqrt{n^2 - p^2}}} = \frac{\nu''}{\frac{np' + n'p}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\nu}{\frac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2} + (np' + n'p)}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{m'\sqrt{m^2 - n^2 + p^2} - (np' + n'p)}{\sqrt{n^2 - p^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2 - p^2}}{\sqrt{m'^2(m^2 - n^2 + p^2) - (np' + n'p)^2}},$$

à cause de

$$\lambda' = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - p^2}}, \quad \lambda'' = \frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2}}, \quad \mu' = \frac{m}{\sqrt{m^2 - n^2 + p^2}}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} m'^2(m^2 - n^2 + p^2) &- (np' + n'p)^2 \\ &= (nn' - pp')^2 - m'^2(n^2 - p^2) - (np' + pn')^2 \\ &= n^2n'^2 + p^2p'^2 - m'^2(n^2 - p^2) - n^2p'^2 - p^2n'^2 \\ &= (n'^2 - m'^2 - p'^2)(n^2 - p^2). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\frac{\mu''\nu'}{m'} = \frac{1}{\sqrt{n'^2 - m'^2 - p'^2}},$$

et, par conséquent,

$$m''\nu'u + \ldots = \frac{m'u - n'v + p''\alpha}{\sqrt{n'^2 - m'^2 - p'^2}}.$$

En troisième lieu, nous avons

$$\frac{\nu''\mu''}{m''}=\frac{\nu''\mu'\lambda'+\nu'\lambda''}{-n''}=\frac{\nu''\mu'\lambda''+\nu'\lambda'}{p''}=\frac{\nu''\mu''u+\ldots}{m''u-n''v+p''\varpi}$$

$$=\frac{\nu''\mu'\lambda+\nu'\lambda}{-n''+p''}=\frac{(\nu''\mu'-\nu')\frac{1}{\lambda}}{-n''-p''}=\frac{\nu''\mu'+\nu'}{\frac{-n''+p''}{\lambda}}$$

$$=\frac{\nu''\mu'-\nu'}{(-n''-p'')\lambda}=\frac{\nu''\mu'}{-n''\lambda'-p''\lambda''}=\frac{\nu'}{n''\lambda''+p''\lambda'},$$

d'où résulte, d'une part,

$$\frac{\mu''}{m''}=\frac{\mu'}{-n''\lambda'-p''\lambda''}$$

ou

$$-\mu''\lambda'n''-\mu''\lambda''p''-\mu'm''=0,$$

ou

$$nn''-pp''-mm''=0,$$

$$mm''-nn''+pp''=0,$$

et, d'autre part,

$$\frac{\nu''\mu''}{m''}=\frac{\nu''}{-n''\frac{\lambda'}{\mu'}-p''\frac{\lambda''}{\mu'}}=\frac{\nu'}{+n''\lambda''+p''\lambda'}$$

$$=\frac{\nu''}{\frac{m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}=\frac{\nu'}{\frac{-np''+pn''}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\nu}{\frac{pn''-np''+m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{pn''-np''-m''\sqrt{m^2-n^2+p^2}}{\sqrt{n^2-p^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2-p^2}}{(pn''-np'')^2-m''^2(m^2-n^2+p^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m''^2-n''^2+p''^2}},$$

de sorte que

$$\nu'' \mu'' u + \ldots = \frac{m'' u - n'' v + p'' w}{\sqrt{m''^2 - n''^2 + p''^2}}.$$

D'après cela, on obtient

$$u^2 - v^2 + w^2 = \frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} - \frac{(m'u - n'v + p'w)^2}{n'^2 - m'^2 - p'^2}$$
$$+ \frac{(m''u + n''v + p''w)^2}{m''^2 - n''^2 + p''^2}.$$

3. Nous avons trouvé les deux relations

$$mm' - nn' + pp' = 0,$$
$$mm'' - nn'' + pp'' = 0.$$

Par analogie, nous devons y ajouter une troisième

$$m'm'' - n'n'' + p'p'' = 0.$$

Il nous est aisé, du reste, de la déduire de ce qui précède. Observons que l'expression $m'm'' - n'n'' + p'p''$ est, à un facteur près,

$$\nu'\nu''\mu''^2 - (\nu'\mu'\lambda' + \nu''\lambda'')(\nu''\mu'\lambda' + \nu'\lambda'')$$
$$+ (\nu'\mu'\lambda'' + \nu''\lambda')(\nu''\mu'\lambda'' + \nu'\lambda')$$
$$= \nu'\nu''(\mu''^2 - \mu'^2\lambda'^2 - \lambda''^2 + \mu'^2\lambda''^2 + \lambda'^2).$$

Or la quantité entre parenthèses a pour valeur

$$\frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2\left[1 - \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2\left[1 - \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2$$
$$- \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 = 0.$$

La relation est ainsi démontrée.

4. Sur les trois quantités $m^2 - n^2 + p^2$, $m'^2 - n'^2 + p'^2$, $m''^2 - n''^2 + p''^2$, il y en a deux qui sont positives, et une qui est négative, si les coefficients m, n, p, m', n', p', m'', n'', p'' sont réels, du moment que l'on a

$$u^2 - v^2 + w^2 = \frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} + \frac{(m'u - n'v + p'w)^2}{m'^2 - n'^2 + p'^2} + \frac{(m''u + n''v + p''w)^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2}.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} mm' - nn' + pp' &= 0,\\ m'm'' - n'n'' + p'p'' &= 0,\\ m''m - n''n + p''p &= 0; \end{aligned}$$

or des deux premières relations on tire

$$\frac{m'}{-np'' + n''p} = \frac{n'}{pm'' - mp''} = \frac{p'}{-mn'' + nm''} = \mathrm{K}',$$

l'où

$$\begin{aligned} m'^2 - n'^2 + p'^2 &= \mathrm{K}'^2[(np'' - n''p)^2 - (pm'' - mp'')^2 \\ &\qquad + (mn'' - nm'')^2] \\ &= \mathrm{K}'^2[(n''^2 - m''^2 - p''^2)(m^2 - n^2 + p^2) \\ &\qquad + (mm'' - nn'' + pp'')^2] \\ &= -\mathrm{K}'^2(m^2 - n^2 + p^2)(m''^2 - n''^2 + p''^2). \end{aligned}$$

Pour semblable raison,

$$\begin{aligned} m''^2 - n''^2 + p''^2 &= -\mathrm{K}''^2(m'^2 - n'^2 + p'^2)(m^2 - n^2 + p^2),\\ m^2 - n^2 + p^2 &= -\mathrm{K}^2(m''^2 - n''^2 + p''^2)(m'^2 - n'^2 + p'^2). \end{aligned}$$

Mais les trois dénominateurs $m^2 - n^2 + p^2$, $m'^2 - n'^2 + p'^2$, $m''^2 - n''^2 + p''^2$ ne peuvent être négatifs à la fois, puisque $u^2 - v^2 + w^2$ peut être positif, ne fût-ce que par $v = 0$. Soit donc $m^2 - n^2 + p^2 > 0$; dès lors $m'^2 - n'^2 + p'^2$,

$m''^2 - n''^2 + p''^2$ sont de signes contraires : l'un est donc négatif, l'autre positif. Par conséquent la transformation, si les fonctions restent réelles, maintient le même nombre de carrés positifs. L'espèce se maintient. C'est le théorème de M. Hermite pour le cas de trois variables dans la forme quadratique. Nous présentons du reste plus loin une démonstration normale, fort simple, de ce théorème dans toute sa généralité.

5. Quand l'équation d'un hyperboloïde est mise sous la forme
$$u^2 - v^2 + w^2 = \mathrm{K},$$
les plans donnés par
$$\begin{aligned} mu - nv + pw &= 0, \\ m'u - n'v + p'w &= 0, \\ m''u - n''v + p''w &= 0 \end{aligned}$$
sont trois plans diamétraux conjugués, si l'on a
$$\begin{aligned} mm' - nn' + pp' &= 0, \\ m'm'' - n'n'' + p'p'' &= 0, \\ m''m - n''n + p''p &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de la surface a pour forme correspondante
$$\frac{(mu - nv + pw)^2}{m^2 - n^2 + p^2} + \frac{(m'u - n'v + p'w)^2}{m'^2 - n'^2 + p'^2} + \frac{(m''u - n''v + p''w)^2}{m''^2 - n''^2 + p''^2} = \mathrm{K}.$$

6. Pour appliquer ces résultats à l'ellipsoïde, l'équation en étant
$$u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{K},$$
il n'y a qu'à changer v en vi, n, n', n'' en ni, $n'i$, $n''i$, de sorte que trois plans diamétraux de l'ellipsoïde ayant

pour équations

$$mu + nv + pw = 0,$$
$$m'u + n'v + p'w = 0,$$
$$m''u + n''v + p''w = 0,$$

moyennant les conditions

$$(1)\quad \begin{cases} mm' + nn' + pp' = 0, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' = 0, \\ m''m + n''n + p''p = 0, \end{cases}$$

l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\frac{(mu + nv + pw)^2}{m^2 + n^2 + p^2} + \frac{(m'u + n'v + p'w)^2}{(m'^2 + n'^2 + p'^2)} + \frac{(m''u + n''v + p''w)^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \mathrm{K}.$$

7. En conséquence, on a les relations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{m^2}{m^2 + n^2 + p^2} + \dfrac{m'^2}{m'^2 + n'^2 + p'^2} + \dfrac{m''^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \sum \dfrac{m^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ \sum \dfrac{n^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ \sum \dfrac{p^2}{m^2 + n^2 + p^2} = 1, \\ \dfrac{mn}{m^2 + n^2 + p^2} + \dfrac{m'n'}{m'^2 + n'^2 + p'^2} + \dfrac{m''n''}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \sum \dfrac{mn}{m^2 + n^2 + p^2} = 0, \\ \sum \dfrac{np}{m^2 + n^2 + p^2} = 0, \\ \sum \dfrac{pm}{m^2 + n^2 + p^2} = 0. \end{cases}$$

8. Ces relations peuvent se déduire directement des précédentes.

Supposons, en effet, que m, n, p, m', n', p', m'', n'', p'' soient des quantités quelconques; tant qu'elles sont liées par les relations

$$(\alpha) \qquad \left\{\begin{array}{l} mm' + nn' + pp' = 0, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' = 0, \\ m''m + n''n + p''p = 0, \end{array}\right.$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2)}.$$

Soit posé

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P} \\ \mathrm{M}' & \mathrm{N}' & \mathrm{P}' \\ \mathrm{M}'' & \mathrm{N}'' & \mathrm{P}'' \end{vmatrix},$$

on a

$$\begin{array}{ll} \mathrm{M} = m^2 + n^2 + p^2, & \mathrm{M}' = m'm + n'n + p'p, \\ \mathrm{N} = mm' + nn' + pp', & \mathrm{N}' = m'^2 + n'^2 + p'^2, \\ \mathrm{P} = mm'' + nn'' + pp''; & \mathrm{P}' = m'm'' + n'n'' + p'p''; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{M}'' = m''m + n''n + p''p, \\ \mathrm{N}'' = m''m' + n''n' + p''p', \\ \mathrm{P}'' = m''^2 + n''^2 + p''^2. \end{array}$$

Donc

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} m^2 + n^2 + p^2 & 0 & 0 \\ 0 & m'^2 + n'^2 + p'^2 & 0 \\ 0 & 0 & m''^2 + n''^2 + p''^2 \end{vmatrix}$$

$$= (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2).$$

En conséquence Δ n'est pas nul, à moins que m, n, p, ou m', n', p', ou m'', n'', p'' soient nuls à la fois, si ces éléments sont réels.

8. Posons

$$\begin{aligned} m\alpha + m'_2\beta + m''\gamma &= \mathrm{A}, \\ n\alpha + n'\beta + n''\gamma &= \mathrm{B}, \\ p\alpha + p'\beta + p''\gamma &= \mathrm{C}, \end{aligned}$$

α, β, γ désignant des quantités arbitraires.

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ p & p' & p'' \end{vmatrix} \gtrless 0;$$

ces égalités résolues par rapport à α, β, γ, en attribuant à A, B, C telles valeurs qu'on voudra, donneront, pour α, β, γ, des valeurs finies déterminées. Par conséquent, en disposant de α, β, γ convenablement, on pourra faire que A, B, C aient telles valeurs correspondantes qu'on voudra.

Si l'on multiplie les égalités par m, n, p et qu'on ajoute, il vient

$$(m^2 + n^2 + p^2)\alpha = m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + p\mathrm{C};$$

on obtient de même

$$\begin{aligned} (m'^2 + n'^2 + p'^2)\beta &= m'\mathrm{A} + n'\mathrm{B} + p'\mathrm{C}, \\ (m''^2 + n''^2 + p''^2)\gamma &= m''\mathrm{A} + n''\mathrm{B} + p''\mathrm{C}. \end{aligned}$$

En portant les égalités au carré, puis ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2 + p^2)\alpha^2 + (m'^2 + n'^2 + p'^2)\beta^2 + (m''^2 + n''^2 + p'''^2)\gamma^2 \\ = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2, \end{aligned}$$

de sorte qu'en portant dans cette égalité les valeurs de

α, β, γ, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(mA+nB+pC)^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{(m'A+n'B+p'C)^2}{m'^2+n'^2+p'^2}&\\+\frac{(m''A+n''B+p''C)^2}{m''^2+n''^2+p''^2}&=A^2+B^2+C^2.\end{aligned}$$

Mais c'est là une égalité qui subsiste pour toutes valeurs de A, B, C, c'est donc une identité; de là

$$(\beta)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{m^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m'^2}{m'^2+n'^2+p'^2}+\frac{m''^2}{m''^2+n''^2+p''^2}\\&\qquad=\sum\frac{m^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\\&\qquad\sum\frac{n^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\\&\qquad\sum\frac{p^2}{m^2+n^2+p^2}=1,\end{aligned}\right.$$

et

$$(\beta)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{mn}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m'n'}{m^2+n^2+p^2}+\frac{m''n''}{m^2+n^2+p^2}\\&\qquad=\sum\frac{mn}{m^2+n^2+p^2}=0,\\&\qquad\sum\frac{np}{m^2+n^2+p^2}=0,\\&\qquad\sum\frac{pm}{m^2+n^2+p^2}=0.\end{aligned}\right.$$

9. Ces relations ainsi établies, il y a lieu d'en conclure qu'on a identiquement, moyennant les premières conditions,

$$\begin{aligned}u^2+v^2+w^2=\frac{(mu+nv+pw)^2}{m^2+n^2+p^2}+\frac{(m'u+n'v+p'w)^2}{m'^2+n'^2+p'^2}&\\+\frac{(m''u+n''v+p''w)^2}{m''^2+n''^2+p''^2}&.\end{aligned}$$

Donc, si par $u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{K}$ on a une surface du second degré, pour laquelle on ait trois plans diamétraux conjugués par $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ce qui suppose qu'on ait par là trois plans ayant un point commun et un seul, la même surface, les relations (β) supposées satisfaites, sera donnée par

$$\frac{(mu+nv+pw)^2}{m^2+n^2+p^2} + \frac{(m'u+n'v+p'w)^2}{m'^2+n'^2+p'^2} + \frac{(m''u+n''v+p''w)^2}{m''^2+n''^2+p''^2} = \mathrm{K}.$$

En conséquence, on aura trois autres plans diamétraux conjugués par

$$mu + nv + pw = 0,$$
$$m'u + n'v + p'w = 0,$$
$$m''u + n''v + p''w = 0.$$

Par suite, d'après notre première analyse, les relations (1) auront lieu aussi entre les quantités m, n, p,....

On reconnaît ainsi par cette voie indirecte que les relations (α) sont elles-mêmes une conséquence des relations (β). Il s'ensuit que dès lors le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)(m''^2+n''^2+p''^2)}.$$

Comme d'ailleurs on a

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} m & n & p \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

il est à remarquer que

$$m\Delta = (n'p'' - p'n'')\mathrm{H},\quad m'\Delta = (n''p - p''n)\mathrm{H}',\quad m''\Delta = (np' - pn')\mathrm{H}'',$$
$$n\Delta = (p'm'' - m'p'')\mathrm{H},\quad n'\Delta = (p''m - m''p)\mathrm{H}',\quad n''\Delta = (pm' - mp')\mathrm{H}'',$$
$$p\Delta = (m'n'' - n'm'')\mathrm{H},\quad p'\Delta = (m''n - n''m)\mathrm{H}',\quad p''\Delta = (mn' - nm')\mathrm{H}'',$$

étant posé

$$\mathrm{H} = m^2 + n^2 + p^2,\quad \mathrm{H}' = m'^2 + n'^2 + p'^2,\quad \mathrm{H}'' = m''^2 + n''^2 + p''^2.$$

10. Considérons l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 - \mathrm{K} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et l'équation équivalente

$$\frac{\left(m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} + p\frac{z}{c}\right)^2}{m^2 + n^2 + p^2} + \frac{\left(m'\frac{x}{a} + n'\frac{y}{b} + p'\frac{z}{c}\right)^2}{m'^2 + n'^2 + p'^2} + \frac{\left(m''\frac{x}{a} + n''\frac{y}{b} + p''\frac{z}{c}\right)^2}{m''^2 + n''^2 + p''^2} = 1$$

ou

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a'^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b'^2} + \frac{\mathrm{Z}^2}{c'^2} = 1,$$

les relations (1) supposées satisfaites.

Le point donné par $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$, $\mathrm{X} = a'$ aura ses coordonnées x, y, z déterminées par les équations

$$m\frac{x}{a} + n\frac{y}{b} + p\frac{z}{c} = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$m'\frac{x}{a} + n'\frac{y}{b} + p'\frac{z}{c} = 0,$$

$$m''\frac{x}{a} + n''\frac{y}{b} + p''\frac{z}{c} = 0;$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{(n'p'' - p'n'')\sqrt{\mathrm{H}}}{\Delta} = \frac{m}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

$$\frac{y}{b} = \frac{(p'm'' - m'p'')\sqrt{\mathrm{H}}}{\Delta} = \frac{n}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{(m'n'' - n'm'')\sqrt{\mathrm{H}}}{\Delta} = \frac{p}{\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

On a de même pour les extrémités de deux rayons formant avec celui qui va du centre au point (x, y, z) un système conjugué

$$\frac{x'}{a} = \frac{m'}{\sqrt{\mathrm{H}'}}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{n'}{\sqrt{\mathrm{H}'}}, \quad \frac{z'}{c} = \frac{p'}{\sqrt{\mathrm{H}'}},$$

$$\frac{x''}{a} = \frac{m''}{\sqrt{\mathrm{H}''}}, \quad \frac{y''}{b} = \frac{n''}{\sqrt{\mathrm{H}''}}, \quad \frac{z''}{c} = \frac{p''}{\sqrt{\mathrm{H}''}};$$

d'où résulte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{x''^2}{a^2} = \frac{m^2}{\mathrm{H}} + \frac{m'^2}{\mathrm{H}'} + \frac{m''^2}{\mathrm{H}''} = 1,$$

ou

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = a^2,$$

puis

$$y^2 + y'^2 + y''^2 = b^2,$$

$$z^2 + z'^2 + z''^2 = c^2;$$

d'autre part

$$\frac{xy}{ab} + \frac{x'y'}{ab} + \frac{x''y''}{ab} = \frac{mn}{\mathrm{H}} + \frac{m'n'}{\mathrm{H}'} + \frac{m''n''}{\mathrm{H}''} = 0$$

ou

$$xy + x'y' + x''y'' = 0,$$

$$yz + y'z' + y''z'' = 0,$$

$$zx + z'x' + z''x'' = 0.$$

On déduit de là

$$a^2b^2 = (xy' - yx')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 + (x''y - y''x)^2, \ldots.$$

Observons encore que l'on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma z^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2.$$

III.

1. Les considérations qui nous ont fait tirer les relations (β) des relations (α) peuvent s'appliquer sans changement à un système de n^2 quantités

$$\begin{matrix} m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & \ldots, & m_{1n}, \\ m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & \ldots, & m_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ m_{n1}, & m_{n2}, & m_{n3}, & \ldots, & m_{nn}. \end{matrix}$$

Lorsqu'elles sont liées entre elles par les relations de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} m_{jk} = 0 \quad (i \gtrless j) :$$

1° le déterminant

$$\Delta = (m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$$

a sa valeur égale à $\sqrt{\Sigma m_{1k}^2 \, \Sigma m_{2k}^2 \, \ldots \Sigma m_{nk}^2}$;

2° $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{\sum_{j=1}^{j=n} m_{ij}^2} = 1 ;$$

3° $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik} m_{ih}}{\sum_{j=1}^{j=n} m_{ij}^2} = 0 \quad (k \gtrless h),$$

si l'on a $\Delta \gtrless 0$.

Cela donne, comme identité,

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = {} & \frac{(m_{11}n_1 + m_{12}n_2 + \ldots + m_{1n}n_n)^2}{m_{11}^2 + m_{12}^2 + \ldots + m_{1n}^2} \\ & + \frac{(m_{21}n_1 + m_{22}n_2 + \ldots + m_{2n}n_n)^2}{m_{21}^2 + m_{22}^2 + \ldots + m_{2n}^2} \\ & + \ldots + \frac{(m_{n1}n_1 + \ldots + m_{nn}n_n)^2}{m_{n1}^2 + m_{n2}^2 + \ldots + m_{nn}^2}. \end{aligned}\right.$$

2. Au reste, cette identité implique les relations (α) aussi bien que les relations (β).

Supposons, en effet, qu'on eût identiquement

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{U^2}{H} + \frac{V^2}{H'} + \frac{W^2}{H''}$$

pour

$$\begin{aligned} U &= mu + nv + pw, & H &= m^2 + n^2 + p^2, \\ V &= m'u + n'v + p'w, & H' &= m'^2 + n'^2 + p'^2, \\ W &= m''u + n''v + p''w, & H'' &= m''^2 + n''^2 + p''^2. \end{aligned}$$

Ce que nous allons voir, dans ces circonstances, sera applicable aux plus générales.

D'abord, en égalant terme pour terme les deux membres de l'identité, après avoir développé U^2, V^2, W^2, on obtiendra les relations (β). On les trouve encore par les considérations suivantes :

Si l'on prend les dérivées des deux membres de l'identité par rapport à u, v, w, on a

$$\begin{aligned} u &= \frac{mU}{H} + \frac{m'V}{H'} + \frac{m''W}{H''}, \\ v &= \frac{nU}{H} + \frac{n'V}{H'} + \frac{n''W}{H''}, \\ w &= \frac{pU}{H} + \frac{p'V}{H'} + \frac{p''W}{H''}. \end{aligned}$$

Or, si l'on remplace dans ces identités U, V, W par leurs valeurs, les résultats n'étant pas des identités en u, v, w, il s'ensuit

$$\frac{m^2}{H}+\frac{m'^2}{H'}+\frac{m''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{n^2}{H}+\frac{n'^2}{H'}+\frac{n''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{p^2}{H}+\frac{p'^2}{H'}+\frac{p''^2}{H''}=1,$$

$$\frac{mn}{H}+\frac{m'n'}{H'}+\frac{m''n''}{H''}=0,$$

$$\frac{np}{H}+\frac{n'p'}{H'}+\frac{n''p''}{H''}=0,$$

$$\frac{pm}{H}+\frac{p'm'}{H'}+\frac{p''m''}{H''}=0.$$

3. D'autre part, multiplions les équations dérivées par m, n, p, et ajoutons; il vient

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} U = {} & \frac{m^2+n^2+p^2}{H}U+\frac{mm'+nn'+pp'}{H'}V \\ & +\frac{mm''+nn''+pp''}{H''}W, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$mm'+nn'+pp'=0,$$
$$mm''+nn''+pp''=0,$$

si U, V, W peuvent être susceptibles de valeurs quelconques, par conséquent, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. En multipliant par m', n', p', on trouverait de même

$$m'm''+n'n''+p'p''=0.$$

Les formules (α) sont, d'après cela, une conséquence des formules (β), quelles que soient d'ailleurs les quantités m_{ij}. Comme les formules (β) supposent $H_i \gtrless 0$, et qu'il résulte des formules (α) que le déterminant

$$\Delta = (m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$$

est d'une valeur égale à $\sqrt{H_1 H_2 \ldots H_n}$, on voit que ce déterminant n'est pas nul. Nos formules (β) pourraient donc alors se déduire également des formules (α). Donc les deux groupes de formules sont équivalents, quoique le nombre des formules soit $\frac{n(n-1)}{2}$ dans l'un des groupes, et qu'il soit dans l'autre $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Un fait important ressort encore de ce qui précède, c'est que si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des quantités indépendantes les unes des autres, susceptibles chacune d'une valeur quelconque, la formule (γ) présente la transformation la plus générale de $\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2$ en une somme de carrés, en même nombre, d'expressions linéaires en u_i.

Si, en effet, au n° 2, on considère H, H′, H″ comme n'ayant pas de valeurs assignées, la relation (δ) exige qu'on ait $m^2 + n^2 + p^2 = H$; les relations analogues dues aux facteurs m', n', p' et aux facteurs m'', n'', p'' donnent de même

$$H' = m'^2 + n'^2 + p'^2 \quad \text{et} \quad H'' = m''^2 + n''^2 + p''^2.$$

La transformation n'est soumise qu'aux conditions dont la forme générale est

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{ik}\, m_{jk} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

5. Le point de départ de notre transformation (n° 1) revient à changer $u^2 - v^2$ en $(\lambda' u + \lambda'' v)^2 - (\lambda'' u + \lambda' v)^2$ avec $\lambda'^2 - \lambda''^2 = 1$, et $u^2 + v^2$ en $(\lambda' u + \lambda'' v)^2 + (\lambda'' u - \lambda' v)^2$ avec $\lambda'^2 + \lambda''^2 = 1$.

En procédant ainsi à partir de l'expression

$$\pm u_1^2 \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2,$$

par l'association du premier terme au second, du nouveau premier terme au troisième, etc., jusqu'à celle du premier terme au dernier; en procédant de même à partir du second terme, et ainsi de suite, on obtient successivement, sans que les signes changent explicitement aux mêmes places,

$$\begin{array}{l}
\pm u_{12}^2 \pm u'^2_{12} \pm u_3^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\pm u_{123}^2 \pm u'^2_{12} \pm u'^2_{123} \pm u_4^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\pm u_{1234}^2 \pm u'^2_{12} \pm u'^2_{123} \pm u'^2_{1234} \pm u_5^2 \pm \ldots \pm u_n^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\pm u_{1\ldots n}^2 \pm u_{12\ldots n-1}^2 \pm \ldots \pm u'.
\end{array}$$

Dans l'expression finale, le premier terme dépend ainsi de $n-1$ indéterminées, le deuxième de celles-là et de $n-2$ autres, le troisième des précédentes et de $n-3$ nouvelles, etc.

Si dans la formule (γ) on change u_i en $u_i\sqrt{\varepsilon_i}$, et m_{ki} en $m_{ki}\sqrt{\varepsilon_i}$, ε_i étant ± 1, cette formule devient

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2 \\
&\quad = \frac{(m_{11}\varepsilon_1 u_1 + m_{12}\varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n m_{1n} u_n)^2}{\varepsilon_1 m_{11}^2 + \varepsilon_2 m_{12}^2 + \ldots + \varepsilon_n m_{1n}^2} + \ldots \\
&\quad + \frac{(m_n \varepsilon_1 u_1 + \ldots + m_{nn}\varepsilon_n u_n)^2}{\varepsilon_1 m_{n1}^2 + \varepsilon_2 m_{n2}^2 + \ldots + \varepsilon_n m_{nn}^2},
\end{aligned}$$

moyennant les relations $\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} m_{jk} = 0$.

La formule précédente avec ses indéterminées correspond à cette formule générale.

6. Le théorème dû à M. Hermite, que dans le passage d'une forme en carrés à une autre l'espèce se conserve si les termes sont réels, résulte immédiatement de l'équation générale

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_p u_p^2 + \varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2$$
$$= \frac{U_1^2}{H_1} + \frac{U_2^2}{H_2} + \ldots + \frac{U_q^2}{H_q} + \frac{U_{q+1}^2}{H_{q+1}} + \frac{U_n^2}{H_n}.$$

Supposons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_p = 1, \quad H_1 > 0, \quad H_2 > 0, \ldots, \quad H_q > 0,$$

et

$$\varepsilon_{p+1} = \ldots = \varepsilon_n = -1, \quad H_{q+1} < 0, \quad H_{q+2} < 0, \ldots, \quad H_n < 0;$$

alors, si dans le premier membre on prend $u_{p+1} = 0, \ldots,$ $u_n = 0$, ce premier membre est d'une valeur positive, quelques valeurs qu'on attribue à $u_1, u_2, \ldots, u_p$; et si l'on prenait $u_1 = 0, \ldots, u_p = 0$, il serait négatif pour toutes valeurs de $u_{p+1}, \ldots, u_n$. De même, si l'on prend $U_{q+1} = 0, \ldots, U_n = 0$, le second membre sera positif pour toutes valeurs de $U_1, U_2, \ldots, U_q$; il sera négatif pour toutes valeurs de $U_{q+1}, \ldots, U_n$, si l'on fait $U_1 = 0, \ldots, U_q = 0$.

Supposons $q > p$, ou moins de termes négatifs dans le second membre que dans le premier. Si l'on prend $U_{q+1} = 0, \ldots, U_n = 0$ et qu'on en tire $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_n$ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_q$, la substitution de ces valeurs dans le premier membre n'atteindra pas le premier terme négatif $\varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2$. Par conséquent il suffira de prendre $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_p = 0$ pour que le premier membre soit à coup sûr négatif, tandis que le second sera d'une valeur positive. Il résulte de cette contradiction qu'on ne peut avoir $q > p$.

Soit $q < p$. Posons donc $U_1 = 0$, $U_2 = 0, \ldots, U_q = 0$, et tirons de là $u_1, u_2, \ldots, u_q$ en fonction de $u_{q+1}, \ldots, u_n$, puis substituons-en les valeurs dans le premier membre, il y restera au moins $\varepsilon_{q+1} u_{q+1}^2 > 0$. Ce premier membre, en y faisant $u_{p+1} = 0, \ldots, u_n = 0$, sera en conséquence susceptible d'une valeur positive. Le second, au contraire, ne pourra être que négatif. On ne peut donc avoir $q < p$. Il faut ainsi $q = p$. Le théorème est démontré.

Dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France,* ces questions sont reprises pour le fond à un autre point de vue avec d'autres considérations sur les formes quadratiques.

SIMPLES REMARQUES SUR LES RACINES ENTIÈRES DES ÉQUATIONS CUBIQUES;

PAR M. S. REALIS.

(Addition à un article précédent. *Voir* page 289.)

---

10. Il a été question plus haut (7) des formes exclusives auxquelles peut se réduire toute équation cubique à racines entières, selon qu'on classe ses coefficients sous tel ou tel système de formes linéaires. On parvient à des résultats plus précis en rapportant chaque coefficient à la forme qui lui est propre, d'après la loi d'homogénéité; en rapportant, dis-je, le nombre $-P$ à la forme quadratique, et le nombre Q à la forme cubique. Alors c'est la composition même des coefficients qui fait reconnaître la dépendance qui doit subsister entre eux.

Je dis, d'après cela, que la proposée

$$x^3 + Px + Q = 0$$

ne peut avoir trois racines entières si $-$ P n'est pas représenté par la forme

$$3y^2+z^2,$$

et qu'elle les aura effeetivement si, parmi les valeurs de y et z, propres à une telle présentation, il se trouve deux valeurs α, β, telles que l'on ait simultanément

$$-\mathrm{P}=3\alpha^2+\beta^2,$$
$$\mathrm{Q}=2\alpha(\alpha^2-\beta^2).$$

Pour le prouver, supposons les entiers α et β connus pour une équation donnée, en sorte que les deux égalités qui précèdent se trouvent vérifiées par identité. On obtiendra, par l'élimination, ces deux autres égalités

$$(-2\alpha)^3+\mathrm{P}(-2\alpha)+\mathrm{Q}=0,$$
$$(2\beta)^6+6\mathrm{P}(2\beta)^4+9\mathrm{P}^2(2\beta)^3+4\mathrm{P}^3+27\mathrm{Q}^2=0,$$

conséquences nécessaires des prémisses.

La première nous fait voir que -2α satisfait à la proposée, en sorte qu'on aura d'abord $x=-2\alpha$. Il résulte de la seconde que 2β et -2β sont racines de l'équation aux différences des racines de la proposée, d'où l'on voit que, parmi les valeurs absolues de ces différences, une au moins est un nombre entier. Mais il a été démontré (9) que ces mêmes différences s'expriment rationnellement l'une par l'autre, ce qui fait que, l'une étant rationnelle, toutes le sont. Les six racines de l'équation aux différences sont donc rationnelles, et partant entières; il devient manifeste par là que les racines x, dont l'une a la valeur entière -2α, ne peuvent être qu'entières toutes trois.

Les relations posées entre α, β, P, Q expriment donc des conditions suffisantes pour que la proposée ait ses trois racines entières; mais il est facile de voir que ces conditions sont, de plus, nécessaires. Quelles que soient, en effet, les racines entières a, b, c de la proposée, comme leur somme algébrique doit être nulle, l'une d'elles sera nécessairement paire, tandis que les deux autres seront paires ou impaires ensemble. On pourra donc toujours poser, en nombres entiers α, β, des égalités telles que

$$a = -2\alpha,$$
$$b = \alpha + \beta,$$
$$c = \alpha - \beta,$$

et de ces égalités résultent nécessairement les valeurs ci-dessus de $-P$ et de Q.

Du reste, ces expressions de a, b, c renferment en elles-mêmes la preuve complète que les corrélations de forme et de valeur, établies entre les coefficients, caractérisent effectivement toute équation, telle que la proposée, dont les trois racines sont entières. Si l'on a ajouté la considération des équations fournies par l'élimination ci-dessus de β et de α, c'est surtout dans le but de présenter, dès à présent, une application du théorème précédemment énoncé (9).

Ces caractères de la rationnalité des racines, disons-le tout de suite, ne résolvent pas la question qu'on doit se proposer sur le sujet. Ils n'offrent, en effet, aucun moyen pratique de les constater sur une équation numérique donnée, si ce n'est par des tâtonnements analogues à ceux qu'exigerait la recherche des racines entières elles-mêmes. Mais la considération de ces caractères n'en est pas moins utile, surtout en ce qu'il est facile de signaler d'avance des cas très-étendus où ils font défaut, et où l'existence de trois racines entières dans la proposée devient conséquemment impossible. C'est ainsi que, de ce que la valeur numérique de P doit être comprise dans la formule $3y^2 + z^2$, et en s'aidant des principes connus touchant les diviseurs de cette formule (*), on est conduit à conclure que : *Si le nombre* $-P$ *est de la forme* $3p+2$, *ou si, après avoir été dégagé de tout facteur carré, il est divisible par* 2, *ou par* 5, *ou par* 11, *ou par tout autre nombre de la forme indiquée, la proposée ne saurait avoir trois racines entières.* Cet énoncé reproduit avec plus d'étendue une proposition précédemment établie (6).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1875).

PREMIÈRE SESSION.

Compositions du 27 et du 28 août 1875.

Géométrie analytique.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, et sur l'axe Ox un point A, on considère les hyperboles équilatères qui passent par le point A et dont l'une des directrices est l'axe Oy. On demande :

1° Le lieu de celui des foyers de ces hyperboles qui correspond à la directrice Oy;

2° Le lieu des centres de ces mêmes hyperboles;

3° Le lieu de leurs sommets.

Épure.

Un tétraèdre régulier ABCD, dont le côté est égal à $0^m,15$, repose par la face ABC sur le plan horizontal de

(*) *Voir* les *Recherches d'Arithmétique* de Lagrange (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, pour les années 1773 et 1775).

projection. Le cercle horizontal décrit sur BC comme diamètre est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à AD.

On demande :

1° De trouver la projection horizontale de l'intersection de ce cylindre et de la sphère circonscrite au tétraèdre;

2° De représenter en projection horizontale le solide commun à la sphère et au cylindre.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection de la sphère et du cylindre, et la tangente en ce point. On expliquera brièvement ces constructions dans une légende inscrite sur l'épure même.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1144

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. MORET-BLANC.

Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme

$$(6\mu \pm 1)^2,$$

et le troisième la forme

$$4(6\mu \pm 1)^2.$$

(CATALAN.)

Il y a deux cas à considérer :

1° Si le carré donné est premier avec 3, il est de la forme $(6\mu \pm 1)^2$, et l'on a identiquement

$$6(6\mu \pm 1)^2 = (6\mu \pm 1)^2 + (6\mu \pm 1)^2 + 4(6\mu \pm 1)^2.$$

2° Le carré donné est multiple de 3. Le sextuple de ce carré étant de la forme $8m + 6$, on peut le décomposer en trois carrés premiers entre eux (Legendre, *Théorie des nombres*, n^{os} 319 et 320, éd. de 1830), deux carrés impairs, et le troisième quadruple d'un carré impair. Deux de ces carrés étant nécessairement premiers avec 3, il en est de même du troisième. Ils seront donc de la forme

$$(6\mu \pm 1)^2, \quad (6\mu \pm 1)^2, \quad 4(6\mu \pm 1)^2.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. C. Chabanel.

Question 1160

(voir 2e série, t. XIV, p. 96);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, on les coupe par une de leurs sphères orthogonales, et l'on prend les circonférences obtenues comme bases d'autant de cônes ayant pour sommet commun un point de l'axe radical. Chacun de ces cônes coupe la sphère correspondante suivant une deuxième circonférence : toutes ces circonférences sont sur une même sphère orthogonale aux sphères données. Réciproque. (G. Fouret.)

Soient M et N les points d'intersection, réels ou imaginaires, de l'axe radical et des sphères données; C le centre de la sphère orthogonale et S le sommet commun des cônes.

Par l'axe radical, faisons passer un plan quelconque; il coupe les sphères données suivant des circonférences ayant le même axe radical, la sphère orthogonale suivant une circonférence orthogonale aux premières, chaque cône suivant deux génératrices et les cercles, intersection de ce cône avec la sphère correspondante, suivant deux cordes AB, A′B′ de la circonférence intersection de la sphère et du plan, dont l'une, AB, est la corde d'intersection de cette circonférence et de la circonférence orthogonale. Il faut démontrer que les tangentes menées par A′B′ à la circonférence ABB′A′ vont concourir en un point de l'axe radical qui reste le même quelle que soit la circonférence considérée.

Le point de concours des cordes AB, A′B′ appartient à la polaire du point C et à la polaire de S; c'est donc le pôle de l'axe radical par rapport à la circonférence ABB′A′. Il en résulte que le point de concours C′ des tangentes menées par A′ et B′ à cette circonférence, pôle de A′B′, est sur l'axe radical. Il faut démontrer que ce point est le même pour toutes les circonférences.

Toutes les cordes AB rencontrent l'axe radical en un même point D, conjugué harmonique du point C par rapport à MN. Soit D′ le point où A′B′ coupe l'axe radical.

On sait que, si un quadrilatère est inscrit dans une conique et que l'on mène une transversale, elle rencontre les côtés opposés et la conique en trois couples de points qui forment une involution (théorème de Désargues).

Les points S, M, N, D, D′ forment donc une involution dont S est un point double; or les points S, M, N, D sont fixes; donc il en est de même du sixième point D′, et par suite du point C′, conjugué harmonique de D′ par rapport à MN. Le théorème est donc démontré. Le point C est le centre d'une seconde sphère orthogonale sur laquelle sont situées les circonférences, secondes intersections des cônes et des sphères proposées.

Réciproquement, si l'on donne C et C′, ce qui détermine D et D′, le point S sera l'un des points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points M, N, D, D′. Donc :

Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, si on les coupe par deux sphères orthogonales, par les intersections de ces deux sphères avec chacune des sphères données, on pourra faire passer deux cônes, et tous ces cônes auront leurs sommets en deux mêmes points situés sur l'axe radical.

Note. — MM. Brocard et Calinon démontrent de même, par la Géométrie élémentaire, la proposition énoncée; MM. Launoy, Astor et Chadu en donnent une démonstration analytique; M. Bourguet indique, d'une manière abrégée, la démonstration de la première partie seulement.

QUESTIONS.

1183. Vérifier que

$$\begin{aligned}\Sigma a^2 \Sigma a'^2 \Sigma a''^2 = {} & [a \Sigma a' a'' + a' \Sigma a a'']^2 \\ & + [b \Sigma a' a'' + b' \Sigma a a'']^2 \\ & + [c \Sigma a' a'' + c' \Sigma a a'']^2 \\ & + [\Sigma (bc' - cb') a'']^2,\end{aligned}$$

les neuf quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant assujetties à la seule condition

$$aa' + bb' + cc' = 0 \ (*).$$

Cette *identité* donne, par exemple, la décomposition suivante

$$(2^2+3^2+4^2)(4^2+4^2+5^2)(1^2+2^2+3^2) = 74^2+71^2+112^2+9^2.$$

(Catalan).

(*) Pour y satisfaire, il suffit, comme on sait, de prendre

$$a' = a\gamma - c\beta, \quad b' = c\alpha - a\gamma, \quad c' = a\beta - b\alpha.$$

1184. Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t; \end{cases}$$

si $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire, la droite mobile

$$X = 0, \quad Y = 0$$

engendrera une surface réglée; *l'équation de la surface du second ordre passant par trois droites infiniment voisines de la surface engendrée sera*

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X' & X \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y' & Y \end{vmatrix} = 0,$$

$a', b', \ldots, a'_1, b'_1, \ldots, a'', b'', \ldots, a''_1, b''_1, \ldots$ sont les dérivées premières et secondes des fonctions $a, b, \ldots, a_1, b_1, \ldots$, par rapport au paramètre dont elles dépendent; X, Y sont définis par les égalités (1), et l'on a posé

$$(3)\qquad \begin{cases} X' = a'x + b'y + c'z + d't, \\ Y' = a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1t. \end{cases}$$

(L. Painvin.)

1185. Une surface du second degré est circonscrite à un tétraèdre. Par un point m de la surface, on mène à l'une des arêtes une parallèle rencontrant aux points a et b deux des faces du tétraèdre. Si l'on désigne par D la longueur du diamètre de la surface parallèle à cette arête, la somme $\sum \frac{ma.mb}{D^2}$ étendue aux six arêtes est nulle.

(H. Faure.)

DE LA TACHYMÉTRIE;

PAR M. CASIMIR REY.

Sous le titre général de : *Panorama du tout-savoir, virilité intellectuelle et morale,* M. Lagout a publié une série de travaux de vulgarisation, dont voici les titres :

ÉQUATION DU BIEN : *Le tout-savoir vital. — La Patrie. — Physiologie comparée. — L'âme. — Le corps. — Le cœur. — L'esprit. — La profession. — La viriculture.*

ÉQUATION DU BEAU : *Loi simple et familière des sensations agréables avec un croquis rhythmé de Michel-Ange, qui est l'expression vivante de l'équation du beau.*

ÉQUATION DU VRAI : *Le tout-savoir technique. — Groupe des sciences de raisonnement.*

ÉQUATION DES CRUES : *Loi simple et pratique des inondations.*

ÉQUATION DU TEMPS : *Panorama de l'Astronomie. — Le régulateur des montres. — Instrument populaire de précision du temps qui résume toute l'Astronomie pratique.*

M. Lagout vend également des boîtes de manipulations, composées de volumes verts et roses, indispensables pour graver dans l'esprit les vérités nécessaires de la Tachymétrie ou Géométrie en trois leçons, qu'il ne se contente pas de préconiser, qu'il veut « implanter » de force.

Ministres, évêques, généraux, recteurs, maires, conseillers généraux ou municipaux, M. Lagout emploie toutes les personnes ayant non pas autorité en Géométrie, mais bien autorité de par la loi, pour imposer aux écoles, aux régiments, aux colléges, *urbi et orbi*, ses boîtes tachymétriques et son enseignement de la Géométrie en trois leçons qu'il résume ainsi (voir *Panorama de la Géométrie*, p. 31 et suivantes) :

VUE D'ENSEMBLE DES TROIS LEÇONS.

On peut les spécialiser en trois mots :
Première leçon. — Chirométrie.
Deuxième leçon. — Opsimétrie.
Troisième leçon. — Cyclométrie.
On peut les généraliser en trois mots :
Uniformité. — Uniformisation. — Mesures.

Si la première leçon est la substance, si la deuxième leçon est la poésie, la troisième leçon est le surnaturel de la science des grandeurs.

Il y a dans cette leçon trois choses :

L'asymptote du cercle. — C'est l'équerre illuminée par la troisième vérité, celle des trois carrés, qui permet d'approcher, autant que de patience, du nombre mystérieux qui marquerait le contour.

L'armature du cercle. — C'est le polygone régulier à six pans, première figure de transition entre les figures rectilignes et les figures courbes, qui est aussi la plus artistique et la plus commode.

L'équation du cercle. — C'est le sou par franc à ajouter au périmètre du polygone à six pans pour avoir le contour usuel en nombre inoubliable.

TACHYMÉTRIE SCANDÉE POUR FIXER LA MÉMOIRE.

L'accessible.

Fils à plomb et niveaux engendrent le carré,
Qui se divise en quatre triangles égaux,
Et se divise encore en quatre égaux rubans.
L'équerre ou mi-carré engendre le triangle.
Un équarri parfait se divise en six tranches,

Et se divise en six pyramides égales.
Le carré seul est donc l'étalon des mesures
Des objets réguliers et même des informes;
D'où la règle, en deux mots : uniformisation.

L'inaccessible.

Un objet éloigné donne auprès son image;
A l'aise on le mesure et puis l'on reconstruit
L'objet égal en nombre et puis l'angle identique,
Au moyen du rapport de deux grandeurs jumelles;
Soit distances, hauteurs ou bien carrés métriques,
Éléments qui, grossis, viennent se confondre.

Formes rondes.

Pour les corps arrondis, l'étalon des mesures
Est nombre mystérieux. L'hexagone a six pans,
Au moyen de l'équerre, touche presque au mystère.
Le sou par franc suffit dans les arts et métiers :
Ajouter le vingtième autour de l'hexagone,
Donner le tour du cercle aussi vrai que possible.

APPRÉCIATION DE LA TACHYMÉTRIE ET DE SON INVENTEUR PAR L'INVENTEUR LUI-MÊME.

1. *Inoubliable.* — Après une heure d'exposé en conférence de la Tachymétrie, on a vu un médecin, un avocat, un directeur d'établissement scolaire, un inspecteur d'académie, un évêque dire : elle est inoubliable, je suis prêt à l'enseigner à mon tour.

2. *Panoi ama de la Géométrie.* — Nombre des articles : 30. — Nombre des pages (hors préface) : 24. — Nombre des figures : 21. — Rapport des nombres : 1.

L'effort intellectuel sera représenté par $1 \times 1 = 1$ pour posséder le tout géométrique : c'est la géométrie mentale.

Nous ne faisons pas chorus avec le médecin, avec l'avocat, avec le directeur d'établissement scolaire, avec l'inspecteur d'académie, avec l'évêque, enthousiastes de Tachymétrie !

Les approbations officielles, les articles flatteurs, les lettres louangeuses que M. Lagout cite si complaisamment dans ses conférences et dans ses brochures ne nous convainquent pas. Nous sommes même certain que, si M. Lagout, grâce à sa connaissance des rouages administratifs, parvient à imposer sa méthode dans les écoles, elle y produira les plus fâcheux résultats.

Et voici non pas toutes, mais quelques-unes des raisons sur lesquelles nous basons un jugement aussi sévère.

L'un des buts les plus importants de l'étude de la Géométrie est d'habituer l'esprit à raisonner avec la plus complète précision en ne s'appuyant que sur des vérités indémontrables, non pas à cause de leur obscurité, mais à cause de leur extrême évidence ; ce but est laissé de côté par la Tachymétrie, dont les raisonnements, conduisant à un résultat juste dans le cas spécial choisi par l'auteur, conduiraient à des résultats faux dans mille autres cas.

La Tachymétrie donne des démonstrations *ab ovo* et par l'œil comme irréfutables et très-supérieures aux démonstrations d'Euclide ; or on sait combien les impressions visuelles sont *ab ovo* trompeuses.

Sous le prétexte que les commençants ne connaissent pas les termes de la Géométrie avant de les avoir appris, M. Lagout a inventé un langage spécial, beaucoup plus compliqué que le langage ordinaire, exigeant au préalable l'étude d'une langue nouvelle, et empêchant de comprendre par la suite les ouvrages de sciences autres que ceux de M. Lagout.

M. Lagout laisse de côté toute la partie de la Géométrie pratique qui apprend à faire les tracés, et son « tout-savoir géométrique » se réduit aux métrés courants augmentés de la définition de la similitude. Or, pour l'enseignement d'une Géométrie aussi écourtée, les méthodes en usage dans les écoles primaires, si supérieures à la Tachymétrie au point de vue de la logique et de la clarté, sont tout aussi rapides.

Enfin ce n'est pas un procédé pédagogique nouveau que de montrer aux élèves les volumes figurés en une matière quelconque. Dans ce but, les uns emploient du bois, d'autres des pommes de terre, beaucoup de professeurs se servent du carton blanc. M. Lagout préfère les cartons verts et roses à cause de son équation du beau. Est-ce un perfectionnement ?

Quelques professeurs font fabriquer par les commençants eux-mêmes les volumes dont ces commençants étudient pour la première fois la forme ou la décomposition. Que les autorités imposent dans les écoles primaires cette fabrication, qui repose quelques instants l'attention de l'élève et lui fait mieux saisir la forme ou la décomposition d'un volume nouveau pour lui, nous n'y voyons pas grand inconvénient ; mais que la Tachymétrie ne remplace pas ces petites Géométries primaires, souvent signées par des géomètres éminents, qui enseignent la Géométrie d'Euclide, simplifiée quant à la théorie et augmentée d'applications pratiques la rendant moins abstraite.

Et si nous voulions, comme l'inventeur de la Tachymétrie, établir un parallèle entre elle et la Géométrie, nous n'osons pas dire euclidienne, car il n'existe qu'une Géométrie qui est celle d'Archimède, d'Euclide, de Pascal et de tous les géomètres, nous dirions que la Géométrie est la science qui apprend à raisonner juste, même sur des figures qui sont fausses, tandis que la Tachymétrie est un art qui apprend à raisonner faux, même sur des figures qui sont justes.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES TROIS A TROIS, QUAND DEUX LETTRES CONSÉCUTIVES SONT TOUJOURS DISTINCTES

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 299),

PAR M. VACHETTE,
Conseiller municipal, à Mouy (Oise).

I. *Distinction des diverses espèces; ordre d'une espèce; variétés d'une même espèce.*

Le nombre total des perturbations de $3q$ lettres égales trois à trois est

$$T_{3q} = \frac{P_{3q}}{(P_3)^q}.$$

On désigne par $B_{q,3}$ le nombre de ces permutations où deux lettres consécutives sont toujours distinctes. Les autres contiennent des *ternaires* $\underline{aaa}$, et des binaires $\underline{aa}$, groupes de trois ou de deux lettres consécutives pareilles : on désigne par $M_q(r, t)$ ce nombre et l'espèce des permutations qui contiennent r ternaires et t binaires, $r + t$ n'étant jamais supérieur à q.

On peut écrire

$$B_{q,3} = M_q(0, 0).$$

Certaines permutations de l'espèce $B_{q,3}$ sont des tournantes incomplètes; telle est

$$abcdeabcdeabcde,$$

tournante incomplète à q places, au lieu de $3q$.

Les $M_q(r, t)$ sont des tournantes complètes; le nombre des tournantes de cette espèce est

$$\frac{1}{3q} M_q(r, t).$$

Il faut en excepter $M_1(t, o)$, espèce qui n'a qu'une permutation et qu'une tournante *aaa*.

$\frac{B_{q,3} + 2P_q}{3q}$ représente le nombre des tournantes de l'espèce $B_{q,3}$; en effet P_q est le nombre des tournantes incomplètes, à q permutations distinctes; si donc on ajoute $2P_q$ à $B_{q,3}$, le quotient de cette somme par $3q$ sera bien le nombre des tournantes.

L'identité

$$T_{3q} = B_{q,3} + \sum_{r+t=1}^{r+t=q} M_q(r, t)$$

servira de vérification.

Il y a lieu de considérer l'ordre q d'une permutation et de s'occuper d'abaisser cet ordre. Il y a lieu aussi de considérer des variétés asymétriques, et des variétés symétriques de fraction $\frac{1}{n}$, et l'on établira, comme dans le premier article, la formule

$$M_q(r, t) = 3q\,P_q\left(n + \frac{n'}{x'} + \frac{n''}{x''} + \ldots\right).$$

II. *Évaluation directe des nombres* $M_q(r, q - r)$ *et* $M_q(q - 1, o)$.

1° L'espèce $M_q(r, q - r)$ contient r ternaires, et $q - r$ binaires avec $q - r$ lettres isolées, distinctes, semblables aux lettres des binaires. Si l'on y suppose condensées en deux les trois lettres d'un ternaire, et en une les deux lettres d'un binaire, on obtient l'espèce $M_q(r)$ de la première Partie. On peut passer de l'espèce $M_q(r)$ à l'espèce $M_q(r, q - r)$.

Soit une tournante d'espèce $M_q(r)$ pour $q = 8$ et $r = 6$

hcchddeebffaaggb.

On n'altère pas le nombre des tournantes en transformant chaque binaire en ternaire; et il reste en outre $2(q-r)$ lettres isolées, égales deux à deux; chacune des $q-r$ lettres distinctes, ayant sa semblable, peut être doublée de deux manières, ce qui fournit 2^{q-r} tournantes à l'espèce cherchée. On a donc, pour le nombre des tournantes de cette espèce, soit

$$\frac{1}{3q}\mathrm{M}_q(r, q-r),$$

soit

$$2^{q-r}\frac{1}{2q}\mathrm{M}_q(r),$$

d'où la formule $(r, q-r)$

$$\mathrm{M}_q(r, q-r) = 3.2^{q-r-1}\mathrm{M}_q(r),$$

et pour $r=0$, on obtient la formule $(0, q)$

$$\mathrm{M}_q(0, q) = 3.2^{q-1}\mathrm{B}_{q,2}.$$

Pour $r=q-1$ et $r=q$, on obtient les formules $(q-1, 1)$ et $(q, 0)$

$$\mathrm{M}_q(q-1, 1) = 3\mathrm{M}_q(q-1) = 3q(q-2)\mathrm{P}_q,$$
$$\mathrm{M}_q(q, 0) = \tfrac{3}{2}\mathrm{M}_q(q) = 3\mathrm{P}_q\ (*).$$

2° L'espèce $\mathrm{M}_q(q-1, 0)$ contient $q-1$ ternaires, qui forment un des arrangements de l'espèce $\mathrm{A}_{q,q-1}$, comme on le voit ici pour $q=6$, et il reste $q-1$ places :

$$\underline{aaa}\cdot\underline{bbb}\cdot\underline{ccc}\cdot\underline{ddd}\cdot\underline{eee}$$

à donner à l'une des trois lettres f entre deux ternaires consécutifs; il y a donc, pour ces trois lettres, un nombre de systèmes de places égal à $\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$. Or il y a

(*) *Voir* le premier article, II.

$\frac{1}{q-1} A_{q,q-1}$ tournantes de l'espèces $A_{q,q-1}$, et, comme chacune d'elles en fournit $\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6}$ à l'espèce cherchée, on en comptera $\frac{(q-2)(q-3)}{6} A_{q,q-1}$ ou $\frac{(q-2)(q-3)}{6} P_q$; puisqu'il y en a $\frac{1}{3q} M_q(q-1, 0)$ dans l'espèce cherchée, si l'on égale ces deux nombres de tournantes, on a la formule $(q-1, 0)$

$$M_q(q-1, 0) = \tfrac{1}{2} q(q-2)(q-3)P_q.$$

III. *Formule du nombre* $B_{q,3}$.

A la formation des $B_{q,3}$ ne peuvent concourir que des $M_{q-1}(0, t)$ et des $M_{q-1}(1, t)$, puisqu'il faut deux des trois lettres nouvelles h pour détruire un ternaire; dans les $M_{q-1}(0, t)$ on ne peut pas prendre $t > 3$, et dans les $M_{q-1}(1, t)$ on ne peut pas prendre $t > 1$. Le nombre $B_{q,3}$ sera la somme de six parts fournies par les $B_{q-1,3}$, les $M_{q-1}(0, 1)$, les $M_{q-1}(0, 2)$, les $M_{q-1}(0, 3)$, les $M_{q-1}(1, 0)$ et les $M_{q-1}(1, 1)$.

1° Part des $B_{q-1,3}$.

Soit une $B_{q-1,3}$ (pour $q = 5$) contenant $3q - 3$ lettres

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d \cdot c \cdot a \cdot b \cdot d.$$

Si l'une des trois lettres h est mise à l'une des deux places extrêmes, il reste $3q - 4$ places intérieures pour les deux autres h, ce qui donne $\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}$ systèmes de places pour ces deux h, et $(3q-4)(3q-5)$ pour les trois : si aucune lettre h n'occupe les places extrêmes, on a $\frac{(3q-4)(3q-5)(3q-6)}{6}$ systèmes de places; en tout, il y en a $\frac{1}{2}q(3q-4)(3q-5)$. La part sera

$$\tfrac{1}{2}q(3q-4)(3q-5)\,\mathrm{B}_{q-1,3}.$$

2° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(0, 1)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q = 5$)

$$b\cdot c\cdot a\cdot e\cdot b\cdot a\cdot e\cdot b\cdot \underline{cc}\cdot a\cdot e.$$

On ferme le binaire $\underline{cc}$ avec une des trois lettres h, et il reste $3q-4$ places pour les deux autres; d'où

$$\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}$$

systèmes; la part en tournantes est

$$\frac{(3q-4)(3q-5)}{2}\;\frac{1}{3(q-1)}\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 1),$$

et en permutations, si l'on multiplie par $3q$,

$$\frac{q(3q-4)(3q-5)}{2(q-1)}\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 1);$$

comme il n'y a point de $\mathrm{M}_1(0, 1)$, cette part sera toujours applicable.

3° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(0, 2)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q = 5$)

$$b\cdot d\cdot c\cdot a\cdot b\cdot a\cdot \underline{dd}\cdot b\cdot \underline{cc}\cdot a.$$

On ferme chacun des binaires avec une lettre h, et il reste $3q-5$ places pour la troisième. La part en tournantes est $(3q-5)\,\frac{1}{3(q-1)}\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 2)$, et en permutations

$$\frac{q(3q-5)}{q-1}\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 2).$$

4° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(0, 3)$.

On ferme chacun des binaires. La part est

$$\frac{q}{q-1}\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 3).$$

5° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(1, 0)$.

Soit une tournante de cette espèce (pour $q = 5$)

$$b\cdot d\cdot c\cdot \underline{aaa}\cdot b\cdot d\cdot c\cdot b\cdot d\cdot c.$$

On ferme le ternaire avec deux h, et il reste $3q - 5$ places pour la troisième. La part est

$$\frac{q(3q-5)}{q-1}\,\mathrm{M}_{q-1}(1, 0).$$

6° Part des $\mathrm{M}_{q-1}(1, 1)$.

On ferme le ternaire et le binaire. La part est

$$\frac{q}{q-1}\,\mathrm{M}_{q-1}(1, 1).$$

Si l'on ajoute les six parts et qu'on multiplie par $\frac{q-1}{q}$, on a la formule

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q}\mathrm{B}_{q,3} = {} & \frac{1}{2}(3q-4)(3q-5)(q-1)\mathrm{B}_{q-1,3}\\ & + \tfrac{1}{2}(3q-4)(3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(0, 1)\\ & + (3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(0, 2) + \mathrm{M}_{q-1}(0, 3)\\ & + (3q-5)\mathrm{M}_{q-1}(1, 0) + \mathrm{M}_{q-1}(1, 1).\end{aligned}$$

IV. *Décomposition des* T_{3q} *pour* $q = 2$.

On a $\mathrm{T}_{3\times 2} = \dfrac{1.2.3.4.5.6}{2^2.3^2} = 20.$

Or

$B_{2,3} = 2$; $\underline{ab}\,\underline{ab}\,\underline{ab}$, tournante incomplète à deux permutations.

$M_2(0, 1) = 0$; le binaire $\underline{aa}$ en entraîne un autre.

$M_2(0, 2) = 12$; il y a une seule variété asymétrique $\underline{aa}\,ba\,\underline{bb}$, d'où

$$M_2(0, 2) = 1.3.2P_2.$$

$M_2(1, 0) = 0$; le ternaire $\underline{aa}$ en entraîne un autre.

$M_2(1, 1) = 0$; il ne peut exister avec un binaire.

$M_2(1, 0) = 6$; il y a une seule variété asymétrique de fraction $\frac{1}{2}$, $\underline{aaa}\,\underline{bbb}$, d'où l'on a

$$M_2(2, 0) = 1.\tfrac{1}{2}.3.2P_2.$$

—

20

V. *Abaissement d'ordre du nombre* $M_q(r, t)$, *r n'étant pas nul.*

L'espèce $M_q(r, t)$ contient $\frac{1}{3q}M_q(r, t)$ tournantes, si l'on commence une tournante par un des r ternaires; le nombre des permutations ainsi comptées est $\frac{r}{3q}M_q(r, t)$.

Si l'on enlève un des ternaires, les lettres qui l'entourent peuvent donner un ternaire, un binaire, ou rien :

$$\left.\begin{array}{l} b\,\underline{aaa}\,bb \text{ et la réciproque} \\ b\,\underline{aaa}\,b \\ b\,\underline{aaa}\,c \end{array}\right\}\text{donnent}\left\{\begin{array}{l} \underline{bbb} \\ \underline{bb} \\ \underline{bc} \end{array}\right.$$

On obtient ainsi des permutations d'ordre $q - 1$, et le nombre ainsi compté, relativement à la lettre a éliminée, devra être multiplié par q, puisqu'il y a q lettres distinctes.

S'il s'est produit un ternaire, on a l'espèce

$$M_{q-1}(r, t-1);$$

un ternaire bbb a remplacé le ternaire enlevé, et le binaire bb a disparu. Chacune de ces tournantes, commencée par un des r ternaires, fournit $2r$ permutations à l'espèce cherchée; on place le ternaire $\underline{aaa}$ de deux manières dans ce ternaire. La part sera

$$\frac{2r}{3(q-1)} M_{q-1}(r. t-1).$$

S'il s'est produit un binaire, on a l'espèce

$$M_{q-1}(r-1, t+1);$$

il y a un ternaire de moins, $\underline{aaa}$, et un binaire de plus, $\underline{bb}$. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t+1$ binaires, fournit $t+1$ permutations à l'espèce cherchée; on place le ternaire $\underline{aaa}$ à l'intérieur du binaire. La part sera

$$\frac{t+1}{3(q-1)} M_{q-1}(r-1, t+1).$$

S'il ne se produit rien de nouveau, on a l'espèce $M_{q-1}(r-1, t)$; il y a un ternaire de moins. Chacune de ces tournantes, commencée par une des $r-1$ lettres initiales des $r-1$ ternaires, ou par une des t lettres initiales des t binaires, ou par une des $3q-3-3(r-1)-2t$ lettres isolées, fournit à l'espèce cherchée

$$3q-3-3(r-1)-2t+r-1+t, \quad \text{ou} \quad 3q-2r-t-1$$

permutations, si l'on place en tête le ternaire $\underline{aaa}$. La part sera

$$\frac{3q-2r-t-1}{3(q-1)} M_{q-1}(r-1, t).$$

La somme des trois parts, multipliée par q, donne

$$\frac{r}{3q} \mathrm{M}_q(r, t);$$

si l'on multiplie tout par $q-1$, on a la formule (r, t)

$$\frac{r(q-1)}{q^2} \mathrm{M}_q(r,t) = 2r\,\mathrm{M}_{q-1}(r, t-1) + (t+1)\,\mathrm{M}_{q-1}(r-1, t+1)$$
$$+ (3q - 2r - t - 1)\,\mathrm{M}_{q-1}(r-1, t).$$

VI. *Cas particuliers de la formule précédente.*

Si l'on y fait $t = 0$, on a la formule $(r, 0)$

$$\frac{r(q-1)}{q^2} \mathrm{M}_q(r, 0) = \mathrm{M}_{q-1}(r-1, 1) + (3q - 2r - 1)\mathrm{M}_{q-1}(r-1, 0).$$

Elle comprend, pour $r = 1$, la formule suivante $(1, 0)$, relative à une des espèces qui forment $\mathrm{B}_{q,3}$:

$$\frac{q-1}{q^2} \mathrm{M}_q(1, 0) = \mathrm{M}_{q-1}(0, 1) + 3(q-1)\,\mathrm{B}_{q-1,3}.$$

Or, pour $q = 3$ (IV), on a trouvé $\mathrm{M}_2(0, 1) = 0$ et $\mathrm{B}_{2,3} = 2$; il en résulte

$$\tfrac{2}{9}\mathrm{M}_3(1,0) = 6\mathrm{B}_{2,3} = 12, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M}_3(1, 0) = 9\mathrm{P}_3.$$

On le vérifie directement ; il n'y a qu'une variété asymétrique

$$\underline{aaa}\ bc\ bc\ bc;$$

donc $\mathrm{M}_3(1, 0) = 1.3.3\,\mathrm{P}_3 = 9\mathrm{P}_3$.

Elle comprend encore, pour $r = 1$, $t = 1$ la formule $(1, 1)$, relative à une des espèces qui forment $\mathrm{B}_{q,}$:

$$\frac{q-1}{q^2} \mathrm{M}_q(1, 1) = 2\mathrm{M}_{q-1}(1, 0) + 2\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 2) + (3q-4)\,\mathrm{M}_{q-1}(0, 1).$$

VII. *Abaissement d'ordre du nombre* $M_q(o, t)$; *cas particuliers*.

1. Cette espèce contient $\frac{1}{3q}M_q(o,t)$ tournantes; si l'on commence la tournante par un des t binaires, le nombre des permutations ainsi comptées est $\frac{t}{3q}M_q(o,t)$.

On enlève le binaire $\underline{aa}$ et la lettre isolée $\underline{a}$; on obtient ainsi des permutations d'ordre $q-1$, et le nombre ainsi compté, relativement à la lettre a éliminée, devra être multiplié par q.

La suppression du binaire $\underline{aa}$, considérée seule, peut donner un ternaire, un binaire ou rien :

$$\left.\begin{array}{ll} b\,\underline{aa}\,bb & \text{et la réciproque} \\ b\,\underline{aa}\,b & \quad\text{»} \\ b\,\underline{aa}\,c & \quad\text{»}\end{array}\right\}\text{donnent}\left\{\begin{array}{l}\underline{bbb}\\ \underline{bb} \\ \underline{bc}\end{array}\right.$$

La suppression de la lettre $\underline{a}$, considérée seule, donne les mêmes cas :

$$\left.\begin{array}{ll} b\,\underline{a}\,bb & \text{et la réciproque} \\ b\,\underline{a}\,b & \quad\text{»} \\ b\,\underline{a}\,c & \quad\text{»}\end{array}\right\}\text{donnent}\left\{\begin{array}{l}\underline{bbb}\\ \underline{bb} \\ \underline{bc}\end{array}\right.$$

Mais le binaire $\underline{aa}$ et la lettre $\underline{a}$ peuvent produire, par raccordement, un ternaire, quand on les enlève :

$$b\,\underline{aa}\,b\,\underline{a}\,b \quad \text{et la réciproque donnent} \quad \underline{bbb}.$$

On nomme *raccordement* toute figure qui, comme la précédente, résulte d'un entremêlement de deux ou de plus de deux figures simples, que leur rapprochement fait confondre en une figure composée.

Premier cas, sans raccordements.

1° Il naît de $\underline{aa}$ un ternaire.

Si en même temps il naît de $\underline{a}$ un ternaire, on a l'espèce $M_q(2, t-3)$; il s'est formé deux ternaires, et trois binaires ont disparu, $\underline{aa}$ et le binaire voisin, avec le binaire voisin de $\underline{a}$. Chaque tournante de cette espèce, commencée par un des deux ternaires, fournit huit permutations à l'espèce cherchée; on ferme de deux manières, le premier ternaire avec $\underline{aa}$, l'autre avec $\underline{a}$. La part est

$$\frac{8}{3(q-1)} M_q(2, t-3).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-1)$; il s'est formé un ternaire et un binaire; $\underline{aa}$ et le binaire voisin ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(t-1)$ permutations à l'espèce cherchée; avec $\underline{aa}$, on ferme le ternaire de deux manières et avec $\underline{a}$ l'un des $t-1$ binaires. La part est

$$\frac{2(t-1)}{3(q-1)} M_{q-1}(1, t-1).$$

Sinon, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-2)$; il s'est formé un ternaire, et deux binaires ont été supprimés, $\underline{aa}$ et le binaire voisin. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(3q-t-3)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le ternaire $\underline{bbb}$ de deux manières, et l'on place le troisième a à l'une des $3q-3-2-(t-2)$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins deux du ternaire et une de chaque binaire (pour $q = 7$ et $t = 5$) :

$$\underline{bbb} \cdot d \cdot e \cdot \underline{cc} \cdot \underline{dd} \cdot c \cdot e \cdot g \cdot \underline{ff} \cdot g \cdot f \cdot e \cdot g \cdot .$$

La part est alors

$$\frac{2(3q - t - 3)}{3(q - 1)} \mathrm{M}_{q-1}(1, t - 2).$$

2° Il naît de $\underline{aa}$ un binaire.

Si en même temps il naît de $\underline{a}$ un ternaire, on obtient l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(1, t - 1)$; il s'est formé un ternaire $\underline{ccc}$ autour de $\underline{a}$, un binaire $\underline{bb}$ autour de $\underline{aa}$, et les deux binaires $\underline{aa}$ et $\underline{cc}$ ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t - 1$ binaires, fournit $2(t - 1)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme $\underline{ccc}$ avec a de deux manières, et l'on place $\underline{aa}$ dans l'intérieur d'un des $t - 1$ binaires. La part est

$$\frac{2(t - 1)}{3(q - 1)} \mathrm{M}_{q-1}(1, t - 1).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t + 1)$; il s'est formé les binaires $\underline{bb}$ et $\underline{cc}$, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par un des $t + 1$ binaires, fournit $t(t + 1)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le binaire initial, et avec $\underline{a}$ l'un des t binaires qui restent. La part est

$$\frac{t(t + 1)}{3(q - 1)} \mathrm{M}_{q-1}(0, t + 1).$$

Sinon, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t)$; le binaire $\underline{bb}$ remplace le binaire $\underline{aa}$. Chacune de ces tournantes, commencée par un des t binaires, fournit $t(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée; on ferme avec $\underline{aa}$ le binaire initial, et l'on place $\underline{a}$ à l'une des $3q - t - 3$

places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 4$) :

$$\underline{bb} \cdot c \cdot d \cdot e \cdot \underline{dd} \cdot f \cdot g \cdot \underline{cc} \cdot f \cdot \underline{gg} \cdot e \cdot .$$

La part est alors

$$\frac{t(3q - t - 3)}{3(q-1)} M_{q-1}(0, t).$$

3° Il ne naît de $\underline{aa}$ ni ternaire ni binaire.

S'il naît de a un ternaire, on a l'espèce $M_{q-1}(1, t-2)$; il s'est formé le ternaire $\underline{ccc}$ et les binaires $\underline{aa}$, $\underline{cc}$ ont été supprimés. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit $2(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée ; on ferme avec a de deux manières le ternaire, et l'on place $\underline{aa}$ à l'une des $3q - 3 - 2 - (t-2)$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins deux lettres du ternaire, et une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 5$) :

$$\underline{ccc} \cdot \underline{dd} \cdot e \cdot \underline{ff} \cdot d \cdot g \cdot \underline{cc} \cdot g \cdot f \cdot g.$$

La part est alors

$$\frac{2(3q - t - 3)}{3(q-1)} M_{q-1}(1, t-2).$$

S'il naît un binaire, on a l'espèce $M_{q-1}(0, t)$; il s'est formé le binaire $\underline{cc}$, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par un des t binaires, fournit $t(3q - t - 3)$ permutations à l'espèce cherchée ; on place $\underline{a}$ dans le binaire initial, et $\underline{aa}$ à l'une des $3q - t - 3$ places disponibles, et il y en a autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire (pour $q = 6$ et $t = 4$) :

$$\underline{cc} \cdot d \cdot e \cdot \underline{dd} \cdot \underline{ff} \cdot g \cdot d \cdot e \cdot \underline{hh} \cdot f \cdot h.$$

La part est

$$\frac{t(3q-t-3)}{3(q-1)}\mathrm{M}_{q-1}(0, t).$$

Sinon, on a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(0, t-1)$; le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Dans une des tournantes (pour $q=6$ et $t=5$), il y a $3q-3(t-1)$ places

$$\underline{bb}\cdot\underline{cc}\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot\underline{dd}\cdot\underline{ff}\cdot e\cdot f\cdot e$$

disponibles pour $\underline{aa}$ et $\underline{a}$, autant que de lettres, moins une lettre de chaque binaire, ou $3q-t-2$; on commence la tournante par $\underline{aa}$ une fois placé, ce qui donne $3q-t-2$ permutations, et il reste pour $\underline{a}$, $3q-t-3$ places, ce qui donne $(3q-t-2)(3q-t-3)$ permutations. La part est

$$\frac{(3q-t-2)(3q-t-3)}{(3q-1)}\mathrm{M}_{q-1}(0, t-1).$$

Deuxième cas, avec raccordements.

1. On a l'espèce $\mathrm{M}_{q-1}(1, t-1)$; il s'est formé un ternaire, et le binaire $\underline{aa}$ a été supprimé. Chacune de ces tournantes, commencée par le ternaire, fournit deux permutations à l'espèce cherchée; avec $\underline{aa}$ et $\underline{a}$ on ferme le ternaire de deux manières. La part est

$$\frac{2}{3(q-1)}\mathrm{M}_{q-1}(1, t-1).$$

On y ajoute les dix parts trouvées; leur somme, multipliée par q, donne $\frac{t}{3q}\mathrm{M}_q(0, t)$; on multiplie tout par

$\frac{q-1}{q}$, et avec les réductions, on obtient la formule (o, t)

$$\frac{t(q-1)}{q^2}M_q(0,t)=8M_{q-1}(2,t-3)+2(2,t-1)M_{q-1}(1,t-1)$$
$$+4(3q-t-3)M_{q-1}(1,t-2)+t(t+1)M_{q-1}(0,t+1)$$
$$+(3q-t-3)[(2tM_{q-1}(0,t)+(3q-t-2)M_{q-1}(0,t-1)].$$

2. Si l'on y pose $t=1$, $t=2$, $t=3$, on a les trois formules (o, 1), (o, 2), (o, 3), relatives à des espèces qui forment $B_{q,3}$,

$$\frac{q-1}{q^2}M_q(0,1)=2M_{q-1}(1,0)+2M_{q-1}(0,2)+(3q-4)$$
$$\times[2M_{q-1}(0,1)+3(q-1)B_{q-1,3}],$$
$$\frac{2(q-1)}{q^2}M_q(0,2)=6M_{q-1}(1,1)+4(3q-5)M_{q-1}(1,0)$$
$$+6M_{q-1}(0,3)+(3q-5)$$
$$\times[4M_{q-1}(0,2)+(3q-4)M_{q-1}(0,1)],$$
$$\frac{3(q-1)}{q^2}M_q(0,3)$$
$$=8M_{q-1}(2,0)+10M_{q-1}(1,2)+4(3q-6)M_{q-1}(1,1)$$
$$+12M_{q-1}(0,4)+(3q-6)$$
$$\times[6M_{q-1}(0,3)+(3q-5)M_{q-1}(0,2)].$$

La formule (o, 2) est illusoire pour $q=2$; elle donnerait

$$\tfrac{1}{2}M_2(0,2)=4M_1(1,0),$$

d'où M_2 (o, 2) serait 8, tandis qu'on a trouvé 12 (IV). D'abord M_1 (1, o) n'est qu'une tournante incomplète, à une place au lieu de trois, et, pour cette raison, le nombre trouvé est trois fois trop petit; il faudrait prendre 24 au lieu de 8; ensuite, qu'on ferme le ternaire avec $\overline{aa}$ de deux manières, ou avec $\underline{a}$ de deux manières, on obtiendra le même résultat; le nombre trouvé est deux fois trop grand, et il faudra prendre 12 au lieu de 24.

VIII. *Résolution de trois nouveaux problèmes.*

1° Trouver le nombre $B_{3q'+2t+r}$ des permutations différentes faites avec $3q'+2t+r$ lettres, dont $3q'$ égales 3 à 3, $2t$ égales 2 à 2, $q'+t+r$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

Une tournante d'espèce $M_q(r, t)$ devient une $B_{3q'+2t+r}$, si l'on y suppose condensées en une seule les trois lettres de chacun des r ternaires, et les deux lettres de chacun des t binaires, et qu'on pose $q-r-t=q'$. Or, sur les $3q$ permutations d'une tournante $M_q(r, t)$, il y en a $2r+t$, celles où les extrêmes offrent un ternaire ou un binaire coupé, qui ne donnent à l'espèce cherchée rien de plus que les $3q-2r-t$ autres permutations. On a donc

$$B_{3q'+2t+r} = \frac{3q-2r-t}{3q} M_q(r, t) = \frac{3q'+r+2t}{3(q'+r+t)} M_q(r, t).$$

2° Trouver le nombre $B_{3q'+2t}$ des permutations différentes qu'on peut faire avec $3q'+2t$ lettres, dont $3q'$ égales 3 à 3, et $2t$ égales 2 à 2, $q'+t$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

On fait $r=0$ dans la formule précédente,

$$B_{3q'+2t} = \frac{3q'+2t}{3(q'+t)} M_{q'+t}(0, t).$$

3° Trouver le nombre $B_{3q'+r}$ des permutations différentes qu'on peut faire avec $3q'+r$ lettres dont $3q'$ égales 3 à 3, $q'+r$ étant le nombre des lettres distinctes, quand deux lettres consécutives sont toujours différentes.

On fait $t=0$ dans la même formule,

$$B_{3q'+r} = \frac{3q'+r}{3(q'+r)} M_{q'+r}(r, 0).$$

Toutes ces permutations sont des tournantes complètes.

IX. *Décomposition des* $T_{3\times 3}$, *avec des calculs directs.*

Formule $B_{q,3}$ .... $B_{q,3} = \quad 22\,P_3$

» $\quad (0,1)$ .... $M_3(0,1) = \quad 63\,P_3$

Il y a sept variétés asymétriques :

$\underline{aa}\,bacbcbc$	1
bca^{bc}	2
$bcbacbc$	1
ca^{bc}	2
bac	$\underline{1}$

$$\frac{1}{3.3P_3}\,M_3(0,1) = 7$$

Formule $(0,2)$ .... $M_3(0,2) = \quad 72\,P_3$

Il y a huit variétés asymétriques :

$\underline{aa}\,\underline{bb}\,c^a c^b c$	2
$\underline{aa}\,c\,\underline{bb}\,ca^{bc}$	2
$cbac$	1
$acbc$	1
$\underline{aa}\,ca\,\underline{bb}\,cbc$	1
$bc \quad cac$	$\underline{1}$

$$\frac{1}{3.3P_3}\,M_3(0,2) = 8$$

Formule $(0,9)$ .... $M_3(0,3) = \quad 48\,P_3$

Il y a cinq variétés asymétriques :

$\underline{aa}\,\underline{bb}\,\underline{cc}^{abc}$	3
$\underline{aa}\,\underline{bb}\,a\,\underline{cc}^{bc}$	1
La réciproque........	$\underline{1}$
$5 \times 9P_3$ ou $45\,P_3$	5

Il y a une symétrique de fraction $\frac{1}{3}$:

$\frac{1}{3}\,9P_3$ ou $3P_3$ $\underline{aa}\,c\,\underline{bb}\,a\,\underline{cc}\,b$.

Formule $(1,0)$.................... $M_3(1,0) = 9P_3$

Il y a une variété asymétrique :

$\underline{aaa}\,bc\,bc\,bc$.

Formule $(1,1)$.................... $M_3(1,1) = 18P_3$

Il y a deux variétés asymétriques :

$\underline{aaa}\,c\,\underline{bb}\,cbc$.........	1
La réciproque........	1
	2

Formule $(r, q-r)$.................... $M_3(1,2) = 36P_3$

Il y a quatre variétés asymétriques :

$\underline{aaa}\,\underline{bb}\,\underline{cc}\,bc$.........	1
$cb\,\underline{cc}$.........	1
Les réciproques......	2
	4

Formule $(q-1,0)$ $M_3(2,0) = 0$.

» $(q-1,1)$.................... $M_3(2,1) = 9P_3$

» $(q,0)$.................... $M_3(3,0) = 3P_3$

$280P_3$

Et, en effet, $T_{3\times3} = T_{3\times2}\dfrac{7.8.9}{1.2.3} = 10P_2 84 = 280P_3$.

X. *Calculs depuis $q = 4$ jusqu'à $q = 6$, et valeur de* $B_{7,3}$.

1° Décompos. des $T_{3\times4}$, $T_{3\times4} = T_{3\times3}\dfrac{10.11.12}{2.3} = 15400P_4$

Formule $B_{q,3}$		$B_{4,3} = 1415\,P_4$
»	$(0,1)$	$M_4(0,1) = 3672\,P_4$
»	$(0,2)$	$M_4(0,2) = 4128\,P_4$
»	$(0,3)$	$M_4(0,3) = 2464\,P_4$
»	$(0,q)$	$M_4(0,4) = 744\,P_4$
»	$(1,0)$	$M_4(1,0) = 348\,P_4$
»	$(1,1)$	$M_4(1,1) = 888\,P_4$
»	(r,t)	$M_4(1,2) = 912\,P_4$
»	$(r,q-r)$	$M_4(1,3) = 480\,P_4$
»	$(r,0)$	$M_4(2,0) = 54\,P_4$
»	(r,t)	$M_4(2,1) = 120\,P_4$
»	$(r,q-r)$	$M_4(2,2) = 144\,P_4$
»	$(q-1,0)$	$M_4(3,0) = 4\,P_4$
»	$(q-1,0)$	$M_4(3,1) = 24\,P_4$
»	$(q,0)$	$M_4(4,0) = 3\,P_4$
		$15400\,P_4$

2° Décomposition des $T_{3\times5}$, $T_{3\times5} = 1401400\,P_5$.

Formule $B_{q,3}$		$B_{5,3} = 140343\,P_5$
»	$(0,1)$	$M_5(0,1) = 345645\,P_5$
»	$(0,2)$	$M_5(0,2) = 376920\,P_5$
»	$(0,3)$	$M_5(0,3) = 231260\,P_5$
»	$(0,t)$	$M_5(0,4) = 81840\,P_5$
»	$(0,q)$	$M_5(0,5) = 14064\,P_5$
»	$(1,0)$	$M_5(1,0) = 25815\,P_5$
»	$(1,1)$	$M_5(1,1) = 61680\,P_5$
»	(r,t)	$M_5(1,2) = 63060\,P_5$
»	(r,t)	$M_5(1,3) = 33720\,P_5$
»	$(r,q-r)$	$M_5(1,4) = 8640\,P_5$
»	$(r,0)$	$M_5(2,0) = 2730\,P_5$
»	(r,t)	$M_5(2,1) = 6270\,P_5$
»	(r,t)	$M_5(2,2) = 5760\,P_5$
»	$(r,q-r)$	$M_5(2,3) = 2460\,P_5$
»	$(r,0)$	$M_5(3,0) = 230\,P_5$
»	(r,t)	$M_5(3,1) = 480\,P_5$
»	$(r,q-r)$	$M_5(3,2) = 420\,P_5$
»	$(q-1,0)$	$M_5(4,0) = 15\,P_5$
»	$(q-1,1)$	$M_5(4,1) = 45\,P_5$
»	$(q,0)$	$M_5(5,0) = 3\,P_5$
		$1401400\,P_5$

3° Décomposition des $T_{3\times6}$ $T_{3\times6} = 190590400\,P_6$.

Formule $B_{q,3}$	$B_{6,3} =$	$20167651\,P_6$
» $(0,\ 1)$	$M_6(0,1) =$	$47946672\,P_6$
» $(0,\ 2)$	$M_6(0,2) =$	$51364350\,A_6$
» $(0,\ 3)$	$M_6(0,3) =$	$32018160\,P_6$
» $(0,\ t)$	$M_6(0,4) =$	$12391920\,P_5$
» $(0,\ t)$	$M_6(0,5) =$	$2870208\,P_6$
» $(0,\ q)$	$M_6(0,6) =$	$319296\,P_6$
» $(1,\ 0)$	$M_6(1,0) =$	$2940948\,P_6$
» $(1,\ 1)$	$M_6(1,1) =$	$6773400\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(1,2) =$	$6860520\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(1,3) =$	$3874320\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(1,4) =$	$1245600\,P_6$
» $(r,\ q-r)$	$M_6(1,5) =$	$189504\,P_6$
» $(r,\ 0)$	$M_6(2,0) =$	$238365\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(2,1) =$	$526320\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(2,2) =$	$491940\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(2,3) =$	$236880\,P_6$
» $(r,\ q-r)$	$M_6(2,4) =$	$52560\,P_6$
» $(r,\ 0)$	$M_6(3,0) =$	$14520\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(3,1) =$	$30240\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(3,2) =$	$24840\,P_6$
» $(r,\ q-r)$	$M_6(3,3) =$	$8880\,P_6$
» $(r,\ 0)$	$M_6(4,0) =$	$765\,P_6$
» $(r,\ t)$	$M_6(4,1) =$	$1440\,P_6$
» $(r,\ q-r)$	$M_6(4,2) =$	$990\,P_6$
» $(q-1,\ 0)$	$M_6(5,0) =$	$36\,P_6$
» $(q-1,\ 1)$	$M_6(5,1) =$	$72\,P_6$
» $(q,\ 0)$	$M_6(6,0) =$	$3\,P_6$
		$190590400\,P_6$

4° Valeur de $B_{7,3}$.

Formule $B_{7,3}$, $B_{7,3} = 3980871156\,P_7$.

SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES

(voir même tome, p. 265);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

La méthode que nous avons employée précédemment permet de démontrer encore les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Les arêtes de deux trièdres trirectangles ayant le même sommet forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

En prenant, en effet, pour axes des coordonnées les trois arêtes du premier, et en désignant par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour $i = 1, 2, 3$, les équations des arêtes D_i du second, le cône cherché a pour équation

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{x} + \frac{b_1 b_2 b_3}{y} + \frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite D_1, par exemple, se trouve tout entière sur le cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites D_2 et D_3 sont rectangulaires.

THÉORÈME. — *Deux systèmes de trois diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

Désignons par

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1$$

l'équation de la surface du second ordre rapportée au premier système, et par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour $i = 1, 2, 3$, les trois diamètres D_i formant le second système. Le cône cherché a pour équation

$$M\frac{a_1 a_2 a_3}{x} + N\frac{b_1 b_2 b_3}{y} + P\frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite D_1 est située sur ce cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites D_2 et D_3 sont conjuguées par rapport à la surface donnée.

On démontre de la même manière les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *Les faces de deux trièdres trirectangles forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

Théorème. — *Deux systèmes de trois plans diamétraux conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

Si, en effet,

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0,$$

pour $i = 1, 2, 3$, représente l'équation d'un plan diamétral du second système dans la surface

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1,$$

rapportée aux trois plans du premier, le cône cherché a pour équation

$$\sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3 x}{M}} + \sqrt{\frac{b_1 b_2 b_3 y}{N}} + \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 z}{P}} = 0.$$

L'avantage de ce genre de démonstration, qui rentre dans la méthode synthétique, consiste non-seulement dans la brièveté, mais dans l'établissement de l'équation de la courbe ou de la surface, ce qui permet de déduire aisément les propriétés métriques correspondantes.

THÉORÈME. — *Si, sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois diagonales, les six points seront situés sur une conique.*

En prenant pour triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère et les équations des côtés du quadrilatère sous la forme

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} \pm \frac{z}{z_1} = 0,$$

les deux sommets du quadrilatère situés sur l'axe des z sont donnés avec $z = 0$ par les équations

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} = 0,$$

et l'équation d'un faisceau de deux droites conjuguées harmoniques des deux précédentes est, quelle que soit la valeur de ν,

$$\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{y_2}{y_1^2} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

et les traces de ces droites sur l'axe des z sont situées sur la conique ayant pour équation

$$\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{y_2}{y_1^2} + \frac{z_2}{z_1^2} - 2\lambda \frac{xz}{y_1 z_1} - 2\mu \frac{zx}{z_1 x_1} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

dont la forme symétrique démontre immédiatement le théorème proposé.

On en déduit la proposition suivante :

Si une conique divise harmoniquement deux diagonales d'un quadrilatère complet, elle divise aussi harmoniquement la troisième.

On dit, dans ce cas, que le quadrilatère et la conique sont conjugués, et l'équation précédente, qui représente l'équation générale des coniques conjuguées au quadrilatère, contient trois paramètres arbitraires (*).

THÉORÈME. — *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à deux points quelconques se coupent en de nouveaux points dont les projections sur les côtés correspondants forment six points situés sur une conique.*

Considérons deux points P_1 et P_2 dans le plan du triangle de référence ABC; les droites BP_1, CP_2 et BP_2, CP_1 se coupent en deux points distincts de P_1 et P_2, dont les projections sur l'axe des x sont données par l'équation

$$\frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_2 z_2} - yz\left(\frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2}\right) = 0;$$

par conséquent, en opérant de même pour les autres sommets, on obtient six points situés sur la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz\left(\frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2}\right) - \ldots = 0.$$

En retranchant cette équation de celle de la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz\left(\frac{1}{y_1 z_2} + \frac{1}{y_2 z_1}\right) - \ldots = 0,$$

qui passe par les six projections de P_1 et de P_2, on obtient l'équation d'une conique circonscrite au triangle de

(*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, t. I, p. 96. — P. SERRET, *Géométrie de direction*, p. 261.

référence, et dont la position du centre d'homologie donne lieu à diverses propriétés métriques.

Cette conique passe par les points d'intersection des deux premières.

Théorème. — *Si, par les trois points conjugués d'un point par rapport aux trois côtés d'un triangle pris pour axes de référence, on mène des tangentes à une conique, leurs traces sur les axes correspondants forment six points d'une conique.*

Nous appelons *points conjugués* d'un point donné par rapport à un triangle les trois points d'intersection des polaires de ce point par rapport à deux des angles de ce triangle.

Désignons par

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de la conique donnée, et par $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ le point donné. Le point conjugué de ce point par rapport à l'axe des z a pour coordonnées proportionnelles $x_1, y_1, -z_1$; et les tangentes menées de ce point à la conique donnée ont pour traces sur l'axe des z les deux points fournis par les équations $z = 0$ et

$$\begin{aligned} x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1)& \\ - 2xy\,[A''x_1y_1 + z_1(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)] &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux points et les quatre analogues sont situés sur la conique

$$\begin{aligned} x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1)& \\ + z^2(A'x_1^2 + Ay_1^2 + 2B''x_1y_1)& \\ - 2Ay_1z_1yz - 2A'z_1x_1zx - 2A''x_1y_1xy& \\ - z(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)(xyz_1 + yzx_1 + zxy_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ce théorème comporte un grand nombre de cas particuliers, ainsi qu'en corrélation.

Théorème. — *Les droites qui joignent un point aux traces d'une droite sur les côtés du triangle de référence rencontrent les autres côtés en six points situés sur une conique.*

En désignant par P_1 (x_1, y_1, z_1) et par D_1 (u, v, w) le point et la droite donnés, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{u}{x_1}(vy_1 + wz_1)x^2 + \ldots$$
$$- \frac{yz}{y_1 z_1}[vwy_1 z_1 + (ux_1 + vy_1)(ux_1 + wz_1)] - \ldots = 0.$$

Ce théorème est un cas particulier du suivant, généralisation du théorème de Pascal :

Si deux cubiques ont trois points communs en ligne droite, les six autres points d'intersection sont situés sur une conique.

Nous compléterons enfin le théorème de M. Chasles, démontré dans l'article précédent. Nous avons vu que, si, par les trois sommets d'un triangle, on mène des tangentes à une conique

$$f(x, y, z) = 0,$$

leurs traces sur les côtés opposés sont situées sur la conique

$$\Phi = A'A''x^2 + A''Ay^2 + AA'z^2$$
$$- 2ABxz - 2A'B'zx - 2A''B''xy = 0.$$

L'équation de la conique Φ peut s'écrire

$$B^2x^2 + B'^2y^2 + B''^2z^2 - 2B'B''yz$$
$$- 2B''Bzx - 2BB'xy + \delta f(x, y, z) = 0,$$

δ désignant le discriminant de f, et, par conséquent, les coniques f et φ ont leurs points d'intersection sur la conique

$$\sqrt{\mathrm{B}x} + \sqrt{\mathrm{B}'y} + \sqrt{\mathrm{B}''z} = 0,$$

inscrite dans le triangle de référence.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1171

(voir 2e série, t. XIV, p. 240);

PAR M. L. MICHEL, au Puy.

Soient M, A, B *trois points d'une circonférence; trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en* A, B *aux droites* MA, MB, *lorsque le point* M *se déplace sur la circonférence.*

(LAISANT.)

Quand le point M se déplace sur la circonférence, l'angle en M reste constant. Or, on sait que l'angle de deux tangentes à la parabole est égal à la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la corde de contact. Si donc on désigne par F un point du lieu, l'angle AFB est constant; le lieu est par suite une circonférence de cercle facile à déterminer.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; G. Vandame; A. Bertrand; Gambey; Lez; Goulin et Nivelle, élèves du lycée de Rouen; P. S., de Cherbourg; A. Durel, répétiteur au lycée du Havre; F. Pitois, élève du collége d'Annecy; Chadu; Gondelon, élève du lycée de Moulins; Tourrettes; A. Pellissier; L. Arriu; Launoy, à Lille; Chabanel, à Reims.

Question 1172
(voir 2^e^ série, t. XIV, p. 240);

PAR M. H. LEZ.

Soient a, b, c les côtés; S la surface d'un triangle ABC; R *le rayon du cercle circonscrit à ce triangle; $2p'$ le périmètre du triangle de périmètre minimum inscrit dans* ABC :

1° *Construire le triangle* ABC, *connaissant $2p'$ et les angles* A, B, C;

2° *Démontrer la formule* $S = p'R$.

(C. CHADU.)

Pour construire un triangle ABC, connaissant les angles A, B, C et le périmètre $2p'$ du triangle inscrit de périmètre minimum, c'est-à-dire le triangle PMN obtenu en joignant les pieds des hauteurs du triangle primitif, il suffit de remarquer : 1° que les angles au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sont doubles des angles aux sommets; 2° que les côtés PN, PM, MN sont respectivement perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC passant par les sommets opposés; 3° que les angles P, N, M sont les suppléments des angles 2C, 2B, 2A ; 4° que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles M, N, P.

Construisant donc un triangle PNM dont on connaît les angles et le périmètre $2p'$, les perpendiculaires à ses bissectrices détermineront le triangle ABC.

Quant à l'aire du triangle ABC, il est facile de voir qu'elle égale $p'R$; car, si l'on joint le centre O du cercle circonscrit aux sommets du triangle PMN, la figure se trouve décomposée en trois parties ayant chacune pour surface la moitié d'un côté du triangle MNP multiplié par le rayon R. On peut trouver la valeur de p' en observant que $S = pr = p'R$, d'où

$$p' = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$
$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4abc}$$
$$= \frac{4S^2}{abc} = \frac{ah_a^2}{bc} = h_a \sin A.$$

Il est facile, d'après ce qui précède, de résoudre les questions posées par M. Gambey (même tome, page 328), et relatives à l'énoncé de M. Chadu (*).

1° Pour construire le triangle ABC, connaissant ses angles et le rayon r' du cercle inscrit au triangle PMN, il suffit de construire d'abord le triangle PMN dont les angles sont les suppléments de 2C, 2B, 2A et dont le rayon r' du cercle inscrit est donné : c'est un problème connu. Les perpendiculaires aux bissectrices intérieures détermineront les côtés du triangle ABC.

2° Si, au lieu de cela, on connaît les angles et la surface du triangle PMN, on construira d'abord ce triangle, ce qui est simple, puisqu'il n'y a qu'à trouver un triangle semblable à un triangle donné et d'une aire déterminée. Le reste de la construction comme dans le cas précédent.

3° Quant aux formules

$$S = \frac{h\,h'\,h''}{2p'} = 2R'r' \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C,$$

elles découlent des transformations suivantes :

Puisque

$$p' = h \sin A, \quad p' = h' \sin B, \quad p' = h'' \sin C,$$

(*) M. P. Sondat nous a envoyé une solution analogue de ces mêmes questions.

on peut écrire

$$p'^3 = h h' h'' \sin A \sin B \sin C = \frac{p'^2 S}{R}.$$

Or

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{8[p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2 c^2} = \frac{pr}{2R^2},$$

car

$$pr = [p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$2R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{8p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où

$$\frac{h h' h'' R pr}{2R^2 p'^2} = S;$$

mais $pr = p'R$; alors

$$S = \frac{h h' h''}{2p'}.$$

De même, en remarquant que les côtés du triangle MNP sont représentés par

$$m = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}, \quad n = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac},$$

$$q = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab},$$

et que $m + n + q = 2p'$, on a, en réduisant,

$$r' R' = \frac{mnq}{4p'};$$

mais

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{64 S p(p-a)(p-b)(p-c)}{8\, mnp\, abc},$$

d'où

$$2r' R' \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{4 S p(p-a)(p-b)(p-c)}{p' abc} = S,$$

car

$$\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = p'.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. P. S., de Cherbourg; E. Gatti, étudiant à l'Université de Turin; Michel, au Puy; F. Stordeur, de Lille; E. Rebuffel, élève du lycée de Rennes; Tourrettes; F. Pitois, élève du collége d'Annecy; Gondelon, élève du lycée de Moulins; E. Dupont, élève du lycée du Havre; A. Durel et E. Vasselin.

Question 1173

(voir 2e série, t. XIV, p. 288);

PAR M. L. MICHEL, au Puy.

Lorsque les médianes d'un triangle inscrit dans une ellipse se coupent au centre de la courbe, le lieu du point de concours des hauteurs de ce triangle est une ellipse tangente à la développée.

(POUJADE.)

Les médianes du triangle étant des diamètres, les côtés sont respectivement parallèles aux tangentes aux trois sommets, et, par suite, les trois hauteurs du triangle sont des normales à l'ellipse.

Cela posé, soit (α, β) un point du lieu. Si l'on forme l'équation connue du quatrième degré, qui a pour racines les abscisses des pieds des normales menées du point (α, β) à l'ellipse, on trouve que

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = \frac{2a^2\alpha}{c^2}.$$

D'ailleurs $x' + x'' + x''' = 0$, puisque l'origine est le centre des moyennes distances des pieds de trois des normales. En remplaçant x par $\frac{2a^2\alpha}{c^2}$ dans l'équation en x, on a, entre α et β, une relation qui est l'équation du lieu. On trouve ainsi aisément, en remplaçant d'ailleurs α et β par x et y,

$$4a^2x^2 + 4b^2y^2 = c^4,$$

équation d'une ellipse rapportée à ses axes. Elle peut s'écrire

$$(1) \qquad \left(\frac{ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Il est facile de s'assurer que cette courbe est tangente à la développée de l'ellipse. On peut le mettre nettement en évidence de la façon suivante :

L'équation de la développée est

$$(2) \qquad \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Je remarque que, si z et u sont liés par la relation $z + u = 1$, il en résulte

$$z^3 + u^3 - \tfrac{1}{4} + 3zu = \tfrac{3}{4}$$

ou

$$z^3 + u^3 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}(z - u)^2 = 0.$$

D'après cela, l'équation (2) de la développée peut s'écrire

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left[\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 = 0,$$

ce qui montre clairement que l'ellipse (1) lui est tangente en ses points d'intersection avec les droites définies par l'équation

$$(ax)^2 - (by)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Gondelon, élève du lycée de Moulins; Moret-Blanc; Launoy, à Lille; Chadu; Tourrettes; Chabanel, à Reims; P. Sondat, professeur au collége d'Annecy; P. S., de Cherbourg; Gambey; A. Astor, à Angoulême; Vladimir Habbé, à Odessa.

Question 1174

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 288) ;

PAR M. F. STORDEUR,
Maître auxiliaire au lycée de Lille.

Trouver, dans l'intérieur d'un triangle ABC, *un point* O *qui soit tel que, si de ce point on abaisse des perpendiculaires* OA', OB', OC', *sur les côtés* BC, AC, AB *de ce triangle, l'aire du triangle* A' B' C' *soit un maximum.*

(HARKEMA).

Je prends pour origine des coordonnées le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et pour axes deux droites rectangulaires quelconques passant par ce point. Soient alors

$$\lambda = x\cos\alpha + y\sin\alpha - u = 0,$$
$$\mu = x\cos\beta + y\sin\beta - v = 0,$$
$$\nu = x\cos\gamma + y\sin\gamma - w = 0$$

les équations respectives des côtés BC, AC et AB du triangle.

Si, d'un point O du plan dont les coordonnées sont x et y, on abaisse les perpendiculaires OA', OB', OC' sur les droites précédentes, la surface S du triangle A' B' C' est fournie par l'égalité

$$(1) \qquad \mu\nu\sin A + \nu\lambda\sin B + \lambda\mu\sin C = 2S.$$

Et si, dans cette relation, on considère x et y, qui y entrent implicitement, comme coordonnées courantes, on a l'équation du lieu du point (x, y). Ce lieu est un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées, car son équation ne diffère que par une constante 2S de celle du cercle circonscrit au triangle ABC

$$\mu\nu\sin A + \nu\lambda\sin B + \lambda\mu\sin C = 0.$$

En remplaçant dans l'équation (1) λ, μ et ν par leurs valeurs exprimées en fonction de x et de y, on trouve que, pour que le cercle lieu du point (x, y) soit réel, il faut que la quantité

$$vw \sin A + wu \sin B + uv \sin C - 2S$$

soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$2S \leq vw \sin A + wu \sin B + uv \sin C.$$

Le maximum de S a donc lieu lorsque cette inégalité se change en égalité.

Dans ce cas, le lieu du point (x, y) se réduit à un cercle de rayon nul, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées. Ainsi le point cherché est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et la surface maximum est le quart de celle de ce triangle.

Il faut remarquer que, si le triangle donné a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur; l'énoncé de la question suppose donc que le triangle ABC a tous ses angles aigus.

Toutefois, le maximum de S ainsi déterminé est un maximum relatif; car, eu égard seulement aux valeurs absolues, S peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut pour une position du point O convenablement choisie à l'extérieur du triangle.

Quand le point O est à l'origine des coordonnées, S est maximum; si le point décrit, autour de l'origine, un cercle de rayon croissant, S décroît jusqu'à la valeur zéro qu'elle atteint lorsque le point O est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Enfin, si le rayon du cercle croît indéfiniment, la surface S, devenue négative, décroît indéfiniment et sa valeur absolue croît au delà de toute limite.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Michel, au Puy; P. S., à Cherbourg; Gambey; Tourrettes; Maleyx; Chadu; P. Sondat; Lez; Genty; Moret-Blanc.

Questions 1178 *et* 1179

(voir 2e série, t. XIV, p. 336);

PAR M. P. SONDAT,

Professeur au collége d'Annecy.

1178. *Soient* P *un point pris sur l'axe d'une conique à centre, et* MN *une tangente quelconque, limitée aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe: démontrer que la puissance du point* P, *par rapport à la circonférence de diamètre* MN, *est constante.* (LAISANT.)

On sait que la droite MN est vue de chacun des foyers F et F′ sous un angle droit, ce qu'il est d'ailleurs facile de démontrer; la circonférence de diamètre MN passe donc aux foyers, et la puissance du point P, représentée par le produit

$$PF \times PF',$$

est évidemment constante.

1179. *Soient* MN *une tangente quelconque à une parabole, limitée en* M *à la tangente au sommet, et en* N *à une perpendiculaire fixe quelconque, élevée sur l'axe de la courbe;* P *un point fixe quelconque pris sur cet axe: démontrer que la puissance du point* M, *par rapport à la circonférence de diamètre* MP, *est constante.*

(LAISANT.)

Soit

$$(1) \qquad y = mx + \frac{p}{2m}$$

une tangente quelconque à la parabole

$$(2) \qquad y^2 = 2px;$$

elle rencontre la tangente au sommet A et la perpendiculaire fixe, menée à l'axe à une distance $AB = b$ de ce sommet, aux points M et N pour lesquels

$$AM = \frac{p}{2m},$$

$$BN = mb + \frac{p}{2m}.$$

Si, d'ailleurs, on pose $AP = a$ et

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{a+b}{2}, \\ \beta &= \frac{BN}{2}, \\ \rho^2 &= (a-\alpha)^2 + \beta^2, \end{aligned}\right.$$

le cercle décrit sur NP comme diamètre aura pour équation

$$(4)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2,$$

et sera rencontré par la droite

$$(5)\qquad y = \frac{p}{2m}$$

en deux points dont les distances au point M sont les racines de l'équation

$$(x-\alpha)^2 + \left(\frac{p}{2m} - \beta\right)^2 = \rho^2,$$

obtenue en éliminant y entre (4) et (5).

Le produit de ces racines

$$\varpi = \alpha^2 + \left(\frac{p}{2m} - \beta\right)^2 - \rho^2$$

représente la puissance du point M, et devient, d'après les relations (3),

$$\varpi = ab - \frac{pb}{2} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey, B. Launoy; Ley; A. Pellissier; A. Astor; Catala, à Guéret; H. Lemelle; C. Le Paige, à Liége; E. de Lamaze, à Sorrèze; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen.

CORRESPONDANCE.

M. Brocard nous a adressé les solutions des questions 868, 898 et 932; c'est par oubli que ces solutions n'ont pas été mentionnées plus tôt.

Nous avons reçu les Mémoires suivants :

Génération des lignes et des surfaces du second degré, d'après Jacobi, par J. WAILLE. Besançon; 1875.

Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secundo grado tra due variabili ad integrale generale algebrica. Nota del M. E. prof. FELICE CASORATI, letta nell'adunanza del 10 decembre 1874, del R. Istituto lombardo di Scienze e Lettere.

Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments, par le Dr EMIL WEYR, secrétaire perpétuel de la Société mathématique de Bohême. (Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*)

Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einen cuspidal Punkte, von Dr EMIL WEYR, in Prag. (Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Vienne.*)

Sui determinanti di funzioni. Nota del prof. Felice Casorati. Milan; 1875. In-4.

Notice sur la vie et les travaux de Rodolphe-Frédéric-Alfred Clebsch, par M. Paul Mansion, professeur à l'Université de Gand. (Extrait du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche,* t. VIII, mars 1875.

Le Catalogue contenu dans les pages 14-66 de cette publication indique 180 travaux de Clebsch; de ces 180 travaux, les 7^e, 68^e, 70^e, 86^e, 93^e ne sont pas indiqués dans le Catalogue intitulé *Liste der Publicationen,* qui se trouve aux pages 51-55 du volume intitulé *Mathematische Annalen,* VII Band; Leipzig, 1874. Les recensements (Referate) indiqués dans le premier de ces Catalogues, sous les n^{os} 107-177, ne sont mentionnés dans le second (*Mathematische Annalen,* VII Band, p. 55, lig. 12-14) autrement qu'ainsi :

« Einzelne Referate in den Bänden der Fortschritte der Physik, dem ersten und zweiten Bande der Fortschritte der Mathematik, in Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen, etc. Unterricht. »

PUBLICATIONS RÉCENTES.

The Cone and its sections treated geometrically, by S.-A. Renshaw, of Nottingham. London, Hamilton, Adams and C^o; Paternoster Row; 1875. In-4, avec planches.

C'est un Traité complet des sections coniques, où tous les théorèmes sont démontrés géométriquement à la manière d'Apollonius. L'auteur a introduit la courbure et les propriétés anharmoniques.

Archiv Mathematiky a Fysiky, publié par la Société mathématique de Bohême, à Prague, et rédigé par le secrétaire perpétuel, Dr Emil Weyr. Prague, Ed. Grégra; 1875. In-8, avec planches.

Cette publication paraît à des époques irrégulières et contient des Mémoires écrits en langues diverses. A la fin de chaque volume, on publie en français un extrait des Mémoires écrits en langue bohême.

Analectes, ou série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques, par M. Nicolaïdès, paraissant à époques irrégulières par livraisons de 2 feuilles, à partir de 1871. Prix de chaque livraison : 80 c.

Les dix-sept premières livraisons de cet intéressant Recueil contiennent : I. Mémoire sur le mouvement d'un point matériel. Sur la théorie des surfaces. — II. Note sur la théorie des nombres. Sur le mouvement d'un point matériel. Sur quelques articles des *Annales de Mathématiques*. — III. Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan. Application aux organes des machines. — IV. Problèmes de Géométrie. — V. Généralisation d'un théorème de M. Bertrand. Sur les podaires et les arcs plans. — VI. Théorème de Fagnano. Nouvelle propriété d'un système de coniques homofocales. Théorèmes de MM. Chasles et Kupper. Représentation géométrique d'Euler, etc. — VII. Sur l'intégration des équations linéaires. — VIII. Sur les développées successives des courbes planes. — IX. Sur les développées successives des courbes planes (suite). Nouvelles propriétés du mouvement d'un point matériel. Note sur la théorie des caustiques ; relation entre les rayons de courbure de la caustique et de l'anticaustique ; formules diverses ; centre de jonction. — X. Transformation des courbes et des surfaces. Transformation des courbes à double courbure par la méthode des rayons vecteurs réciproques. Transformation des surfaces. — XI et XII réunies. Surfaces podaires. Sur les éléments d'une substitution orthogonale ternaire. Sur le mouvement d'un quadrilatère articulé ; coulisse de Stephenson, parallélogramme de Watt. Sur les équations fondamentales des surfaces; formes de ces équations lorsque les deux systèmes de lignes que l'on considère se coupent sous un angle variable. Cas particuliers; équations de M. Bonnet, de M. Codazzi, de Lamé, de Bour. — XIII et XIV réunies. Forme définitive des équations fondamentales des surfaces. Applications diverses. Enveloppe d'une droite. Mouvement des polygones articulés. Mémoire sur les surfaces orthogonales. — XV. Mémoire sur les surfaces orthogonales (suite). Cas particuliers. Transformation des formules en coordonnées polaires ; nouveaux systèmes. Autre transformation; nouveaux systèmes. — XVI. Note au sujet du Mémoire qui précède (surfaces orthogonales). Sur le mouvement des polygones plans et sphériques. Théorèmes sur le pentagone, sur l'hexagone, etc. Théorèmes de Cinématique. Sur le mouvement d'un point matériel. Sur les surfaces à courbure moyenne constante. — XVII. Sur les surfaces réglées. Cas particuliers. Lignes tracées sur les surfaces réglées. Sur quelques courbes gauches.

Traité d'Algèbre, par H. LAURENT, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement; 2e édit., in-8, 1875. Prix : 7 fr. 50.

L'auteur s'est proposé, dans cet Ouvrage, de développer le programme des connaissances exigées pour l'entrée à l'École Polytechnique et à l'École Normale. Toutefois, il ne s'est pas astreint à suivre ce programme à la lettre, et il a donné de l'extension aux théories les plus intéressantes. Nous citerons en particulier celles des polynômes entiers, des déterminants, des imaginaires, des séries, ainsi que ce qui a trait à l'analyse combinatoire et aux éléments du Calcul différentiel.

Elementi di Calcolo grafico, del prof. LUIGI CREMONA. Texte et figures, in-8, 1874. Prix : 2 fr. 50.

Cet Ouvrage a été écrit principalement pour les élèves des Écoles d'application qui veulent se préparer à l'étude de la Statique graphique. Il peut servir d'utile introduction à l'Ouvrage suivant.

La Statique graphique et ses applications aux constructions, par M. Levy. Un volume grand in-8 avec un atlas même format, comprenant 24 planches doubles; 1874. Prix : 16 fr. 50.

La Statique graphique met à la disposition de tous, pour tenir lieu des calculs laborieux auxquels se livrent encore journellement nos ingénieurs, des procédés simples et expéditifs. Ces procédés ont de plus le précieux avantage de renfermer toujours en eux-mêmes le principe de leur vérification, de telle sorte qu'ils peuvent, comme toutes les méthodes graphiques, laisser un doute sur une fraction décimale, chose très-indifférente en ce genre d'applications; ils sont en revanche exempts de ces chances d'erreurs grossières que comportent les longues opérations arithmétiques.

Riassunto delle Lezioni di Algebra date dal comm. Giusto Bellavitis. In-8, 150 pages, 1875.

Chap. I. Principes et résolution numérique des équations algébriques à une inconnue. — Chap. II. Résolution algébrique des équations. — Chap. III. Théorèmes relatifs aux polynômes et aux équations. Facteurs décimaux. Décomposition des fonctions fractionnaires. — Chap. IV. Factorielles. Combinaisons. Probabilités. — Chap. V. Élimination et déterminants. — Chap. VI. Nombres entiers, fractions continues, congruences. — Chap. VII. Logarithmes, exponentielles et fonctions hyperboliques. — Chap. VIII. Imaginaires. Quantités géométriques. Fonctions circulaires et trigonométriques. — Chap. IX. Fonctions interpolaires. Dérivées et séries infinies. Méthodes d'approximation. — Chap. X. Fonctions symétriques. Théorie des formes et des substitutions linéaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadrons au 37^e^ régiment d'artillerie.

I. Une surface du deuxième degré étant coupée par un plan P, désignons par D le diamètre parallèle à la tangente en un point quelconque de la section, par p la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point et par α l'angle que forme ce plan tangent avec le plan P.

1° Pour tout point de la section

$$\frac{p\mathrm{D}}{\sin\alpha} = \text{const.}$$

2° La constante conserve la même valeur lorsque le plan P roule sur une surface homofocale à la surface donnée.

II. On donne trois surfaces du deuxième degré homofocales. Une droite ε touchant les deux premières coupe la troisième A au point a. Si le plan tangent au point a rencontre au point m la parallèle Om menée à ε par le centre O de A, Om a une longueur constante, quelle que soit la droite ε.

Par un point d'une surface du deuxième degré, on mène trois plans rectangulaires A, B, C. Si l'on désigne par α, β, γ les rayons de courbure des trois sections en ce point et par T le plan tangent en ce même point :

$$\frac{\sin^{-3}\mathrm{TA}}{\alpha} + \frac{\sin^{-3}\mathrm{TB}}{\beta} + \frac{\sin^{-3}\mathrm{TC}}{\gamma} = \text{const.},$$

quels que soient les trois plans.

III. Lorsque trois surfaces du deuxième degré A, B, C touchent les mêmes droites : 1° si par chaque tangente de C on mène des plans tangents à chacune des deux autres, les droites qui joindront les points de contact de la surface A avec les points de contact de la surface B seront tangentes à une surface du deuxième degré qui touche les mêmes droites que A et B; 2° si une tangente qui roule sur C rencontre la première aux points a, a', et la seconde aux points b, b', on a

$$\frac{aa'}{\alpha^2} : \frac{bb'}{\beta^2} = \text{const.},$$

α et β étant les diamètres de A et B parallèles à la tangente mobile.

IV. Lorsque trois surfaces du deuxième degré A, B, C touchent les mêmes plans, si l'on mène un plan tangent à l'une C et que l'on désigne par A, B les produits des axes des sections déterminées par ce plan dans les deux autres, par A', B' les produits des axes des sections diamétrales parallèles dans ces deux surfaces respectivement, on a, quel que soit le plan tangent,

$$\frac{A}{A'^3} : \frac{B}{B'^3} \text{ const.}$$

QUESTIONS.

1186. Trouver le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères, doublement tangentes à une parabole donnée, de telle sorte que la corde des contacts intercepte sur l'axe de la parabole, à partir de son sommet, une longueur qui soit moyenne proportionnelle entre les segments que cet axe détermine sur la corde elle-même. (GAMBEY.)

THÉORÈME POUR LA DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE n ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A n INCONNUES;

PAR M. G. FONTENÉ,
Maître répétiteur au lycée Saint-Louis.

Soit un système de n équations de premier degré à n inconnues :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} E_1 = a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_1^p x_p + a_1^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_1^r x_r + \ldots + a_1^n x_n - k_1 = 0, \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} E_\alpha = a_\alpha^1 x_1 + \ldots + a_\alpha^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_\alpha^p x_p + a_\alpha^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_\alpha^r x_r + \ldots + a_\alpha^n x_n - k_\alpha = 0, \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(p)\quad \left\{\begin{array}{l} E_p = a_p^1 x_1 + \ldots + a_p^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_p^p x_p + a_p^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_p^r x_r + \ldots + a_p^n x_n - k_p = 0, \end{array}\right.$$

$$(p+1)\quad \left\{\begin{array}{l} E_{p+1} = a_{p+1}^1 x_1 + \ldots + a_{p+1}^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_{p+1}^p x_p + a_{p+1}^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad + a_{p+1}^n x_r + \ldots + a_{p+1}^n x_n - k_{p+1} = 0, \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(q)\quad \left\{\begin{array}{l} E_q = a_q^1 x_1 + \ldots + a_q^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_q^p x_p + a_q^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_q^r x_r + \ldots + a_q^n x_n - k_q = 0, \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n)\quad \left\{\begin{array}{l} E_n = a_n^1 x_1 + \ldots + a_n^f x_f + \ldots \\ \qquad + a_n^p x_p + a_n^{p+1} x_{p+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_n^r x_r + \ldots + a_n^n x_n - k_n = 0. \end{array}\right.$$

Je suppose différent de zéro le déterminant mineur d'ordre p, obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes et les p premières lignes. Soit D ce déterminant.

Je désigne par $D_{\alpha,q}$ le déterminant mineur d'ordre p, obtenu en supprimant dans ce même déterminant des coefficients des inconnues :

1° Les p premières colonnes;

2° Les p premières lignes, excepté celle de rang α, et la ligne de rang q; α prend les p valeurs $1, 2, \ldots, p$; et à chacune de ces valeurs correspondent pour q les $(n-p)$ valeurs $(p+1), \ldots, n$.

Je multiplie les deux membres de l'équation (α) par D,
les deux membres de l'équation $(p+1)$ par $(-1)D_{\alpha,p+1}$,
. . . . ,
les deux membres de l'équation (q) par $(-1)^{q-p}D_{\alpha,q}$,
. . . . ,
les deux membres de l'équation (n) par $(-1)^{n-p}D_{\alpha,n}$,

et j'ajoute; j'ai l'équation

$$H_\alpha = DE_\alpha + (-1)D_{\alpha,p+1}E_{p+1} + \ldots + (-1)^{q-p}D_{\alpha,q}E_q + \ldots + (-1)^{n-p}D_{\alpha,n}E_n = 0.$$

Il est facile de voir que l'on peut remplacer le système donné par le système

$$\left|\begin{array}{l} H_1 = 0, \\ \ldots\ldots, \\ H_\alpha = 0, \\ \ldots\ldots, \\ H_p = 0, \end{array}\right.$$
$$\left|\begin{array}{l} E_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_q = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_n = 0. \end{array}\right.$$

En effet, si, pour des valeurs des inconnues, les ystème primitif est vérifié, le système ci-dessus l'est pour les mêmes valeurs.

Réciproquement, si, pour des valeurs des inconnues, le système ci-dessus est vérifié, pour ces mêmes valeurs les $(n-p)$ dernières équations du système primitif sont vérifiées, et, parmi les p premières, l'équation $E_\alpha = 0$, par exemple, est vérifiée, puisque la relation $H_\alpha = 0$ se réduit pour ces valeurs à $DE_\alpha = 0$, ou $E_\alpha = 0$, D étant différent de zéro.

Je développe l'équation $H_\alpha = 0$.

Le coefficient de x_f est

$$a_\alpha^f D + (-1) a_{p+1}^f D_{\alpha, p+1} + \ldots + (-1)^{q-p} a_q^f D_{\alpha, q} + \ldots \\ + (-1)^{n-p} a_n^f D_{\alpha, n},$$

ou le déterminant mineur d'ordre $p-1$

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^f & a_\alpha^{p+1} & a_\alpha^r & a_\alpha^n \\ a_{p+1}^f & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+1}^r & a_{p+1}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_q^f & a_q^{p+1} & a_q^r & a_q^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^f & a_n^{p+1} & a_n^r & a_n^n \end{vmatrix},$$

qu'on obtient en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes, à l'exception de celle de rang f, et les p premières lignes, à l'exception de celle de rang α. Je désignerai ce déterminant par Δ_α^f.

Le coefficient de x_r, qui se déduit du précédent en remplaçant f par r, est nul, puisque c'est un déterminant qui a deux colonnes identiques ; le terme constant, changé de signe, se déduit du coefficient de x_f en remplaçant la première colonne par $k_\alpha, k_{p+1}, \ldots, k_q, \ldots, k_n$. Pour l'obtenir, on supprime dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes, que l'on remplace par une colonne unique $k_1, k_2, \ldots, k_n$, et dans le tableau obtenu on supprime les p premières lignes, à l'exception de celle de rang α. Je désignerai ce déterminant par K_α.

L'équation H_α est donc

$$\Delta_\alpha^1 x_1 + \ldots + \Delta_\alpha^f x_f + \ldots + \Delta_\alpha^p x_p - K_\alpha = 0.$$

Le second système, équivalent au premier, est donc

$$\left|\begin{array}{l} \Delta_1^1 x_1 + \ldots + \Delta_1^f x_f + \ldots + \Delta_1 x_p - K_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_\alpha^1 x_1 + \ldots + \Delta_\alpha^f x_f + \ldots + \Delta_\alpha^p x_p - K_\alpha = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_p^1 x_1 + \ldots + \Delta_p^f x_f + \ldots + \Delta_p^p x_p - K_p = 0, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} E_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_q = 0, \\ \ldots\ldots, \\ E_n = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on suppose nuls les p^2 déterminants Δ_α^f, on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné un système de n équations du premier degré à n inconnues, si le déterminant mineur D d'ordre p, obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes et les p premières lignes, est différent de zéro, et si, en outre, les p^2 déterminants mineurs Δ_α^f d'ordre $(p-1)$, obtenus en supprimant de toutes les façons possibles les p premières colonnes sauf une, et les p pre-*

mières lignes sauf une, sont tous nuls; deux cas sont à distinguer :

Ou les p déterminants K_α, *obtenus en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les p premières colonnes pour les remplacer par une colonne formée des termes constants, et dans le tableau obtenu les p premières lignes, sauf une, ne sont pas tous nuls; les équations proposées n'ont pas de solution en nombres finis.*

Ou ces p déterminants sont nuls; le système est réductible aux $(n-p)$ *dernières équations; et, si, donnant aux p premières inconnues des valeurs arbitraires, on considère ces* $(n-p)$ *équations comme équations entre les* $(n-p)$ *dernières inconnues, le déterminant* D *des coefficients de ces inconnues étant différent de zéro; il y a une solution et une seule.* (Je suppose traité le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro.)

Remarque. — Dans le cas des équations homogènes, le système admet toujours, *a priori*, la solution

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

le cas d'impossibilité ne peut donc se présenter (et, en effet, les déterminants K sont tous nuls), et il y a réduction à $(n-p)$ équations.

On conclut de là la remarque suivante, qui constitue une propriété des déterminants et montre clairement l'accord entre le théorème précédent et la discussion connue d'un système de n équations du premier degré à n inconnues :

Quand le déterminant D *est différent de zéro, et que les* p^2 *déterminants mineurs* Δ_α^f *sont nuls, il arrive que le déterminant des coefficients des inconnues, et tous* *les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre* $(p-1)$ *inclusivement sont nuls.*

En effet, considérons le système d'équations homogènes obtenu en supprimant les termes constants dans les équations données; le déterminant D étant différent de zéro, et les p^2 déterminants Δ^f_α étant nuls, les équations se réduisent à $(n-p)$, et l'on peut se donner p inconnues. Or, si le déterminant des coefficients des inconnues, et tous les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre $(p-1)$ inclusivement n'étaient pas nuls, supposons que le premier différent de zéro fût d'ordre $p' < p$; les p'^2 déterminants $\Delta^f_{\alpha'}$ étant nuls, le système se réduirait à $(n-p')$ équations, et l'on ne pourrait se donner que p' des inconnues.

Le théorème qui vient d'être démontré donne la discussion complète d'un système de n équations du premier degré à n inconnues :

1° Le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro : une solution, une seule.

2° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul; un des déterminants mineurs du premier ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant la première ligne et la première colonne; deux cas :

Ou le déterminant K_1 n'est pas nul : impossibilité;

Ou le déterminant K_1 est nul : les n équations se réduisent aux $(n-1)$ dernières; on peut se donner x_1 arbitrairement, et alors on a, pour les $(n-1)$ autres inconnues, un système unique de valeurs.

3° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul, et aussi tous les déterminants mineurs du premier ordre; un des déterminants mineurs du second ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes; deux cas :

Ou les déterminants K'_1, K'_2 ne sont pas nuls tous deux : impossibilité ;

Ou ces deux déterminants sont nuls : les n équations se réduisent aux $(n-2)$ dernières; on peut se donner x_1 et x_2 arbitrairement, et alors on a, pour les $(n-2)$ autres inconnues, un système unique de valeurs. Etc., etc.

DE QUELQUES NOUVELLES FORMULES DE SOMMATION;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Considérons la série de x quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_p,\ldots,\ u_x,$$

et formons une table de multiplication en écrivant successivement les uns au-dessous des autres les produits des termes de la série par ceux de la série

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ldots,\ v_p,\ldots,\ v_x;$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries que nous désignerons par U_x et V_x, ainsi qu'on le voit en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

D'autre part, en prenant seulement les p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{\text{ième}}$ ligne et les $p-1$ premiers de la $p^{\text{ième}}$ colonne, on a, pour expression de leur somme,

$$u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p,$$

et, par suite, en faisant la somme de ces expressions de $p=1$ à $p=x$, on a la formule

$$(1)\qquad U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x} (u_p V_p + v_p U_p) + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0.$$

En supposant, par exemple,

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)}, \quad v_p = a^p,$$

on en déduit

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{a^p}{p(p+1)} [1 + (a-1)p^2] = \frac{x}{x+1} a^{x+1},$$

et, en effectuant le quotient de $1 + (a-1)p^2$ par $p(p+1)$, on a aussi

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{1-(a-1)^p}{p(p+1)} a^p = a - \frac{a^{x+1}}{x+1}.$$

En particulier, pour $a = 2$ et $2a = 1$, on a les formules

$$\frac{1}{2.3} 2 + \frac{2}{3.4} 2^2 + \frac{3}{4.5} 2^3 + \ldots + \frac{p}{(p+1)(p+2)} 2^p = \frac{2^{p+1}}{p+2} - 1,$$

$$\frac{3}{1.2} \frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} \frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4} \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{p+2}{p(p+1)} \frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{(p+1)2^p}.$$

2. Considérons une troisième série de quantités

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_p, \ldots, w_x,$$

et plaçons les unes au-dessus des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table successivement par tous les termes de la troisième série. Nous formerons ainsi un cube, sorte de Table de multiplication à trois entrées, et le compartiment ayant pour coordonnées p, q, r contiendra le produit $u_p v_q w_r$.

Cela posé, considérons successivement les cubes ayant, à partir de l'origine 1, 2, 3,..., p unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au $(p-1)^{ième}$ cube pour obtenir le $p^{ième}$. Elle a pour expression

$$(u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p)(W_p - w_p) + w_p U_p V_p,$$

et, puisque la somme des termes de toute la table est égale au produit des sommes des trois séries, on a

$$(2)\left\{\begin{aligned} &U_x V_x W_x - \sum_{p=1}^{p=x} u_p V_p W_p - \sum_{p=1}^{p=x} v_p W_p U_p - \sum_{p=1}^{p=x} w_p U_p V_p \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p W_p + \sum_{p=1}^{p=x} v_p w_p U_p + \sum_{p=1}^{p=x} w_p u_p V_p \\ &\qquad - \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p w_p = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où les trois séries sont identiques, on a

$$U_x^3 - 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^2 + 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p^3 = 0.$$

On a, de même, par une voie analogue, la formule générale

$$(3)\quad U_x^n - n_1 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^{n-1} + n_2 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sum_{p=1}^{p=x} u_p^n = 0,$$

dans laquelle n_1, n_2, n_3, ... représentent les coefficients de la puissance n du binôme.

Si l'on fait, dans cette formule, $u_p = 1$, on obtient, en désignant par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres,

$$x^n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - \ldots \pm S_0.$$

3. Considérons les trois développements de

$$(x+1)^m, \quad (x+1)^m + (x-1)^m, \quad (x+1)^m - (x-1)^m,$$

remplaçons-y successivement x par 1, 2, 3,..., x, et ajoutons dans chaque cas les x égalités obtenues, nous trouvons les formules

$$(4)\left\{\begin{aligned} (x+1)^m-1 &= m_1 S_{m-1} + m_2 S_{m-2} + \ldots + m_1 S_1 + S_0,\\ (x+1)^m - x^m - 1 &= 2(m_2 S_{m-2} + m_4 S_{m-4} + \ldots),\\ (x+1)^m + x^m - 1 &= 2(m_1 S_{m-1} + m_3 S_{m-3} + \ldots),\end{aligned}\right.$$

qui permettent de calculer S_m lorsque l'on connaît S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, ...

La première de ces formules nous montre, à l'aide des valeurs de S_0 et de S_1, que S_m est toujours divisible par le produit $x(x+1)$. En retranchant $2x$ du premier membre de la seconde des formules (4), et $2S_0$ du second membre, on voit que le premier membre

$$f(x) = (x+1)^{2i} - x^{2i} - 2x - 1$$

s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$, si m est pair et égal à $2i$; donc S_{2i} est divisible par S_2. De même, en faisant passer dans le premier membre de la même formule le terme en S_1, dans le cas de m impair et égal à $2i+1$, on obtient

$$\varphi(x) = (x+1)^{2i+1} - x^{2i+1} - (2i+1)x(x+1) - 1,$$

et, puisque la dérivée de cette expression s'annule aussi pour $x = 0$ et $x = -1$, on en conclut que S_{2i+1} est divisible par S_1^2 ou S_3. On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés ou des cubes des m premiers nombres, suivant que m est pair ou impair* (*).

(*) Ce théorème, que nous complèterons plus loin, se trouve énoncé par M. Prouhet dans la Note VI du *Cours d'Analyse* de Sturm, t. II, p. 375. *Voir* aussi le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, t. I, p. 352.

4. On a pour expression générale de S_m

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
(2i+1)S_{2i} &= x^{2i+1} + \frac{2i+1}{2}x^{2i} + [2i+1]_2 B_1 x^{2i-1} + \ldots \\
&\quad - (-1)^r [2i+1]_{2r} B_r x^{2i-2r+1} - \ldots \\
&\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i x, \\
(2i+2)S_{2i+1} &= x^{2i+2} + \frac{2i+2}{2}x^{2i+1} + [2i+2]_2 B_1 x^{2i} + \ldots \\
&\quad - (-1)^r [2i+2]_{2r} B_r x^{2i-2r+2} - \ldots \\
&\quad - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i x^2,
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on a aussi

$$
\frac{dS_{2i+1}}{dx} = (2i+1)S_{2i}, \quad \frac{dS_{2i}}{dx} = 2i\,S_{2i-1} - (-1)^i B_i.
$$

Les facteurs numériques B_r sont connus sous le nom de *nombres de Bernoulli*. Au lieu de les déterminer, ainsi qu'on le fait habituellement, à l'aide des développements en séries, on peut opérer comme il suit. En remarquant que $S_m = 1$ pour $x = 1$ et que S_{2i} s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient les trois formules suivante :

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
i - \tfrac{1}{2} &= [2i+1]_2 B_1 - [2i+1]_4 B_2 + \ldots - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i, \\
i &= [2i+2]_2 B_1 - [2i+2]_4 B_2 + \ldots - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i, \\
2i &= [2i+1]_2 2^2 B_1 - [2i+1]_4 2^4 B_2 + \ldots \\
&\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} 2^{2i} B_i.
\end{aligned}
\right.
$$

La substitution de $x = 2$ dans les valeurs de S_{2i} et S_{2i+1} donne de même

$$
\begin{aligned}
\frac{2i+1}{2^{2i+1}} + \frac{2i-3}{4} &= [2i+1]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+1]_4 \frac{B_2}{2^4} + \ldots \\
&\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}}, \\
\frac{2i+2}{2^{2i+2}} + \frac{2i-2}{4} &= [2i+2]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+2]_4 \frac{B_2}{2^4} + \ldots \\
&\quad - (-1)^i [2i+2]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}}.
\end{aligned}
$$

Et d'ailleurs, toutes ces formules se démontrent aisément par induction, en faisant voir : 1° que si, pour une valeur déterminée de x, elles sont vraies pour les sommes S_m, S_{m-1}, ..., elles sont vérifiées pour S_m ; 2° que si, pour toute valeur déterminée de m, elles sont vraies pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., x de x, elles sont encore vérifiées pour cette dernière valeur de x augmentée de l'unité.

5. En posant, dans la formule (1),

$$u_p = p^m, \quad v_p = p^n,$$

nous obtenons la formule suivante, dans laquelle il est important de tenir compte de la parité ou de l'imparité de m et de n,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} S_m S_n = \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) S_{m+n+1} + \frac{m+n}{2} B_1 S_{m+n-1} \\ - \frac{m_3 + n_3}{4} B_2 S_{m+n-3} + \frac{m_5 + n_5}{6} B_4 S_{m+n-5} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et, pour $m = n$,

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{2} S_m^2 = S_{2m+1} + [m+1]_2 B_1 S_{2m-1} \\ - [m+1]_4 B_2 S_{2m-3} + [m+1]_6 B_3 S_{2m-5} + \ldots, \end{aligned}$$

qui donne, comme cas particuliers (*),

$$S_1^2 = S_3,$$
$$S_2^2 = \tfrac{2}{3} S_5 + \tfrac{1}{3} S_3,$$
$$S_3^2 = \tfrac{1}{2} S_7 + \tfrac{1}{2} S_5,$$
$$S_4^2 = \tfrac{2}{5} S_9 + \tfrac{2}{3} S_7 - \tfrac{1}{15} S_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 49.

et inversement

$$
\begin{aligned}
2S_3 &= 2S_1^2,\\
2S_5 &= 3S_2^2 - S_1^2,\\
2S_7 &= 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2,\\
2S_9 &= 5S_4^2 - \tfrac{20}{3}S_3^2 + \tfrac{11}{2}S_2^2 - \tfrac{11}{6}S_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et il serait facile de trouver la loi générale des coefficients.

L'équation (7) fait voir : 1° en supposant m et n de même parité, que S_{2i+1} est algébriquement divisible par S_1^2, et que le quotient est une fonction entière de S_1 ; 2° en supposant m et n de parité différente, que S_{2i} est algébriquement divisible par S_2, et que le quotient est encore une fonction entière de S_1. Ces propriétés permettent de calculer facilement les sommes S. En désignant par q_{2i+1} et par q_{2i} les quotients de S_{2i+1} par S_1^2, et de S_{2i} par S_2, et faisant successivement $n = 1$ et $n = 2$ dans cette formule, nous obtenons, en posant $y = 2S_1 = x(x+1)$,

$$
\begin{aligned}
(i+1)y\,q_{2i+1} = (i+2)q_{2i+3} &+ [2i+2]_2 B_1 q_{2i+1}\\
&- [2i+2]_4 B_2 q_{2i-1} + \ldots - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{i+1}{2} y^2 q_{2i+1} = \frac{2i+5}{3} q_{2i+4} &+ [2i+2]_2 B_1 q_{2i+2}\\
&- [2i+2]_4 B_2 q_{2i} + \ldots - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i.
\end{aligned}
$$

Ces deux formules donnent successivement, pour $i = 1$, 2, 3, 4, ..., les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
q_3 &= 1,\\
q_5 &= \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3},\\
q_7 &= \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3},\\
q_9 &= \tfrac{2}{5}y^3 - \tfrac{3}{3}y^2 + \tfrac{6}{5}y - \tfrac{3}{5},\\
q_{11} &= \tfrac{1}{3}y^4 - \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{17}{6}y^2 - \tfrac{10}{3}y + \tfrac{5}{3},\\
q_{13} &= \tfrac{2}{7}y^5 - \tfrac{5}{3}y^4 + \tfrac{82}{15}y^3 - \tfrac{236}{21}y^2 + \tfrac{1382}{105}y - \tfrac{691}{105},\\
q_{15} &= \tfrac{1}{4}y^6 - \tfrac{6}{3}y^5 + \tfrac{28}{3}y^4 - \tfrac{88}{3}y^3 + \tfrac{359}{5}y^2 - 70y + 35,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
3q_2 &= 3,\\
5q_4 &= 3y - 1,\\
7q_6 &= 3y^2 - 3y + 1,\\
9q_8 &= 3y^3 - 6y^2 + \tfrac{27}{5}y - \tfrac{9}{5},\\
11q_{10} &= 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5,\\
13q_{12} &= 3y^5 - 15y^4 + 41y^3 - \tfrac{472}{7}y^2 + \tfrac{2073}{35}y - \tfrac{691}{35},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les coefficients des diverses puissances de y sont alternativement positifs et négatifs, comme cela résulte de la loi de sommation. On peut trouver aussi la loi des coefficients, en remarquant que pour $y = 2$ on a $q = 1$. On observera que q_{10} est divisible par $y - 1$.

A l'aide des formules (2) et (3), on peut encore exprimer $S_m S_n S_p$ et S_m^3 en fonction linéaire des sommes S, et généraliser ces résultats. On retrouverait ainsi, comme cas particuliers, les formules

$$
\begin{aligned}
4S_1^3 &= 3S_5 + S_3,\\
12S_2^3 &= 16S_6 - 5S_4 + S_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

qui seraient les deux premières d'une série de formules analogues qui ont été indiquées par M. Éd. Amigues (*).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874;

PAR M. MORET-BLANC.

Mathématiques spéciales. (Paris.)

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier F(x), *satisfaisant aux relations*

$$
\mathrm{F}(1 - x) = \mathrm{F}(x),
$$

$$
\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x^m},
$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. X, p. 81 et 117.

est

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q$$
$$\times [A_0(x^2 - x + 1)^{3n} + A_1(x^2 - x + 1)^{3(n-1)}(x^2 - x)^2$$
$$+ A_2(x^2 - x + 1)^{3(n-2)}(x^2 - x)^4 + \ldots + A_n(x^2 - x)^{3n}],$$

p, q, n étant des nombres entiers, et $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes quelconques.

En vertu de la première condition, à toute racine $x = a$ de l'équation $F(x) = 0$ correspond une racine $x = 1 - a$, et deux racines conjuguées fournissent dans le polynôme $F(x)$ un facteur de la forme $x^2 - x + k$, k étant un nombre entier ou fractionnaire. $F(x)$ est donc un produit de facteurs de cette forme multiplié par une constante arbitraire dont nous pouvons faire abstraction, puisqu'elle n'est pas altérée dans les transformations.

Pour satisfaire à la seconde condition, il faut qu'en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'expression $x^2 - x + k$, on retrouve cette expression même, ou tout au moins une expression de même forme, divisée par une puissance de x.

Posons

$$\varphi(x) = x^2 - x + k,$$

on aura

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - x + kx^2}{x^2} = \frac{x - x^2 + kx^3}{x^3}.$$

Le numérateur n'aura la forme de $\varphi(x)$ que si l'on fait $k = 1$ ou $k = 0$.

Dans le premier cas,

$$\varphi(x) = x^2 - x + 1,$$
$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2};$$

dans le second,

$$\varphi(x) = x^2 - x,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x - x^2}{x^3} = \frac{-\varphi(x)}{x^3};$$

$x^2 - x$ ne devra donc entrer dans le polynôme qu'à des puissances de degré pair.

Il résulte de ce qui précède que $F(x)$ doit être une fonction entière de $(x^2 - x)$ et de $(x^2 - x + 1)$.

Soient $2p$ et q les plus petits exposants de $(x^2 - x)$ et $(x^2 - x + 1)$ respectivement; on aura

$$F(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \times P,$$

P étant un polynôme entier en $(x^2 - x)^2$ et $(x^2 - x + 1)$, qui renferme nécessairement un terme indépendant de $(x^2 - x)^2$, et un terme indépendant de $x^2 - x + 1$, et tel qu'en y changeant x en $\frac{1}{x}$ chaque terme se trouve divisé par une même puissance de x.

Soit

$$A_s(x^2 - x)^{2s}(x^{2s} - x + 1)^r$$

le terme général. En y changeant x en $\frac{1}{x}$, il devient

$$\frac{A_s(x^2 - x)^{2s}(x^2 - x + 1)^r}{x^{6s+2r}}.$$

Il faut donc que $6s + 2r$ ait une valeur constante.

Soit

$$6s + 2r = 2t,$$

ou

$$3s + r = t.$$

Comme il y a un terme où $r = 0$, il faut que t soit un multiple de 3; soit $t = 3n$.

On pourra donner à s toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, et l'on aura

$$(x) = (x^2 - x)^{2p}(x^2 - x + 1)^q \sum_{s=0}^{s=n} A_s(x^2 - x)^{2s}(x^2 - x + 1)^{3(n-s)},$$

les coefficients A, étant arbitraires, et p, q, n étant des entiers qui satisfont à la condition

$$6p + 2q + 3n = m.$$

En développant, on a le polynôme de l'énoncé. Il satisfait aux relations données, et c'est le polynôme le plus général qui y satisfasse, puisqu'on ne lui a imposé que des conditions strictement nécessaires.

Mathématiques spéciales. (Départements.)

Si l'on considère la fonction e^{-x^2} de la variable x, et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnaît que la dérivée de l'ordre n est égale au produit de la fonction e^{-x^2} par un polynôme entier en x, que l'on représentera par $\varphi_n(x)$.

1° *Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = -2x\,\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\,\varphi_{n-2}(x),\\
&\varphi'_n(x) = -2n\,\varphi_{n-1}(x),\\
&\varphi''_n(x) = -2x\,\varphi'_n(x) + 2n\,\varphi_n(x) = 0,
\end{aligned}$$

$\varphi'_n(x)$ désignant la dérivée première du polynôme $\varphi_n(x)$, et $\varphi''_n(x)$ la dérivée seconde.

2° *Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$, ordonné suivant les puissances de la variable x.*

On a

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = -2x,\\
&\varphi_2(x) = -2 + 4x^2,\\
&\varphi_3(x) = 12x - 8x^3,\\
&\varphi_4(x) = 12 - 48x^2 + 16x^4,
\end{aligned}$$

et l'on vérifie sans difficulté que ces valeurs satisfont aux relations données. Il suffit donc de démontrer que, si ces relations sont vérifiées jusqu'à une valeur n, elles le seront encore pour la valeur $n+1$.

Or on a, d'après la loi de formation du polynôme $\varphi(x)$,

$$\varphi_{n+1}(x) = -2x\,\varphi_n(x) + \varphi'_n(x) = -2x\,\varphi_n(x) - 2n\,\varphi_{n-1}(x),$$

puis

$$\varphi'_{n+1}(x) = -2x\,\varphi'_n(x) - 2\varphi_n(x) - 2n\,\varphi'_{n-1}(x);$$

or

$$-2n\,\varphi'_{n-1}(x) = 4n(n-1)\,\varphi_{n-2}(x),$$

$$-2x\,\varphi'_n(x) = 4nx\,\varphi_{n-1}(x);$$

donc

$$-2x\,\varphi'_n(x) - 2n\,\varphi'_{n-1}(x) = -2n\,\varphi_n(x),$$

et

$$\varphi'_{n+1}(x) = -2(n+1)\,\varphi_n(x),$$

$$\varphi''_{n+1}(x) = -2(n+1)\,\varphi'_n(x) = 4n(n+1)\,\varphi_{n-1}(x):$$

or

$$2n\,\varphi_{n-1}(x) = -\varphi_{n+1}(x) - 2x\,\varphi_n(x),$$

donc

$$\varphi''_{n+1}(x) = 2x\,\varphi'_{n+1}(x) - 2(n+1)\,\varphi_{n+1}(x).$$

Les valeurs de $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi'_{n+1}(x)$, $\varphi''_{n+1}(x)$ se déduisent de celles de $\varphi_n(x)$, $\varphi'_n(x)$, $\varphi''_n(x)$, en changeant n en $n+1$; donc les formules données sont générales.

2° On a, par la formule de Maclaurin,

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \frac{\varphi'_n(0)}{1}x + \frac{\varphi''_n(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\varphi_n^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n.$$

D'après la relation $\varphi'_n(x) = -2n\,\varphi_{n-1}(x)$, on aura

$$\varphi_n^{(p)}(x) = -2n\,\varphi_{n-1}^{(p-1)}(x)$$

et, par suite,

$$\varphi_n^{(p)}(0) = -2n\,\varphi_{n-1}^{(p-1)}(0).$$

Pour n pair, les dérivées d'ordre impair renfermeront le facteur $\varphi_1(0) = 0$, et il en sera de même des dérivées d'ordre pair pour n impair; le polynôme $\varphi_n(x)$ ne renfermera que des termes dont le degré sera de même parité que n.

On voit, par la relation ci-dessus, que, pour $x = 0$, une dérivée se déduit de la précédente en diminuant n d'une unité et multipliant par $-2n$. Cela posé, on aura

$$\varphi_n(0) = 1.3.5\ldots(n-1)(-2)^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi'_n(0) = 1.3.5\ldots(n-2)\,n\,(-2)^{\frac{n+2}{2}},$$

$$\varphi''_n(0) = 1.3.5\ldots(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\varphi'''_n(0) = 1.3.5\ldots(n-2)(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+3}{2}},$$

$$\varphi^{\text{IV}}_n(0) = 1.3.5\ldots(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(-2)^{\frac{n+4}{2}},$$

. . . . ,

$$\varphi^{(p)}_n(0) = 1.3.5\ldots(n-p+1)(n-p+2)\ldots n(-2)^{\frac{n+p}{2}},$$

n et p devant toujours être de même parité.

On aura donc

$$\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1.3.5\ldots(n-p+1)(n-p+2)\ldots n}{1.2.3\ldots p}(-2)^{\frac{n+p}{2}} x^p,$$

en donnant à p toutes les valeurs paires ou impaires, de zéro à n, suivant que n est lui-même pair ou impair.

Pour $p = 0$, le dénominateur est 1, et le numérateur s'arrête au facteur $n - 1$

Mathématiques élémentaires.

Étant données les quatre arêtes AB, DA, BC, CD *d'un tétraèdre, déterminer le tétraèdre de manière que* *son volume soit maximum. Le tétraèdre ainsi déterminé, calculer les deux autres arêtes* BD *et* AC *et le volume dans les deux cas suivants :*

1° *Lorsque les arêtes opposées* AB *et* CD *sont égales, ainsi que les deux arêtes* BC *et* AD ;

2° *Lorsque les deux arêtes consécutives* AB *et* BC *sont égales, ainsi que les deux arêtes* CD *et* DA.

Comparer les volumes en supposant que les deux arêtes AB *et* AD *ont respectivement des longueurs égales dans les deux cas.*

Le volume est évidemment susceptible d'un maximum, car il ne peut surpasser le sixième du produit des trois plus petites arêtes données. Il n'a pas atteint sa valeur maximum si l'un des dièdres AC, BD est aigu ou obtus; car, en prenant l'une des faces de ce dièdre pour base, on augmenterait la hauteur, et, par suite, le volume du tétraèdre, en rendant ce dièdre droit. Les deux dièdres AC, BD du tétraèdre maximum doivent donc être droits.

Ces deux conditions jointes aux quatre données forment six conditions qui déterminent le tétraèdre.

1° Soient $AB = CD = a$ et $BC = AD = b$.

Il est évident, d'après les données, que tout ce qu'on pourra dire de l'arête AC, dans le cas du maximum, s'appliquera aussi à l'arête BD, et réciproquement; donc ces deux arêtes doivent être égales. Appelons x leur longueur commune, et V_1 le volume du tétraèdre maximum.

Soient BE et DG perpendiculaires sur AC, on aura, par un théorème connu,

$$AG = EC = \frac{x^2 + b^2 - a^2}{2x},$$

puis

$$\overline{GE}^2 = (x - 2EC)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{x^2},$$

$$\overline{BE}^2 = \overline{DG}^2 = b^2 - \overline{EC}^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 - (a^2 - b^2)^2}{4x^2},$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{GE}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{BE}^2 + \overline{EG}^2,$$

ou

$$x^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 + (a^2 - b^2)^2}{2x^2},$$

et, en chassant le dénominateur,

$$3x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3};$$

car on ne peut prendre pour x^2 que la valeur positive.

On a ensuite

$$V_1 = \frac{1}{6}x\overline{BE}^2 = \frac{2(a^2 + b^2)x^2 - x^4 - (a^2 - b^2)^2}{24x} = \frac{x^4 - (a^2 - b^2)^2}{12x},$$

et, en remplaçant x par sa valeur,

$$V_1 = \frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4 + (a^2 + b^2)\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{27\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}}}.$$

2° Soient $AB = BC = a$, $CD = DA = b$.

Posons $AC = x$, $BD = y$, et soit I le milieu de AC :

$$BI = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}, \quad DI = \sqrt{b^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Soit V_2 le volume du tétraèdre maximum :

$$V = \frac{1}{6}x\,BI.DI = \frac{1}{6}x\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}\sqrt{b^2 - \frac{x^2}{4}},$$

d'où

$$9V^2 = \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)\left(b^2 - \frac{x^2}{4}\right);$$

V sera maximum en même temps que $9V^2$.

Multipliant les deux derniers facteurs respectivement par α et β, et déterminant α, β et x de manière à rendre la somme des facteurs constante et les facteurs égaux, ce qui rend leur produit maximum, on a les trois équations

$$\alpha + \beta = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} = \alpha\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right) = \beta\left(b^2 - \frac{x^2}{4}\right),$$

d'où, en éliminant α, β,

$$3x^4 - 8(a^2 + b^2)x^2 + 16a^2b^2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{4(a^2 + b^2) \pm 4\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}.$$

La première valeur est inadmissible, car elle donnerait

$$x^2 > 4b^2 \quad \text{ou} \quad x > 2b, \quad \text{si} \quad a > b,$$

et

$$x^2 > 4a^2 \quad \text{ou} \quad x > 2a, \quad \text{si} \quad b > a.$$

Le volume maximum sera donc donné par

$$\overline{AC}^2 = x^2 = \frac{4(a^2 + b^2) - 4\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3},$$

$$\overline{BD}^2 = y^2 = a^2 + b^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{3}.$$

On a alors

$$V_2^2 = \frac{-2a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2b^6 + 2(a^4 - a^2b^2 + b^4)\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{243}.$$

En faisant le carré de V_1, on trouve, en réduisant V_1^2

et V_2^2 au même dénominateur, que les deux valeurs sont identiques. Le volume maximum est donc le même dans les deux cas.

Philosophie.

Étant donnés un cercle de rayon R *et deux rayons rectangulaires* OA *et* OB, *déterminer les côtés* OC *et* OE *d'un rectangle* OCDE, *inscrit dans le quart de cercle* AO, *et tel que, si l'on fait tourner la figure autour du rayon* OA, *la surface totale du cylindre engendré soit égale à la surface d'une circonférence de rayon donné a.*

Soient x et y les côtés du rectangle respectivement situés sur OA et OB. On a les deux conditions

$$2\pi(y^2 + xy) = \pi a^2$$

ou

$$(1) \qquad 2y^2 + 2xy = a^2,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Substituant dans la seconde équation la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2y^2}{2y}$$

tirée de la première, il vient, en chassant le dénominateur,

$$8y^4 - 4(R^2 + a^2)y^2 + a^4 = 0,$$

d'où

$$y^2 = \frac{R^2 + a^2 \pm \sqrt{(R^2 + a^2)^2 - 2a^4}}{4}$$

ou

$$y^2 = \frac{R^2 + a^2 \pm \sqrt{\left[R^2 + (\sqrt{2} + 1)a^2\right]\left[R^2 - (\sqrt{2} - 1)a^2\right]}}{4}.$$

Pour que les valeurs de y^2 soient réelles, il faut qu'on ait

$$a^2 \leq \frac{R^2}{\sqrt{2}-1} = R^2(\sqrt{2}+1).$$

La valeur maximum de la surface totale du cylindre est donc

$$\pi R^2(\sqrt{2}+1).$$

Les valeurs correspondantes de y^2 et x^2 sont

$$y^2 = \frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}, \quad x^2 = \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}.$$

Pour construire géométriquement y dans le cas général, on posera

$$y^2 = az,$$

d'où

$$z^2 - \frac{R^2+a^2}{2a}z + \frac{a^2}{8} = 0.$$

On obtiendra les valeurs de z en construisant deux lignes dont la somme est $\frac{R^2+a^2}{2a}$ et le produit $\frac{a^2}{8}$.

On trouvera ensuite y par une moyenne proportionnelle entre a et z.

Rhétorique.

On donne deux sphères tangentes extérieurement et dont l'une a un rayon double de celui de l'autre. A l'ensemble de ces deux sphères on circonscrit un tronc de cône dont on demande le volume et la surface totale, connaissant le rayon de la petite sphère.

Soient O, O′ les centres des deux sphères, A, A′ les points de contact d'une génératrice, S le sommet du cône, C, C′ les centres des deux bases, CD, C′D′ leurs rayons, et r le rayon O′A′ de la petite sphère.

On a

$$OO' = SO' = 3r,$$

$$\overline{SA'}^2 = \overline{SO'}^2 - \overline{O'A'}^2 = 8r^2,$$

d'où

$$SA' = 2r\sqrt{2}.$$

Les triangles semblables $SC'D'$, $SA'O'$ donnent

$$C'D' = \frac{SC'.O'A'}{SA'} = \frac{2r^2}{2r\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2},$$

$$CD = 4C'D' = 2r\sqrt{2},$$

$$CC' = 6r,$$

$$DD' = CC'.\frac{SO'}{SA'} = \frac{9r\sqrt{2}}{2},$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi CC'\left(\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 + CD.C'D'\right) = 21\pi r^3,$$

$$S = \pi\left[\overline{CD}^2 + \overline{C'D'}^2 + (CD + C'D')DD'\right] = 31\pi r^3.$$

Seconde.

I. *Étant donné un tétraèdre, on suppose que l'on mène par chaque arête un plan parallèle à l'arête opposée, et l'on demande: 1° quel sera le solide ainsi obtenu; 2° quel sera le rapport de son volume à celui du tétraèdre.*

Soit ABCD le tétraèdre donné.

Le volume obtenu, étant limité par six plans parallèles deux à deux, est un parallélépipède, dont A, B, C, D sont quatre sommets, et les six arêtes du tétraèdre sont six diagonales des faces.

Appelons A′, B′, C′, D′ les sommets du parallélépipède respectivement opposés à A, B, C, D. On obtiendra le tétraèdre proposé en retranchant du parallélépipède les quatre tétraèdres A′BCD, B′ACD, C′ABD, D′ABC, dont chacun, ayant pour base la moitié d'une face du parallélépipède, et pour hauteur la hauteur correspondante, a pour volume le sixième du volume du parallélépipède ; le tétraèdre donné est donc le tiers du parallélépipède, et le volume de celui-ci est le triple de celui du tétraèdre.

II. *La différence de deux nombres est a, et la somme de leurs racines carrées est aussi égale à a ; quels sont ces deux nombres ?*

Soient x et y les deux nombres cherchés, on a les équations

$$(1) \qquad x - y = a,$$

$$(2) \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = a,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$(3) \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$$

Les équations (2) et (3), combinées par addition et soustraction, donnent, en divisant par 2,

$$\sqrt{x} = \frac{a+1}{2},$$

$$\sqrt{y} = \frac{a-1}{2};$$

d'où

$$x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2,$$

$$y = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2.$$

Troisième.

I. *On donne un cercle et deux points fixes* A *et* B *sur la circonférence ; par ces deux points on mène deux cordes égales de longueur quelconque ; trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.*

Soient AIB le plus grand, et AHB le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB, AC et BD deux cordes égales, et M leur point de rencontre.

Il y a deux cas à considérer, suivant que les arcs AC et BD sont comptés en sens contraires ou dans le même sens de rotation.

1° Les arcs AC et BD sont de sens contraires.

Les angles MAB, MBA sont égaux comme ayant même mesure $\frac{AHB \mp AC}{2} = \frac{AHB \mp BD}{2}$; le triangle MAB est isoscèle, et le lieu du point M se compose de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB et de la droite indéfinie AB elle-même, correspondant au cas où les deux cordes égales se confondent avec AB.

2° Les arcs AC et BD sont pris dans le même sens de rotation.

Si les cordes AC et BD sont plus petites que AB, le point M est extérieur au cercle, et l'angle AMB a pour mesure la demi-différence des arcs AIB et AHB, diminués chacun d'une même quantité (AC = BD), c'est-à-dire $\frac{AIB - AHB}{2}$, ce qui est la mesure de l'angle des tangentes en A et B.

Si les cordes AC et BD sont plus grandes que AB, le point M est intérieur au cercle, et l'angle AMB a pour mesure $\frac{2AHB}{2}$, valeur supplémentaire de la précédente.

Le lieu du point M dans le second cas est donc la circonférence circonscrite au triangle formé par la corde AB et les tangentes en A et B.

Cette dernière partie du lieu disparaît à l'infini, lorsque AB est un diamètre.

II. *Démontrer que, si la somme* $3^n + 1$, *dans laquelle*

n représente un nombre entier, est un multiple de 10, *la somme* $3^{n+4}+1$ *sera aussi un multiple de* 10.

3^n+1 étant un multiple de 10, 3^n est terminé par le chiffre 9; or $3^4=81$; donc le produit $3^n \times 3^4 = 3^{n+4}$ est terminé par 9 et $3^{n+4}+1$ est un multiple de 10.

FORMULES PROPOSÉES (*)

PAR M. DESBOVES.

Première question. — Si l'on donne à R, r, r', r'', r''' leur signification ordinaire, et que l'on désigne par x, y, z les rayons des trois cercles, qui touchent intérieurement le cercle circonscrit à un triangle et sont inscrits respectivement dans les angles A, B, C de ce triangle, on a les formules suivantes :

$$x = \frac{4Rr}{r''+r'''},\quad y = \frac{4Rr}{r'+r'''},\quad z = \frac{4Rr}{r'+r''},$$

$$4r = 2(x+y+z) - \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}\right),$$

$$\frac{1}{2R} + \frac{2}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$\frac{r'}{2Rr} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{r''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y},$$

$$\frac{r'''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

Par les trois premières formules, on calcule x, y, z,

(*) Extrait de la nouvelle édition des *Questions de Trigonométrie*, qui doit prochainement paraître.

connaissant R, r, r', r'', r''', et, par les autres, on résout la question inverse.

Seconde question. — Si l'on suppose que les trois cercles de l'énoncé précédent soient remplacés par les trois cercles analogues, tangents extérieurement au cercle circonscrit à un triangle, et que l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les rayons des nouveaux cercles, on a

$$x_1 = \frac{4Rr'}{r''+r'''}, \quad y_1 = \frac{4Rr''}{r'+r}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r'+r}, \quad x_1y_1z_1 = 16R^2r,$$

$$32R^3 - 2R(y_1z_1 + x_1z_1 + x_1y_1) - x_1y_1z_1 = 0,$$

$$4x_1y_1z_1r^3 - [(y_1z_1 + x_1z_1 + x_1y_1)r - x_1y_1z_1]^2 = 0,$$

et, si l'on pose

$$\frac{r+4R}{2Rm} = \frac{1}{x_1+4R} + \frac{1}{y_1+4R} + \frac{1}{z_1+4R},$$

on a aussi

$$r' = \frac{mx_1}{x_1+4R}, \quad r'' = \frac{my_1}{y_1+4R}, \quad r''' = \frac{mz_1}{z_1+4R}.$$

Nota. — Pour résoudre les questions précédentes, on pourra prendre pour point de départ les formul es sui vantes, faciles à démontrer :

$$x\cos^2\frac{A}{2} = y\cos^2\frac{B}{2} = z\cos^2\frac{C}{2} = r,$$

$$x_1\cos\frac{A}{2} = r', \quad y_1\cos^2\frac{B}{2} = r'', \quad z_1\cos^2\frac{C}{2} = r'''.$$

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. Trouver tous les systèmes de deux nombres entiers dont le quotient par leur somme de la somme de leurs cinquièmes puissances est un carré parfait.

Cette question, qui comprend comme cas particulier la question 1168, a, comme solutions simples,

$$(3, -1, 11),\ (8, 11, 2491),\ (123, 35, 13361),$$
$$(808, -627, 1169341), \ldots.$$

2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

3. Trouver tous les triangles rectangles ayant pour côtés des nombres entiers, et tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.

4. Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.

5. Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle augmentée des carrés construits sur les trois côtés soit égale à un carré parfait.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique, rédigé conformément aux programmes officiels; par H. Signol, professeur de Mathématiques à Paris. Un vol. in-8, de 328 pages. Prix : 4 francs.

Ce Traité est divisé en cinq Livres.

Le Livre Ier traite des quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers.

Le Livre II renferme les propriétés élémentaires des nombres.

Le Livre III comprend les fractions ordinaires, les fractions décimales et le système métrique.

Le Livre IV a pour objet les nombres irrationnels.

Le Livre V a pour titre : *Méthodes abrégées. — Erreurs absolues et relatives. — Problèmes.*

Nous croyons qu'il suffira, pour faire connaître dans quel esprit a été rédigé cet Ouvrage, d'extraire de l'Avant-Propos ce qui suit :

« Pour faciliter autant que possible l'étude de ce Traité, je me suis attaché d'abord à établir dans les matières qui le composent des divisions et subdivisions nombreuses et bien tranchées, que la typographie s'est appliquée à faire nettement ressortir. Ce sont comme autant de repères ou de lignes de démarcation qui, tout en reposant l'esprit, le dirigent et servent a fixer les notions acquises.

» J'ai placé dans un Chapitre à part les théorèmes relatifs aux quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers. Il m'a semblé que ces théorèmes, dont l'application est si fréquente dans la suite, seraient mieux saisis, ainsi groupés, que lorsqu'ils sont disséminés dans les Chapitres qui précèdent.

» J'ai consacré un Chapitre spécial à la généralisation de la théorie des fractions ordinaires. On rencontre souvent, dans les calculs, des expressions fractionnaires dont les termes ne sont pas des nombres entiers; et il est indispensable de démontrer que les règles établies pour le calcul des fractions à termes entiers sont applicables aux fractions à termes quelconques.

» La théorie des fractions égales, appelées communément *proportions*, se rattache essentiellement à celle des fractions ordinaires, et aujourd'hui l'algorithme des proportions est généralement remplacé par l'égalité des rapports. C'est pourquoi j'ai placé cette dernière théorie immédiatement après celle des fractions ordinaires. Il convient, d'ailleurs, de ne pas reléguer vers la fin de l'Arithmétique l'exposition des propriétés des rapports égaux, dont l'usage est si fréquent, notamment en Géométrie.

» Je n'ai pas hésité à employer les lettres de l'alphabet pour désigner les nombres toutes les fois que ce mode de représentation m'a paru préférable, soit pour l'exposition de la théorie, soit pour la démonstration des règles de calcul. J'estime que ce n'est pas là empiéter sur l'Algèbre, où ces symboles comportent une généralité qui n'a, pour ainsi dire, point de limites. Ici leur signification précise et parfaitement déterminée ne permet pas d'aller au delà du rôle spécial qu'on leur assigne, et ils ont l'avantage considérable de rendre l'exposition plus commode et plus rapide. »

Pour montrer comment l'auteur a entendu la division et la subdivision des matières qui composent ce Traité, nous transcrivons ici la partie de la Table des matières relative au Livre III.

Chapitre V. — *Propriétés des fractions égales (proportions)* : § I. Définitions. § II. Théorèmes.

Chapitre VI. — *Des fractions décimales. — Principes :* § I. Extension du système de numération décimale. Définitions. § II. Écriture et énoncé des nombres décimaux. § III. Des fractions décimales ayant un nombre illimité de chiffres.

Chapitre VII. — *Les quatre opérations fondamentales sur les nombres décimaux :* § I. Addition. § II. Soustraction. § III. Multiplication. § IV. Division. § V. Évaluation d'un quotient à moins d'une unité décimale.

Chapitre VIII. — *Transformation des fractions ordinaires en fractions décimales et réciproquement :* § I. Transformation des fractions ordinaires en fractions décimales. § II. Transformation des fractions décimales en fractions ordinaires. § III. Théorèmes relatifs aux transformations précédentes.

Chapitre IX. — *Système métrique :* § I. Établissement du système métrique. § II. Exposé et nomenclature du système métrique. § III. Mesures effectives. § IV. Notions sur les anciennes mesures de France. § V. Réduction des anciennes mesures en nouvelles et réciproquement. § VI. Nombres complexes.

Nous dirons maintenant que l'auteur a su allier la clarté à la concision, et que la démonstration des nombreux théorèmes répandus dans son Ouvrage se distingue par une qualité essentielle, la rigueur.

En Mathématiques, « chaque difficulté doit être prise à sa naissance et éclaircie au moment où elle se produit. Rien n'est plus dangereux que le séjour prolongé d'une idée obscure dans l'esprit; elle y laisse toujours quelque trace, après même que la vérité s'y est fait jour. Il ne faut pas dire aux élèves : *Allez en avant, la foi vous viendra* ; il ne faut avancer qu'en s'appuyant sur des précédents sans nuages (*). » Cette pensée et cette

(*) Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement ;* IIe Partie, Avant-Propos.

règle ont certainement inspiré et dirigé M. Signol dans la rédaction de son *Traité d'Arithmétique*.

QUADRILATÈRES ET SECTIONS CONIQUES (*);

PAR M. PAUL TERRIER,
Ingénieur à Paris.

Définition. — Nous appelons *axe radical d'un quadrilatère* l'axe radical commun aux circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètres.

THÉORÈME I. — *Les perpendiculaires abaissées de deux sommets opposés d'un quadrilatère complet sur les côtés non adjacents à ces sommets se coupent deux à deux en quatre points. On joint respectivement les intersections des perpendiculaires abaissées sur deux côtés aux intersections des deux autres côtés. On détermine ainsi quatre droites qui concourent sur l'axe radical du quadrilatère.*

THÉORÈME II. — *Si, de deux sommets opposés d'un quadrilatère complet, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés respectivement non adjacents à ces sommets, les quatre pieds, joints deux à deux de toutes les manières, donnent lieu à trois intersections situées l'une sur l'axe radical du quadrilatère donné, les deux autres sur chacune des deux diagonales qui ne passent pas par les deux sommets considérés.*

Chaque couple de sommets opposés donnant lieu à trois intersections, on obtient, par la considération suc-

(*) Les propriétés ci-après peuvent être étendues et généralisées par l'application des méthodes de transformation des figures.

cessive des trois couples, neuf points d'intersection ou *concours*, dont trois sur l'axe radical et deux sur chaque diagonale. Ces neuf *concours*, diversement groupés, donnent les résultats ci-après :

THÉORÈME III. — *Les deux* concours *fournis par deux diagonales du quadrilatère complet sur la troisième diagonale forment avec les extrémités de celle-ci un système harmonique.*

THÉORÈME IV. — *Les deux* concours *fournis par deux diagonales du quadrilatère sur la troisième, les deux extrémités de celle-ci et ses intersections avec les deux premières forment trois couples de points en involution.*

THÉORÈME V. — *Les perpendiculaires abaissées des deux extrémités d'une diagonale sur les côtés non concourants à ces extrémités se coupent deux à deux en quatre points. Ces quatre points, pris deux à deux, donnent six droites dont quatre passent par les extrémités de la diagonale considérée. Les deux autres passent par les* concours *que la même diagonale fournit sur chacune des deux autres.*

THÉORÈME VI. — *Les deux* concours *que deux diagonales d'un quadrilatère fournissent réciproquement l'une sur l'autre, et le* concours *que la troisième diagonale fournit sur l'axe radical du quadrilatère sont trois points situés sur un même* alignement *perpendiculaire à cette troisième diagonale.*

THÉORÈME VII. — *Les trois* alignements *que les diagonales d'un quadrilatère fournissent réciproquement les unes sur les autres, et ces trois diagonales elles-mêmes sont respectivement les côtés de deux triangles semblables et homologiques.*

Théorème VIII. — *Les six côtés de ces deux triangles se coupent deux à deux en quinze points. Six de ces points sont les sommets mêmes des deux triangles, six autres sont sur une conique, les trois derniers sont sur une droite.*

Théorème IX. — *Le centre d'homologie du triangle des* alignements *et du triangle diagonal est situé sur la circonférence circonscrite à ce dernier triangle.*

L'axe radical du quadrilatère est un diamètre de cette circonférence.

Théorème X. — *Si, du milieu d'un des côtés d'un quadrilatère, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, et réciproquement :*

1° *Les deux perpendiculaires se coupent sur l'axe du quadrilatère;*

2° *Le point d'intersection divise en deux parties égales le segment de cet axe limité aux points de rencontre des hauteurs des deux triangles formés par les deux côtés que l'on considère, successivement combinés avec chacun des deux autres côtés du quadrilatère.*

Théorème XI. — *Les deux quadrilatères formés, le premier par les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, le second par les perpendiculaires abaissées du milieu de chaque côté sur son opposé sont égaux et symétriques par rapport au centre des moyennes distances du quadrilatère donné.*

Théorème XII. — *Si l'on désigne par* α, β, γ *les trois* concours *respectivement fournis sur l'axe radical du quadrilatère par les trois diagonales, et par* m, n, p, q *les points de rencontre, sur le même axe radical, des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés trois* *à trois du quadrilatère, on a les trois relations*

$$\frac{\alpha m}{\alpha q}=\frac{\alpha n}{\alpha p},\quad \frac{\beta m}{\beta p}=\frac{\beta n}{\beta q},\quad \frac{\gamma m}{\gamma p}=\frac{\gamma q}{\gamma n};$$

d'où il suit que les perpendiculaires élevées sur l'axe radical ou ligne des hauteurs du quadrilatère donné par les points de concours α, β, γ *sont respectivement les axes radicaux des couples de circonférences qui ont pour diamètres* (mp, nq), (m, p, n, q), (mn, pq).

Les relations ci-dessus conduisent à quatre autres de la forme suivante :

$$\frac{nm \times np \times nq}{pn \times mq \times qp}=\frac{n\alpha \times n\beta \times n\gamma}{p\alpha \times m\beta \times q\gamma}.$$

THÉORÈME XIII. — *Le rapport harmonique déterminé par les* concours *sur la diagonale extérieure du quadrilatère est égal au rapport des diamètres des deux circonférences* nm, pq, *dont la corde commune passe au point de concours* γ *fourni par la diagonale extérieure sur l'axe radical.*

Le rapport harmonique sur l'une des diagonales intérieures est égal au rapport des diamètres des deux circonférences mq, np *dont la corde commune passe au point de concours* β *fourni par l'autre diagonale intérieure sur l'axe radical.*

Définition. — Nous appelons *centre perspectif* d'un quadrilatère inscrit le point symétrique du centre de la circonférence circonscrite par rapport au centre des moyennes distances du quadrilatère.

THÉORÈME XIV. — *Si, de chacun des sommets du quadrilatère inscrit au cercle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés non adjacents, et si l'on joint les couples des perpendiculaires issues de chaque sommet ;*

1° *Les quatre droites de jonction concourent sur l'axe radical du quadrilatère, en un point qui est le centre perspectif;*

2° *Ces quatres droites sont égales.*

La première partie de ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Les tangentes aux sommets des quatre paraboles qui ont respectivement pour foyers les quatre sommets d'un quadrilatère inscrit au cercle, et pour tangentes les côtés des triangles formés par les trois autres sommets, concourent au centre perspectif du quadrilatère.

Théorème XV. — *Dans un quadrilatère inscrit au cercle :*

1° *Les deux* concours *fournis par les diagonales intérieures sur l'axe radical se confondent en un seul point, qui est le centre perspectif, et le troisième* concours, *fourni sur l'axe radical par la diagonale extérieure, passe à l'infini.*

2° *Les* concours *fournis par chacune des diagonales intérieures sur l'autre sont à l'infini, et les* concours *fournis par la diagonale extérieure sur chacune des deux intérieures sont respectivement aux points milieux de celles-ci.*

3° *Les perpendiculaires abaissées du milieu de chaque diagonale intérieure sur l'autre se coupent au centre perspectif.*

4° *Des trois* alignements *fournis par les neuf* concours *trois à trois, deux se coupent au centre perspectif, le troisième passant à l'infini.*

Théorème XVI. — *On a vu* (théorème VIII) *que l'axe radical de tout quadrilatère est un diamètre du cercle diagonal. Dans le cas du quadrilatère inscrit, les extrémités de ce diamètre sont, d'une part, l'intersec-*

tion des diagonales intérieures, d'autre part, le centre d'homologie du triangle diagonal et du triangle formé par les trois alignements *des points de concours.*

Ce dernier triangle, dans l'espèce, a un sommet au centre perspectif déterminé par deux côtés, respectivement perpendiculaires aux diagonales intérieures, et le troisième côté à l'infini.

Théorème XVII. — *Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés trois à trois d'un quadrilatère* inscriptible *sont symétriquement placés, sur l'axe radical, par rapport au centre perspectif.*

Théorème XVIII. — *Les six perpendiculaires réciproquement abaissées des milieux des côtés d'un quadrilatère inscrit sur leurs opposés et du milieu de chaque diagonale sur l'autre concourent au centre perspectif du quadrilatère.*

Définitions. — On appelle *droite de Simson* la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence circonscrite sur les trois côtés du triangle inscrit.

Nous appelons, par extension, *droites de Simson* d'un quadrilatère inscrit, les quatre droites de Simson fournies par chaque sommet et par le triangle des trois autres.

Nous appelons *hauteurs du quadrilatère* les quatre perpendiculaires abaissées du milieu de chaque côté sur son opposé.

Nous pouvons, dès lors, confondre dans l'énoncé suivant les deux propriétés précédentes :

Les quatre droites de Simson *et les quatre* hauteurs *d'un quadrilatère inscrit concourent au centre perspectif.*

Théorème XIX. — *Le centre perspectif d'un quadrilatère inscrit est un point tel que, si on le joint par des droites aux milieux des côtés et des diagonales, les angles formés par deux quelconques de ces droites, et par les côtés ou diagonales qui leur correspondent, sont égaux ou supplémentaires.*

Corollaires. — 1° Le centre perspectif d'un quadrilatère inscrit est le centre de l'hyperbole qui passe par les quatre sommets.

2° Les centres d'un cercle et d'une hyperbole équilatère, qui ont quatre points communs, sont symétriquement placés par rapport au centre des moyennes distances de ces quatre points.

Théorème XX. — *Les quatre* droites de Simson *d'un quadrilatère inscrit se coupent deux à deux au centre perspectif sous quatre angles ayant pour mesure les demi-différences des arcs sous-tendus par les cordes (côtés ou diagonales) qui joignent les sommets correspondants.*

Définition. — On appelle *quadrilatère des hauteurs* A_1 d'un quadrilatère inscrit donné A le quadrilatère qui a ses sommets aux points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par deux côtés et une diagonale de A.

On sait que ces deux quadrilatères sont égaux et symétriques.

Théorème XXI. — *Le centre de symétrie d'un quadrilatère* A *et de son quadrilatère des hauteurs* A_1 *est le centre perspectif commun à* A *et à* A_1.

Corollaires. — 1° Les droites de Simson, les hauteurs et les axes radicaux des deux quadrilatères se confondent deux à deux, quant à la direction.

2° Le centre perspectif est le centre d'*inscription* et le centre d'*homothétie* directe ou inverse de trois couples de quadrilatères semblables au proposé, savoir :

Le quadrilatère ayant pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets de A sur les diagonales, et le quadrilatère symétrique fourni par A_1.

Les deux quadrilatères ayant pour sommets les pieds quatre à quatre des huit perpendiculaires abaissées des sommets de A sur les côtés non concourants et les deux quadrilatères symétriques fournis par A_1.

Chacun de ces trois couples de quadrilatères a ses huit sommets distribués sur une circonférence ayant pour centre le centre perspectif du quadrilatère donné.

Théorème XXII. — *Quand un quadrilatère* A_1, *circonscrit à un cercle, a pour points de contact consécutifs les sommets consécutifs d'un quadrilatère inscrit* A; *quand un autre quadrilatère* A_2 *a pour côtés consécutifs les quatre droites qui déterminent, deux à deux, les deux points de concours fournis par les diagonales intérieures de* A *sur la diagonale extérieure :*

1° *Les quadrilatères* A_1, A_2 *sont en homothétie directe, et le centre d'homothétie est au point d'intersection de la diagonale extérieure commune et de la droite qui contient le centre d'inscription, le centre des moyennes distances et le centre perspectif de* A.

2° *Le centre perspectif est le centre de la circonférence inscrite dans* A_2.

3° *Le centre d'homothétie est le point central d'une involution formée par les trois couples de sommets extérieurs de* A_1 *et de* A_2.

4° *Les perpendiculaires abaissées du centre perspectif de* A *sur les côtés du même quadrilatère passent respectivement par les sommets de* A_2.

THÉORÈME XXIII. — *Si les diagonales intérieures du quadrilatère inscrit* A *se coupent à angle droit, toutes les autres conditions étant conformes au précédent énoncé :*

1° *Le centre perspectif et le point d'intersection des diagonales de* A *se confondent ;*

2° *Le rayon d'homothétie qui joint le centre d'inscription* O *et le centre perspectif* α *de* A *est perpendiculaire sur la direction commune aux diagonales extérieures des trois quadrilatères, et contient le point d'intersection* β *des diagonales de* A_2.

3° *Les quadrilatères* A_2, A_1, *circonscrits à deux cercles qui ont respectivement pour centres le centre perspectif et le point* O, *centre d'inscription de* A, *sont, de plus, inscrits dans deux autres cercles dont les centres sont respectivement, pour le premier au même point* O, *pour le second en un point* O_1 *situé sur le rayon d'homothétie* $O\alpha$.

4° *Les distances des points alignés* O, O_1, α *et* β *au centre d'homothétie* T *des deux systèmes sont liées par la relation*

$$\frac{T\alpha}{TO} = \sqrt[3]{\frac{T\beta}{TO_1}}.$$

5° *Les droites menées par le centre du cercle circonscrit au quadrilatère* A, *parallèlement à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, passent réciproquement par les points de concours de ces côtés.*

THÉORÈME XXIV. — *Dans le quadrilatère inscrit* A *à diagonales rectangulaires, les milieux des quatre côtés et les pieds des quatre hauteurs sont huit points situés sur une même circonférence. Le centre de cette circonférence est le milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre du cercle circonscrit.*

Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au quadrilatère A_2.

Cette propriété présente une grande analogie avec le théorème des neuf points, démontré par Euler, pour le cas du triangle. Les huit points désignés dans l'énoncé correspondent aux milieux des trois côtés et aux pieds des trois hauteurs dans le cas du triangle. Les trois autres points, dans ce même cas, sont les milieux des droites qui joignent les sommets du triangle au point de rencontre des hauteurs. Dans le quadrilatère, ces trois derniers points ont pour correspondants les milieux des quatre droites qui joignent le centre perspectif, ou point de rencontre des hauteurs de A, aux sommets de A_2. Mais ces quatre points se confondent avec les pieds des quatre hauteurs de A.

Théorème XXV. — *Le centre commun* O *des circonférences circonscrites aux quadrilatères* A *et* A_2 *et le centre perspectif* α *de* A *sont les foyers d'une ellipse qui a pour centre et pour grand axe le centre et le diamètre du cercle des douze points, pour tangentes les côtés du qudrilatère* A, *pour polaire focale la diagonale extérieure du même quadrilatère, et pour cercle directeur relatif au foyer* α *le cercle circonscrit au quadrilatère* A_2.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS PREMIERS;

Par M. Édouard LUCAS.

Les opérations que l'on effectue habituellement pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers sont longues et pénibles, puisque l'on est obligé de faire exactement les divisions de ce nombre, souvent très-grand, par une série de diviseurs que l'on essaye successivement. On peut, à l'aide de la remarque suivante, abréger le calcul d'une manière notable. Considérons, par exemple, le nombre

$$\frac{2^{40}+1}{2^{8}+1} = 4278255361,$$

dont tous les diviseurs sont de la forme $80p+1$. Prenons les logarithmes des nombres de cette forme, compris entre 60 000 et 62 000, et retranchons-les du logarithme du nombre donné; nous pouvons déterminer exactement les cinq chiffres du quotient et former le tableau suivant :

Diviseurs.	631 2667		Quotients.
60 161	779 3150	851 9517	71 112
60 961	785 0521	846 2146	70 180
61 121	786 1905	845 0762	69 996
61 441	788 4583	842 8084	69 632
61 681	790 1514	841 1153	69 361

On rejettera d'abord tous les quotients non terminés par l'unité; puis, parmi ceux qui font exception, on rejettera tous ceux qui ne satisferont pas à la preuve par 9 ou par 11, en supposant la division exacte. Lorsque le calcul logarithmique ne donne pas un nombre suffisant de chiffres sur lesquels on peut compter, on peut obtenir le dernier, les deux ou les trois derniers, en déterminant, ce qui est facile, les trois derniers chiffres du quotient à l'aide des derniers chiffres du dividende et du diviseur, en supposant toujours la division exacte. J'ai ainsi démontré que le nombre pris pour exemple est premier. Il est plus grand que celui que Legendre considère, d'après Euler, comme le plus grand des nombres premiers connus, à savoir :

$$2^{31}-1=2147483647.$$

Nous remarquerons que le dernier nombre essayé dans le tableau donne le produit

$$61681\times 69361=4278255841,$$

qui ne diffère que par deux chiffres du nombre donné.

J'observerai, à ce propos, qu'il serait bon, dans les Tables de logarithmes, d'indiquer par un signe placé à côté du dernier groupe, formant chacun des logarithmes de 10000 à 100000, le cas où le nombre considéré est premier. On aurait ainsi, sans plus d'espace et sans plus de frais, une Table des nombres premiers de 1 à 108000 avec le logarithme en regard, ce qui serait un véritable progrès dans l'étude de la théorie des nombres.

Nous indiquerons encore les décompositions suivantes :

$$30^{15}-1=7^2.19.29\ 12211\ 837931.51941161,$$
$$30^{15}+1=11.13.31.67.271.4831.71261.517831,$$
$$2^{41}+1=3.83.8831418697.$$

J'ai essayé ce dernier nombre pour tous les facteurs premiers, inférieurs à 60000, et ainsi

$$57073\times 154739=8831418947$$

ne diffère que par deux chiffres de ce nombre, et d'ailleurs le dernier facteur est divisible par 13. L'opération qui consiste à essayer les autres nombres premiers de 60000 à 95100, et qui comporterait une seule page de calculs, reste à faire; mais je n'ai pu continuer, n'ayant pas à ma disposition les Tables de Chernac. Il serait donc facile de s'assurer si ce nombre est premier, et, dans le cas de réussite, ce serait, je pense, le plus grand nombre premier connu actuellement.

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Si (x, y, z) représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

2. Si (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

3. L'équation biquadratique $x^4 - 5y^4 = 1$ a pour solution, en nombres entiers, $x = 3$, $y = 2$, et n'en a point d'autres.

4. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.

5. Trouver en nombres entiers toutes les solutions des deux progressions arithmétiques

$$\div\, x^2 . 2y^2 . 3z^2 . 4u^2,$$

$$\div\, x^2 . 3y^2 . 5z^2 . 7u^2,$$

et ainsi l'on a, pour la première,

$$\div\ 167^2.2 \times 97^2.3 \times 57^2.4 \times 13^2, \quad \text{de raison} \quad 9071$$

et, pour la seconde,

$$\div\ 607^2.3 \times 303^2.5 \times 191^2.7 \times 113^2, \quad \text{de raison} \quad 93022.$$

6. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.

7. Résoudre complétement l'équation

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

dont Legendre a donné une solution incomplète (*).

8. Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres est un carré parfait.

QUESTIONS

PROPOSÉES PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Calais.

1. Démontrer les formules

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2 + \ldots = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)},$$

$$1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2 + \ldots$$

$$= \cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+\ \right)},$$

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2} + \ldots = \frac{\sin n\pi}{n\pi},$$

et indiquer entre quelles limites elles sont exactes.

(*) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 126.

2. Dans quels cas peut-on aussi représenter sous forme finie la série

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2.2^2} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2.2^2.3^2}$$
$$+ \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1^2.2^2.3^2.4^2} + \ldots ?$$

3. Faire voir que, dans le produit limité

$$(1 + xr)(1 + x^2 r)(1 + x^3 r)\ldots(1 + x^n r),$$

le coefficient de z^k est égal à

$$x^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{(1 - x^n)(1 - x^{n-1})\ldots(1 - x^{n-k+1})}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^k)}.$$

Si, pour $x < 1$, n augmente indéfiniment, on obtient le développement d'Euler. Pour $x = 1$, on retrouve la formule du binôme.

QUESTION.

1187. Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0,$$

dans laquelle la quantité $-4p^3 - 27q^2$ est égale à un carré r^2, on sait que la différence entre deux racines quelconques de cette équation est exprimable par une fonction entière de la troisième racine, fonction qui est du second degré, et dont les coefficients sont exprimés rationnellement au moyen des quantités connues p, q, r.

On propose, réciproquement, d'exprimer l'une quelconque des racines par une *fonction entière du second degré* de la différence entre les deux autres racines, les coefficients de cette fonction devant de même être exprimés rationnellement au moyen de p, q, r. (S. Realis.)

SUR LES SYSTÈMES DE TIGES ARTICULÉES;

PAR M. V. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

1. L'étude récente des divers systèmes de tiges articulées, à liaison complète, a commencé par celle des systèmes à six tiges, et même, parmi toutes les dispositions connues actuellement, la plupart ne sont encore que des systèmes de ce genre particulier ou des combinaisons simples de ces systèmes.

Ces divers systèmes à six tiges ont été inventés, pour la plupart, indépendamment l'un de l'autre et figurent ainsi dans la question comme des dispositions isolées et distinctes, dont rien ne paraît indiquer une liaison mutuelle. Je me propose, dans cette Note, de les étudier sous un point de vue complétement général, ce qui me permettra : 1° d'indiquer les conditions caractéristiques qui distinguent le genre de systèmes à six tiges, étudié jusqu'à présent, de toutes les autres dispositions possibles du même nombre de tiges, et qui assignent certaines limites aux recherches de nouvelles combinaisons utiles du même genre; 2° de décrire un système dont les dispositions connues à six tiges (*) ne sont que de simples cas particuliers; 3° de passer brièvement en revue, en discutant ce système général, tous les systèmes connus à six tiges, et d'exposer à cette occasion quelques observa-

(*) Le système récemment proposé par M. Kemp, que j'ai décrit dans le n° 7 de cette Note, ne doit pas compter dans ce nombre, car il présente, comme on le verra, un type tout à fait exceptionnel, qui ne se rattache pas du tout à tous les autres systèmes connus à six tiges, puisqu'il ne jouit pas de la propriété fondamentale, commune à ces derniers, d'avoir constamment trois articulations en ligne droite pendant le mouvement.

tions nouvelles relatives à ces derniers. Les systèmes à six tiges formant, comme je l'ai déjà observé, la grande majorité de tous les types proposés de systèmes articulés en général, il ne me restait à décrire qu'un très-petit nombre de dispositions à huit et à quatre tiges, pour donner en même temps, par ce travail, une énumération complète de tous les types de systèmes articulés actuellement connus, énumération qui peut être utile aux personnes s'occupant de la question; c'est ce que j'ai fait dans un appendice placé à la fin de cette Note.

Pour abréger le langage, je nommerai tout système articulé à six tiges et à liaison complète *élément articulé*.

2. Chaque élément articulé se compose nécessairement de six tiges et de sept articulations, en comptant les points où sont réunies trois tiges pour deux articulations (*). Comme l'a déjà fait observer M. Sylvester (**), tous les éléments et systèmes articulés auxquels on a été conduit par la découverte de M. Peaucellier peuvent, en dernière analyse, être considérés comme des assemblages de *couples* de tiges ou de *dyades*, c'est-à-dire de systèmes de deux tiges réunies par une articulation, systèmes dont le compas ordinaire fournit un exemple très-connu; et c'est en vertu de cette propriété que M. Sylvester avait même proposé de donner à ces dispositions le nom de

---

(*) M. Sylvester, dans une lecture, aussi belle que savante, qu'il a faite l'année dernière à l'Institution royale de la Grande-Bretagne sur la *Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne,* lecture qui a été publiée dans la *Revue scientifique,* 2^e^ série, 4^e^ année, 1874, p. 490-498, a énoncé la règle suivante, facile à démontrer : Pour qu'un système de tiges articulées soit à liaison complète, il faut qu'il existe entre le nombre n de tiges et le nombre m des articulations le rapport numérique $3n - 2m = 4$, en comptant chaque point où sont réunies k tiges pour $k - 1$ articulations; par conséquent, pour un système de six tiges, on a $m = 7$.

(**) *Voir* la lecture citée, *Revue scientifique,* 2^e^ série, 4^e^ année, p. 497.

dyadismes. En se plaçant à ce point de vue, on obtient pour les éléments en question le mode de génération général suivant.

Prenons une dyade ou un couple de tiges, et imaginons que l'on rend fixe son articulation; nommons cette articulation fixe le *point d'appui* (*) et les deux tiges qui y sont réunies les *connecteurs*. Prenons ensuite un second couple et joignons, au moyen de deux articulations, ses deux tiges aux deux tiges du premier couple, en articulant les extrémités libres des tiges de l'un des deux couples à deux points quelconques, ou aux extrémités libres des deux tiges de l'autre couple (**); nommons les deux tiges de ce nouveau couple les *premiers guides*, et l'articulation qui les réunit le *premier pôle*; nous aurons formé ainsi un quadrilatère articulé qui a pour côtés les deux connecteurs et les deux guides, ou certaines parties de ces tiges. Prenons enfin un troisième couple et adaptons ses extrémités libres, au moyen d'articulations, à deux points de deux côtés adjacents (***) du quadrilatère mentionné, ou aux extrémités des prolongements de deux côtés adjacents, si ces prolongements existent; donnons aux tiges de ce troisième couple et à l'articulation qui les

(*) J'ai puisé la plupart des noms employés ici dans la lecture citée de M. Sylvester.

(**) Les différents cas que l'on a à considérer ici ne pouvant pas être réunis dans une même figure, le lecteur est prié de reproduire ces cas en dessin lui-même.

(***) Cette dernière restriction est inutile pour les éléments que je nomme plus loin de la première espèce et qui, comme on verra, sont de beaucoup les plus importants, puisqu'elle y est remplie d'elle-même; mais, pour ceux de la deuxième espèce, il y a lieu de la faire, car, dans ces derniers, parmi les quatre modes possibles de jonction du troisième couple, il y a deux dispositions où les extrémités libres des deuxièmes guides s'articulent à deux côtés opposés du premier quadrilatère, et dans ces deux cas on obtiendrait, au lieu du second quadrilatère, un pentagone articulé, ce qui compliquerait beaucoup les raisonnements.

joint les noms de *deuxièmes guides* et de *deuxième pôle;* nous aurons formé par là un second quadrilatère articulé, ayant un sommet et un angle communs avec le premier; mais les droites qui forment ce nouveau quadrilatère peuvent être différentes. Il est clair, en effet, que la jonction du troisième couple à l'assemblage des deux premiers peut s'effectuer de trois manières distinctes : les extrémités libres de ce troisième couple peuvent être jointes ou aux deux premiers guides, ou aux deux connecteurs, ou à un des premiers guides et à un connecteur adjacent; dans le premier cas, le nouveau quadrilatère sera formé par les quatre guides, dans le second par les deux connecteurs et les deux deuxièmes guides, dans le troisième par trois des quatre guides et l'un des deux connecteurs. Dans tous les cas, la réunion considérée de trois couples formera un élément à six tiges et à sept articulations, et l'on remarquera que cet élément est toujours composé de deux quadrilatères articulés. Nous dirons que l'élément est de *première espèce,* quand le mode de jonction du troisième couple rentre dans les deux premiers des trois cas cités, et qu'il est de la *deuxième espèce,* lorsque ce mode de jonction rentre dans le dernier de ces cas. Une autre distinction qu'il est encore utile de faire dans le cas où le troisième couple est adapté aux deux premiers guides est relative à la position du point d'appui par rapport au second quadrilatère articulé; le point d'appui peut être situé à l'extérieur ou à l'intérieur de ce quadrilatère : dans le premier cas, l'élément sera dit *positif,* dans le second, *négatif.*

D'après ce qui vient d'être dit, parmi les six tiges de chaque élément, il y a à distinguer les deux connecteurs, les deux premiers et les deux deuxièmes guides, et parmi ses sept articulations on distingue le point d'appui et les deux pôles. Les distances du point d'appui aux deux pôles seront dites les *bras* de l'élément; en considérant ces bras comme des rayons vecteurs partant d'une même origine fixe, le but de chaque élément consiste à établir une relation constante entre ces rayons vecteurs, qui permette d'opérer une certaine transformation sur les coordonnées polaires, de manière que, l'un des pôles décrivant une ligne donnée, l'autre décrive une seconde ligne, liée à la première par la loi de transformation qui convient à l'élément considéré.

Afin d'éviter d'inutiles répétitions, convenons, une fois pour toutes, de désigner toujours, sur nos figures, par A le point d'appui, par P le premier et par P_1 le deuxième pôle, par N, N' les deux points de jonction des premiers guides avec les connecteurs, et par M, M' les deux points de jonction des deuxièmes guides avec les premiers guides ou avec les connecteurs, et de désigner, dans nos formules, par ρ, ρ_1 les deux bras AP, AP_1, par c, c' les distances AN, AN' des articulations N, N' au point d'appui, par n, n' les distances PN, PN' des mêmes articulations au premier pôle, par m, m' les deuxièmes guides P_1M, P_1M' pris en entier, enfin par m_1, m'_1 les distances PM, PM' des articulations M, M' au premier pôle, quand les deuxièmes guides s'articulent aux premiers guides, et par c_1, c'_1 les distances AM, AM' des mêmes articulations au point d'appui, lorsque les deuxièmes guides s'articulent aux connecteurs.

3. Si maintenant on compare l'élément général que nous venons d'obtenir par la voie de composition de trois couples de tiges avec les éléments qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, on voit immédiatement que ces derniers ne sont tous que des variétés du premier, caractérisées par les deux propriétés particulières que voici : 1° ils sont tous de la première

espèce; 2° quel que soit le mouvement de l'élément, trois des sept articulations, le point d'appui et les deux pôles, restent constamment en ligne droite pendant ce mouvement.

D'autre part, si l'on examine attentivement et d'une manière générale les conditions suffisantes pour que le point d'appui et les deux pôles d'un élément de la première espèce restent constamment en ligne droite, on reconnaît qu'il suffit pour cela : 1° ou que dans une seule position de l'appareil les deux quadrilatères articulés, dont l'élément est toujours composé, soient semblables et semblablement placés; 2° ou que dans une seule position de l'appareil les trois sommets des deux quadrilatères, qui représentent le point d'appui et les deux pôles, soient en ligne droite, et les deux diagonales de chaque quadrilatère se coupent à angle droit.

En effet, pour que les trois points A, P, P_1 restent continuellement en ligne droite, il faut évidemment que les deux diagonales AP, P_1P des deux quadrilatères PNAN′, PMP_1M' coïncident constamment en direction pendant toute la durée du mouvement de l'instrument; et, pour que cette coïncidence continuelle ait lieu, il suffit que les deux diagonales NN′, MM′ soient parallèles dans une seule position de l'appareil, et que l'angle formé par les diagonales AP, NN′ de l'un des quadrilatères soit égal à l'angle formé par les diagonales P_1P, MM′ de l'autre dans chaque position de l'élément. Car les deux diagonales NN′, MM′ étant parallèles dans une seule position de l'appareil, elles le seront dans une position quelconque, en vertu de la proportion

$$NM : MP = N'M' : M'P,$$

dont les quatre termes restent constants pendant le mouvement; et si, dans chaque position, on a

$$NN' \text{ parallèle à } MM' \quad \text{et} \quad \text{angle}\,(NN', AP) = \text{angle}\,(MM', P_1P),$$

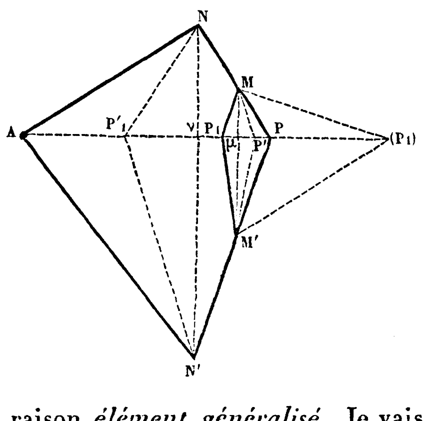
les deux droites AP, P_1P devront constamment coïncider, car elles ont toujours un point commun P. Mais les deux conditions, le parallélisme des diagonales NN′, MM′ dans une seule position de l'appareil et l'égalité continuelle des angles (NN′, AP), (MM′, P_1P), seront remplies dans chacun des deux cas suivants : 1° si, dans une seule position de l'élément, les deux quadrilatères PNAN′, PMP_1M' sont semblables et semblablement placés ; 2° si, dans une seule position de l'élément, les trois points A, P, P_1 sont en ligne droite, et NN′ perpendiculaire à AP, MM′ perpendiculaire à P_1P. Car, dans le premier cas, il est aisé de voir que, si les deux quadrilatères PNAN′, PMP_1M' sont semblables et semblablement placés dans une seule position de l'élément, ils jouiront des mêmes propriétés dans toutes les positions de l'appareil, et, par conséquent, les angles homologues (NN′, AP), (MM′, P_1P) seront constamment égaux. Dans le second cas, le parallélisme des diagonales NN′, MM′ aura lieu pour la position où les trois points A, P, P_1 sont en ligne droite; car, dans cette position, ces diagonales seront perpendiculaires à une même droite AP_1P; et l'égalité des angles (NN′, AP), (MM′, P_1P) aura lieu constamment pendant le mouvement en vertu de cette propriété facile à démontrer, que, de quelque manière que l'on déforme un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit et dont les côtés ont des longueurs invariables, ses diagonales resteront toujours perpendiculaires entre elles (*).

Cela posé, on voit que l'on peut former un élément de

(*) Cette propriété est une conséquence immédiate d'une relation très-simple entre les côtés d'un quadrilatère à diagonales rectangulaires, relation qui consiste en ce que la somme des carrés de deux côtés opposés d'un pareil quadrilatère est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

la première espèce, dont le point d'appui et les deux pôles restent constamment en ligne droite, de deux manières distinctes : ou en construisant un quadrilatère quelconque et en menant par un point de l'une de ses diagonales deux droites parallèles à deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale jusqu'à la rencontre avec les deux autres côtés, ou en construisant un quadrilatère à diagonales rectangulaires et en joignant un point de l'une de ces diagonales à deux points situés à la fois sur deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale et sur une même perpendiculaire à cette dernière droite. C'est dans le dernier de ces deux modes de génération que rentrent les éléments qui ont été étudiés depuis la découverte de M. Peaucellier; par conséquent, le type le plus général de ce genre sera l'élément représenté sur les *fig.* 1 ou 2, et que je nommerai

Fig. 1.



par cette raison *élément généralisé*. Je vais faire voir comment les éléments proposés en peuvent être déduits comme cas particuliers.

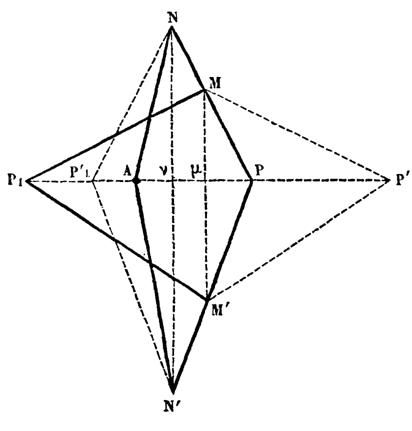
4. Pour cela, je commencerai par établir la loi de la

transformation effectuée par cet élément sur les bras ou rayons vecteurs. En employant les notations adoptées à la fin du n° 2, cette loi consiste en ce que, pendant toute la durée d'un mouvement quelconque de l'appareil, il existe entre les bras ou rayons vecteurs ρ, ρ_1 la relation

$$(1) \qquad \frac{\rho[(\rho \mp \rho_1)^2 + m_1^2 - m^2]}{(\rho \mp \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)} = \frac{m_1}{n},$$

où il faut prendre les signes supérieurs quand l'élément est positif (*fig.* 1), et les signes inférieurs quand il est négatif (*fig.* 2). Il suffira de démontrer l'équation (1)

Fig. 2.



pour le premier de ces deux cas; la *fig.* 2 rend parfaitement compte des modifications que l'on aura à introduire dans la démonstration pour le second cas; en outre, cette démonstration s'appliquera encore, et sans aucune modification, au cas où $m_1 > n$, cas opposé à celui des *fig.* 1 et 2. Enfin la même relation (1), prise avec les signes supérieurs, conviendra aussi au cas où le second quadrilatère formé par les quatre guides présenterait, au lieu de la disposition considérée $MPM'P_1$ (*fig.* 1), la disposition $MPM'(P_1)$, c'est-à-dire où le deuxième pôle se trouverait à l'extérieur du premier quadrilatère formé par les connecteurs et les premiers guides, et où en même temps le second quadrilatère ne renfermerait pas le point d'appui.

Prenons dans la *fig.* 1, sur la diagonale AP, deux points P' et P'_1 tels que, μ et ν désignant respectivement les points d'intersection des diagonales MM', P_1P et NN', AP, on ait $\mu P' = \mu P_1$, $\nu P'_1 = \nu P$, et joignons MP' et NP'_1; on aura alors évidemment, en nommant pour un instant $AP' = \rho'$, $AP'_1 = \rho'_1$,

$$\rho_1 = A\mu - \mu P_1,$$
$$\rho' = A\mu + \mu P_1,$$

et par conséquent

$$\rho_1\rho' = \overline{A\mu}^2 - \overline{\mu P_1}^2 = (AP - \mu P)^2 - \overline{\mu P_1}^2$$
$$= \overline{AP}^2 + \overline{\mu P}^2 - \overline{\mu P_1}^2 - 2AP.\mu P,$$

ou

$$\rho_1\rho' = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 - \overline{M\mu}^2 - \overline{MP_1}^2 + \overline{M\mu}^2 - 2AP.\mu P,$$

ou

$$(\alpha) \qquad \rho_1\rho' = \rho^2 + m_1^2 - m^2 - 2\rho.\mu P.$$

De même

$$\rho = A\nu + \nu P,$$
$$\rho'_1 = A\nu - \nu P;$$

donc

$$\rho\rho'_1 = \overline{A\nu}^2 - \overline{\nu P}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{N\nu}^2 - \overline{NP}^2 + \overline{N\nu}^2,$$

ou

$$(\beta) \qquad \rho\rho'_1 = c^2 - n^2.$$

Mais

$$\rho' = A\mu + \mu P' = A\mu + A\mu - \rho_1 = 2A\mu - \rho_1 = 2(\rho - \mu P) - \rho_1,$$

$$\rho'_1 = AP - PP'_1 = \rho - 2\nu P,$$

et, comme les triangles semblables $M\mu P$, $N\nu P$ donnent la proportion

$$\nu P : \mu P = NP : MP = n : m_1,$$

d'où

$$\nu P = \frac{n}{m_1}\mu P,$$

il s'ensuit que

$$\rho' = 2\rho - \rho_1 - 2\mu P,$$

$$\rho'_1 = \rho - 2\frac{n}{m_1}\mu P.$$

En substituant ces valeurs de ρ', ρ'_1 dans les égalités (α), (β), on aura

$$\rho_1(2\rho - \rho_1 - 2\mu P) = \rho^2 + m_1^2 - m^2 - 2\rho.\mu P,$$

$$\rho\left(\rho - 2\frac{n}{m_1}\mu P\right) = c^2 - n^2,$$

ou

$$2\mu P(\rho - \rho_1) = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 + m_1^2 - m^2,$$

$$2\mu P\frac{n}{m_1}\rho = \rho^2 + n^2 - c^2,$$

et, en divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient la relation cherchée (1), prise avec les signes supérieurs.

Remarquons que la relation (1) est tout à fait indépendante des grandeurs des tiges AN', P_1M', PN', PM' qui se trouvent de l'autre côté de la diagonale AP, et que, par conséquent, cette relation reste identiquement la même pour tous les éléments de différents paramètres que l'on obtient en changeant arbitrairement le lieu du point N' sur la droite $N\nu$ indéfiniment prolongée.

5. Je ferai voir maintenant comment les différents éléments connus se déduisent de l'élément généralisé, et j'ajouterai à cette occasion quelques observations sur plusieurs propriétés de ces variétés.

I. *Élément de M. Peaucellier généralisé, indiqué par M. Sylvester* (*) (*fig.* 3). — Pour obtenir cet élément, imaginons que, dans la *fig.* 1, le point P soit rendu fixe au lieu du point A ; les deuxièmes guides seront alors articulés aux deux connecteurs, et l'on aura l'élément représenté sur la *fig.* 3. Pour trouver la relation que cet appareil établit entre les bras ρ, ρ_1, il faut, d'après les notations adoptées (n° 2), changer dans la formule géné-

Fig. 3.

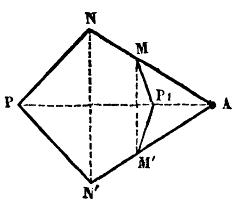
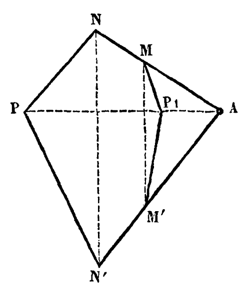


Fig. 4.



rale (1), prise avec les signes supérieurs, ρ_1 en $\rho - \rho_1$, c en n, n en c, m_1 en c_1, ce qui donnera, pour l'élément actuel, la relation

$$(2) \qquad \frac{\rho(\rho_1^2 + c_1^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - n^2)} = \frac{c_1}{c}.$$

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 498. C'est l'étude de ce système qui a servi de point de départ à l'intéressant travail de M. Saint-Loup, *Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications*, inséré dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* pour 1875. Les deux formules fondamentales (I) et (II) de M. Saint-Loup correspondent aux formules (2) et (3) de notre Mémoire.

On n'a pas à considérer ici le cas des signes inférieurs de la relation (1); car, dans la disposition actuelle, le point d'appui est le sommet commun des deux quadrilatères de l'élément, et ne peut, par conséquent, se trouver dans l'intérieur de l'un d'eux.

Remarquons que la restriction $AN = AN'$, $AM = AM'$, indiquée par M. Sylvester, présentant, il est vrai, l'avantage d'une disposition parfaitement symétrique, n'est cependant pas nécessaire; en l'omettant et en conservant seulement les conditions NN' perpendiculaire à AP, MM' perpendiculaire à AP, on obtient l'élément plus général représenté sur la *fig.* 4, qui satisfait à la même relation (2), vu que, d'après une remarque faite plus haut, la relation (1) ne dépend que des tiges situées d'un côté de la diagonale AP.

Observons encore que les éléments des *fig.* 3 et 4 peuvent servir pour la résolution du même problème que M. Mannheim avait résolu par l'élément II, dont nous allons nous occuper tout à l'heure. En effet, il est aisé de vérifier, en éliminant ρ_1 entre la relation (2) et l'équation $\rho_1^2 - \alpha\cos\theta.\rho_1 + \beta = 0$, ou l'équation $\rho_1 = \alpha\cos\theta$, α et β étant des constantes, que, si le point P_1 décrit une circonférence, le point P décrira une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre, selon que le cercle décrit par P_1 passe ou ne passe pas par le point fixe A.

Si, dans l'élément de la *fig.* 3, ou dans celui de la *fig.* 4, on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer respectivement dans ces figures les lettres A, P, P_1, M, M', N, N' en P, P_1, A, N, N', M, M', et dans l'équation (2), c, c_1, n, m, ρ, ρ_1 en m_1, n, m, c, $\rho + \rho_1$, ρ; la loi de transformation deviendra donc dans ce cas

$$(3) \qquad \frac{(\rho + \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)}{\rho[(\rho + \rho_1) + m_1^2 - m^2]} = \frac{n}{m_1}.$$

II. *Élément proposé par M. Mannheim pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre* (*) (*fig.* 5 et 6).

Fig. 5.

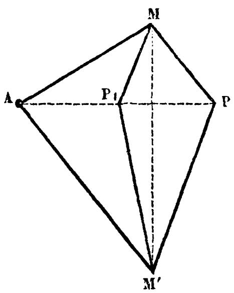
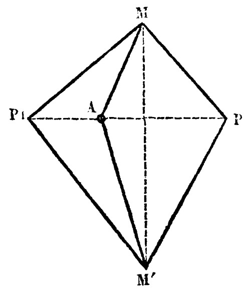


Fig. 6.



— On obtient cet élément de l'élément généralisé en y posant $n = m_1$; les *fig.* 1 et 2 prennent alors l'aspect plus simple des *fig.* 5 et 6, et la relation (1) devient

$$(4)\qquad \frac{\rho(\rho_1^2 + c^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - m_1^2)} = \pm 1,$$

où le signe $+$ correspond à la forme positive (*fig.* 5) et le signe $-$ à la forme négative (*fig.* 6).

M. Mannheim a trouvé qu'en général, lorsque dans cet élément le point A est fixe et que le pôle P_1 décrit une circonférence, l'autre pôle P décrit une anallagmatique du quatrième ordre. On peut ajouter que, quand, en particulier, le point P_1 décrit une circonférence passant par le point fixe A, le point P décrit une anallagmatique du troisième ordre.

Si l'on fixe le point P_1 au lieu du point A, on devra changer, dans les *fig.* 5 et 6, P_1, A en A, P_1, et, dans la formule (4), c, m, ρ en m, c, $\rho + \rho_1$ dans le cas de la

(*) Communication faite à la Société mathématique de France dans la séance du 9 décembre 1874. *Voir* le *Bulletin* de cette Société, t. III, p. 17.

forme positive, et en m, c, $\rho - \rho_1$ dans le cas de la forme négative, ce qui donne la même relation (4), aux signes près,

$$(5) \qquad \frac{\rho(\rho_1^2 + c^2 - m^2)}{\rho_1(\rho^2 + c^2 - m_1^2)} = \mp 1,$$

le signe — correspondant ici à la *fig.* 5 qui, après la fixation du point P_1, représente un élément négatif, et le signe + correspondant à la *fig.* 6 qui représente actuellement un élément positif.

On voit ainsi que l'élément de M. Mannheim peut servir de deux manières différentes à décrire une anallagmatique du troisième ou du quatrième ordre; on peut fixer A et faire décrire à P_1 une circonférence, ou bien on peut fixer P_1 et faire décrire à A une circonférence; dans les deux cas, le point P décrira l'anallagmatique demandée.

III. *Inverseur de M. Peaucellier* (*) (*fig.* 7 et 8). — Dans ce cas, $n = m_1 = m$, et l'équation fondamentale (1) donne la relation bien connue

$$(6) \qquad \rho\rho_1 = \pm (c^2 - m^2),$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, selon que l'élément est positif (*fig.* 7) ou négatif (*fig.* 8).

(*) C'est la découverte de cet appareil qui a servi de point de départ à l'étude de tous les autres éléments articulés. Cette découverte, qui a résolu pour la première fois d'une manière rigoureuse l'important problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, M. Peaucellier l'a énoncée en termes généraux et sous forme de question, en 1864, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et en a donné ensuite un exposé détaillé, en 1873, dans le même journal. M. Lipkine, de Saint-Pétersbourg, a trouvé la même solution en 1870; il présenta aussitôt la description et la théorie de l'appareil à l'Académie de Saint-Pétersbourg (voir *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1871), et en 1873 il en exposa un modèle à l'Exposition universelle de Vienne.

On remarquera que, d'après une observation faite plus haut sur la relation générale (1), on ne changerait

Fig. 7.

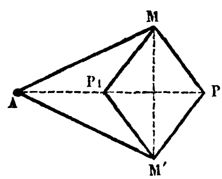
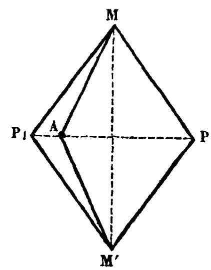


Fig. 8.



en rien les propriétés de l'inverseur, si, au lieu de faire tous les quatre côtés du quadrilatère PMP_1M' égaux entre eux, on ne les prenait qu'égaux deux à deux, de manière que $PM = P_1M$, $PM' = P_1M'$, comme le montrent les *fig.* 9 et 10. Ainsi, dans l'inverseur, le *losange*

Fig. 9.

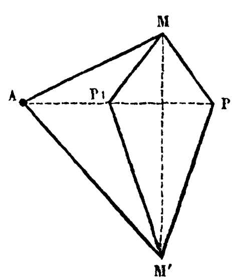
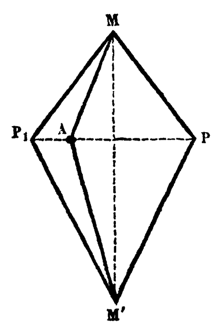


Fig. 10.



n'est pas indispensable, et ce n'est certainement que l'avantage de l'extrême simplicité qui l'a fait employer exclusivement.

Si, dans l'inverseur, on fixe le point P_1 au lieu du point A, on aura un élément qui a servi à M. Sylvester pour décrire les cubiques nodales qui sont les inverses des sections coniques, avec un sommet de la conique comme origine d'inversion (hypercissoïdes, hypocissoïdes et cissoïde ordinaire), et pour former, en vertu de cette propriété, un conicographe de treize tiges (*). Dans ce cas, on aura à changer dans les *fig.* 7, 8, 9 et 10, A en P_1 et P_1 en A, et à substituer, dans la formule (6), aux quantités m, c, ρ respectivement les quantités c, m, $\rho \pm \rho_1$, où il faut prendre le signe + ou le signe —, selon que l'élément primitif, dont A est le point d'appui, est positif ou négatif; on aura donc

$$\rho_1^2 \pm \rho\rho_1 = m^2 - c^2, \tag{7}$$

où l'on devra prendre le signe + ou le signe —, selon que, le point P_1 étant fixe, l'élément est négatif ou positif.

IV. *Élément de M. Sylvester.* — Cet élément lui a

Fig. 11.

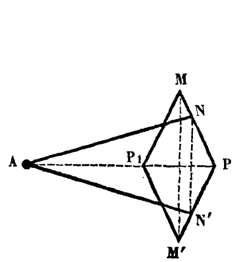
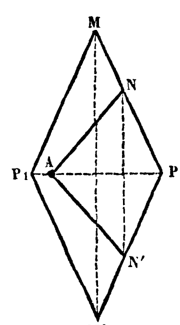


Fig. 12.



servi pour réaliser un système circulo-circulaire, c'est-à-dire une disposition propre à transformer un mouvement

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 494.

circulaire en un autre mouvement circulaire, différent de celui de M. Peaucellier (*) (*fig.* 11 et 12). On obtient ce nouvel élément en supposant $m = m_1$ et $n < m$ dans les *fig.* 1 et 2 et dans l'équation (1), ce qui donne les *fig.* 11 et 12, ou plus généralement les *fig.* 13 et 14, et la relation

$$(8) \qquad (m - n)\rho^2 \pm n\rho\rho_1 = m(c^2 - n^2),$$

le signe + correspondant à la forme positive (*fig.* 11 et 13), et le signe — à la forme négative (*fig.* 12 et 14).

Fig. 13.

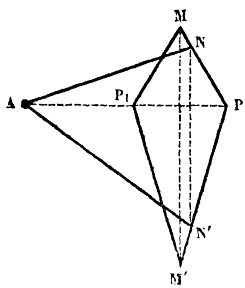
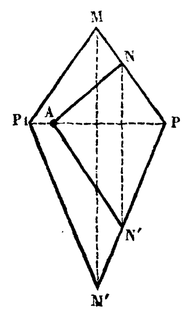


Fig. 14.



Lorsque, dans cet élément, le point P_1 décrit une circonférence qui ne passe pas par le point fixe A, le point P décrit une anallagmatique du quatrième ordre; cette disposition peut donc servir à la description de ces courbes aussi bien que l'élément II; mais, si la circonférence décrite par P_1 contient le point d'appui A, la courbe décrite par le point P se décompose en deux cercles, ce qui explique précisément comment cet élément a pu servir à M. Sylvester pour la transformation d'un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire.

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 493, note.

Si l'on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer, dans les *fig.* 11-14, A, P_1, M, M', N, N' respectivement en P_1, A, N, N', M, M' et, dans la formule (8), c, m, n, ρ respectivement en m, c, m_1, $\rho+\rho_1$ ou en m, c, m_1, $\rho-\rho_1$, selon que l'on prend cette formule avec le signe + ou avec le signe —; on aura donc, pour la disposition actuelle, la relation

$$(9) \qquad (c-m_1)\rho^2+c\rho_1^2 \pm (2c-m_1)\rho\rho_1 = c(m^2-m_1^2),$$

et l'on choisira ici le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que, le point P_1 étant fixe, le nouvel élément sera négatif ou positif.

V. *Extracteur binôme quadratique de M. Sylvester* (*) (*fig.* 15). — Dans l'élément généralisé (*fig.* 1

Fig. 15.

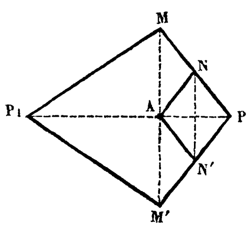
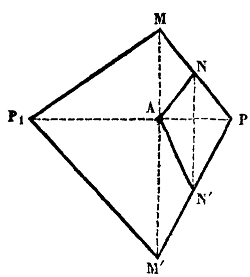


Fig. 16.



ou 2), fixons le point P_1 au lieu du point A; cela revient à changer respectivement, dans les *fig.* 1 et 2, A, P_1, M, M', N, N' en P_1, A, N, N', M, M' et, dans la formule (1), c, m, m_1, n en m, c, n, m_1, et ρ en $\rho+\rho_1$ ou $\rho-\rho_1$, selon que l'on prend la formule (1) avec les signes supérieurs ou avec les signes inférieurs; on aura

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 495.

ainsi

$$(10)\qquad \frac{(\rho \pm \rho_1)(\rho^2 + n^2 - c^2)}{\rho[(\rho \pm \rho_1)^2 + m_1^2 - m^2]} = \frac{n}{m_1}.$$

Faisons maintenant $n = c$, $m_1 = 2c$; cette hypothèse conduit à l'élément de la *fig.* 15, qui n'est autre chose que l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester, ou, plus généralement, à la *fig.* 16; la relation (10) devient

$$(11)\qquad \rho_1^2 - \rho^2 = m^2 - 4c^2.$$

Les doubles signes ont disparu, et il n'y a plus lieu de distinguer la forme positive et négative. La relation (11) fait voir que, lorsque l'un des bras est égal à $\sqrt{x^2 + k}$, k étant une constante, l'autre bras est égal à x, ce qui explique le nom de l'élément. En outre, cet appareil a servi à M. Sylvester pour tracer les lemniscatoïdes en général au moyen de sept tiges, et à M. Henrici pour tracer la lemniscate ordinaire au moyen de cinq tiges seulement (*).

Si, dans l'extracteur binôme quadratique, on fixait le point P_1 au lieu du point A, on tirerait, pour cette nouvelle disposition, directement de l'équation (1), en y posant $m_1 = m$, $n = 2m$, la relation

$$(12)\qquad \rho^2 \mp 2\rho\rho_1 = 4m^2 - c^2.$$

La même relation s'obtiendrait de l'équation (8), en y posant $n = 2m$; l'élément auquel on est conduit en fixant le point P_1 dans les *fig.* 15 ou 16 n'est donc qu'un cas particulier de l'élément IV, et, en se rappelant ce qui a été dit sur la description des anallagmatiques du quatrième ordre au moyen de ce dernier appareil, on voit que l'extracteur binôme quadratique peut aussi servir à la des-

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 493 et 495.

cription de ces courbes, si l'on y fixe le point P_1 au lieu du point A.

VI. *Élément pantographique* (*) (*fig.* 17 et 18). — Posons, dans notre élément généralisé, $m_1 = m$, $n = c$; les *fig.* 1 et 2 donneront les *fig.* 17 et 18, où ANPN',

Fig. 17.

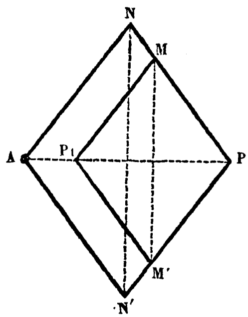
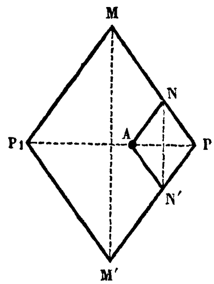


Fig. 18.



P_1MPM' sont deux losanges à côtés parallèles, ou, plus généralement, les *fig.* 19 et 20, et l'équation (1) deviendra

$$(13) \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \pm \frac{c}{c - m},$$

le signe + correspondant à la forme positive (*fig.* 17 et 19), et le signe — à la forme négative (*fig.* 18 et 20). On voit, par l'équation (13), que l'élément considéré transforme une figure donnée en une autre figure semblable, ce qui justifie le nom de l'appareil.

Si, dans l'élément pantographique, on fixe le point P_1 au lieu du point A, il faudra changer, dans les *fig.* 17-20, A en P_1 et P_1 en A, N, N' en M, M', et M, M' en N,

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 492.

N′, et, dans la formule (13), c en m, m en c et ρ en $\rho + \rho_1$ ou en $\rho - \rho_1$, selon que l'on prend cette formule avec le

Fig. 19.

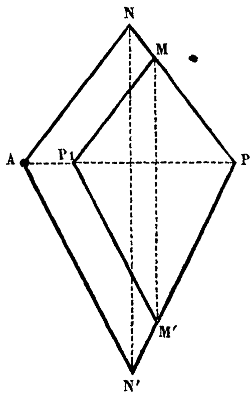
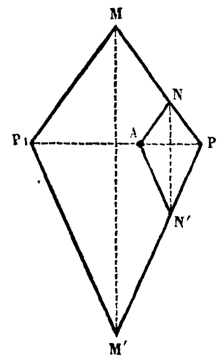


Fig. 20.



signe + ou le signe —; le nouvel élément effectuera donc une transformation exprimée par l'équation

$$(14) \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \pm \frac{c}{m - c},$$

et sera par conséquent aussi un élément pantographique, mais d'un module différent de celui de l'élément primitif.

En résumé, on voit donc que les différents éléments connus que nous venons de considérer ne sont en effet que des cas particuliers de l'élément généralisé.

6. Mais, comme il a été déjà dit plus haut, tous ces éléments connus sont de la première espèce, c'est-à-dire que, dans tous ces appareils, les deuxièmes guides sont toujours adaptés par leurs extrémités libres, ou aux deux connecteurs ou aux deux premiers guides. Après avoir examiné les appareils de ce genre, il est naturel de se

demander si l'on ne pourrait pas obtenir d'autres dispositions nouvelles et utiles parmi les éléments de la deuxième espèce, où les extrémités libres des deuxièmes guides s'appuient sur un connecteur et un premier guide adjacent.

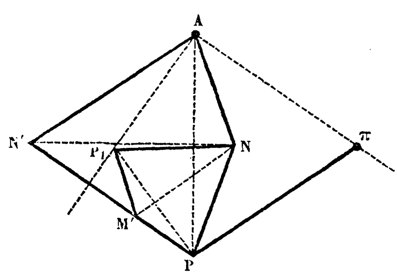
Je ne reproduis pas ici l'analyse un peu minutieuse, mais très-simple, de cette question. Cette analyse nous apprend qu'en se bornant au même degré de simplicité que pour le cas des éléments de la première espèce, c'est-à-dire en ne considérant que les éléments de la deuxième espèce, jouissant de la propriété que leur point d'appui et leurs deux pôles restent constamment en ligne droite pendant le mouvement de l'appareil, les seuls éléments auxquels on se trouve conduit sont l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester et l'élément pantographique sous une forme particulière servant à *doubler* les rayons vecteurs, ce qui nous indique une propriété curieuse de ces deux éléments, de pouvoir servir en même temps d'éléments de la première et de la deuxième espèce, selon que l'on fixe dans la *fig.* 15 le point A ou le point M, et dans la *fig.* 17, considérée dans l'hypothèse $PM = MN$, le point A ou le point N. On ne retrouve ainsi, parmi les éléments de la deuxième espèce, que des variétés déjà connues, ce qui montre que cette seconde solution possible du problème est stérile, et que, autant que l'on se borne à cette classe simple d'éléments, dont le point d'appui et les deux pôles sont assujettis à rester constamment en ligne droite, de nouvelles dispositions ne peuvent être cherchées que parmi les éléments de la première espèce.

7. Il a été proposé récemment, par M. Kemp, un système particulier à six tiges, présentant une nouvelle solution du problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne parfait. Ce

système ingénieux joue, parmi les éléments connus, un rôle tout à fait exceptionnel; il ne jouit plus de la propriété commune à tous les éléments que nous venons d'étudier, d'avoir constamment trois de ses articulations, le point d'appui et les deux pôles, en ligne droite, et ne peut pas, par conséquent, être déduit comme cas particulier de notre élément généralisé. Néanmoins, pour compléter l'exposé de tous les systèmes connus à six tiges, nous jugeons à propos d'en donner ici la description et la théorie.

On forme un quadrilatère ANPN′ (*fig.* 21), à diago-

Fig. 21.



nales rectangulaires, dans lequel $AN = PN$, $AN' = PN'$; on prend le sommet A pour point d'appui, le sommet P pour premier pôle, et par conséquent les côtés $AN = c$, $AN' = c'$ pour connecteurs et les côtés $PN = c$, $PN' = c'$ pour premiers guides. On construit ensuite sur les côtés PN, PN′ un second quadrilatère $NPM'P_1$, tel que

$$NP_1 = NP = c, \quad P_1M' = PM' = \frac{c^2}{c'},$$

et l'on prend son sommet P_1 pour deuxième pôle et ses côtés P_1N, P_1M' pour deuxièmes guides. Dans cet élément, les bras seront représentés par les droites $AP = \rho$, $AP_1 = \rho_1$; et l'on peut faire voir que, si le pôle P décrit une circonférence passant par le point fixe A et dont le centre π est symétrique au point N' par rapport à la droite AP, le pôle P_1 décrira une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au côté N'P du premier quadrilatère ANPN'. En effet, pour faire décrire au point P la circonférence demandée, il suffit d'ajouter au système considéré de six tiges une septième tige $P\pi$ égale et parallèle à N'A et de fixer l'extrémité π de cette nouvelle tige. La figure $A\pi PN'$ restera un losange pendant toute la durée du mouvement de l'instrument, et ses deux diagonales AP, $N'\pi$ resteront, en vertu d'une propriété déjà mentionnée (n° 3), constamment perpendiculaires entre elles. Désignons respectivement par θ, θ_1 les angles $PA\pi$, $P_1A\pi$ que les deux bras ρ, ρ_1 font avec la droite fixe $A\pi$, par μ, ν les angles PAN, P_1AN que ces bras font avec le côté AN, et par α, β les angles opposés AN'P, ANP du quadrilatère ANPN'; on aura, dans une position quelconque de l'appareil,

$$\theta_1 = \theta + \nu - \mu, \quad \theta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

et, par conséquent,

$$\theta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \nu - \mu.$$

D'autre part les deux quadrilatères ANPN', $M'PNP_1$ étant constamment semblables, les triangles isoscèles ANP, ANP_1 donnent respectivement

$$\mu = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \nu = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

On aura donc

$$\theta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

c'est-à-dire que le rayon vecteur ρ_1 du point P_1 demeure constamment perpendiculaire à la droite fixe $A\pi$; le point P_1 décrit donc une droite AP_1 perpendiculaire à $A\pi$ ou à la droite N'P et passant par le point fixe A.

APPENDICE.

8. Pour donner une énumération complète de tous les types de systèmes articulés qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, il ne reste à ajouter à ce qui vient d'être dit sur les systèmes à six tiges que la description d'un petit nombre de systèmes à huit et à quatre tiges.

Systèmes a huit tiges.

I. *Protracteur de M. Peaucellier* (*). — Considérons un inverseur ordinaire à six tiges de M. Peaucellier, et joignons son deuxième pôle P_1 par une septième tige avec un point π situé de manière que $\pi P_1 = \pi A$ (*fig.* 22).

Fig. 22.

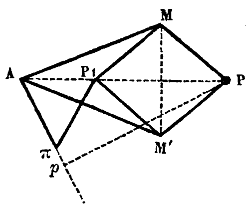
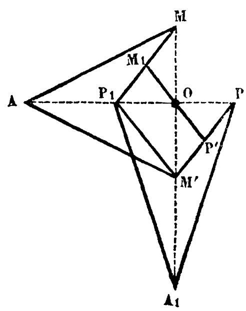


Fig. 23.



Si, outre le point A, on fixe dans ce système le point π, le pôle P_1 se déplacera suivant une circonférence passant par A et, d'après les propriétés connues de l'inverseur, le pôle P décrira une droite Pp perpendiculaire à la

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, année 1873.

ligne des centres $A\pi$; par conséquent, si l'on relie les deux points fixes, A, π par une nouvelle tige, et si l'on imagine une barre rigide liée invariablement au point p à cette huitième tige $A\pi$ suffisamment prolongée, perpendiculairement à la tige $A\pi$, cette barre sera pendant le mouvement de l'appareil constamment dirigée vers le point P. En rendant maintenant aux points A et π leur mobilité et en fixant le point P, on obtient un appareil à huit tiges qui jouit de cette propriété que, lorsque l'un des points de la barre liée d'une manière invariable en p, perpendiculairement à $A\pi$, décrit une courbe donnée $\rho = f(\theta)$, tout autre point de cette barre décrira une seconde courbe $\rho \pm c = f(\theta)$, que l'on obtient de la première, en augmentant ou en diminuant tous ses rayons vecteurs d'une quantité constante c, et qui constitue ce que l'on peut nommer la *protraction* ou la *rétraction* radiale de la courbe proposée. Ainsi, si un premier point de la barre décrivait une droite ou un cercle, un second point décrirait respectivement une conchoïde ordinaire ou un limaçon de Pascal, etc.

II. *Sytèmes à huit tiges de M. Sylvester* (*). — Dans un inverseur ordinaire à six tiges, substituons à la tige PM (*fig.* 23) une tige égale et parallèle M_1P', passant par le point d'intersection O des diagonales du losange; articulons aux points P_1, P deux nouvelles tiges A_1P, A_1P_1 réunies par une articulation en un point A_1 de la diagonale MM′ prolongée, et fixons le point O. En prenant pour bras les longueurs $OA = \rho$, $OA_1 = \rho_1$, ce système à huit tiges établira entre ces bras la relation

$$\rho^2 + \rho_1^2 = \text{const.}$$

En effet, les deux droites AO, A_1O restant constamment

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 498.

perpendiculaires entre elles pendant le mouvement, on aura, dans chaque position de l'appareil,

$$\rho^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MO}^2,$$

$$\rho_1^2 = \overline{A_1P_1}^2 - \overline{P_1O}^2 = \overline{A_1P_1}^2 - \left(\overline{P_1M'}^2 - \overline{OM'}^2\right),$$

d'où

$$\rho^2 + \rho_1^2 = \overline{AM}^2 + \overline{A_1P_1}^2 - \overline{P_1M'}^2,$$

ou, en posant

$$AM = AM' = c, \quad P_1M = P_1M' = PM' = P'M_1 = m,$$
$$A_1P = A_1P_1 = \gamma,$$
$$\rho^2 + \rho_1^2 = c^2 + \gamma^2 - m^2 = \text{const.}$$

On voit donc que cet appareil peut servir à la transformation de $\sqrt{k - x^2}$ en x, k étant une constante; en outre, M. Sylvester l'a employé pour la description de l'inverse d'une conique par rapport au centre de cette conique, et, en le combinant convenablement avec un inverseur à six tiges, pour la construction d'un conicographe d'un même nombre de tiges que celui de M. Peaucellier, mais pratiquement plus avantageux (*).

Remarquons qu'en choisissant dans ce système à huit tiges les paramètres, de manière à satisfaire à la condition $c^2 + \gamma^2 - m^2 = 1$, l'appareil effectuera la transformation de $\sqrt{1 - x^2}$ en x ou de $\cos\theta$ en $\sin\theta$. Et, si M. Sylvester emploie, pour la transformation du cosinus en sinus, cinq éléments à six tiges (**), cela ne tient qu'à cette circonstance que, dans le système considéré à huit tiges, les deux bras ne sont pas comptés sur une même droite, comme dans tous les éléments à six tiges, mais sur deux droites perpendiculaires entre elles, ce qui of-

(*) Voir *Revue scientifique*, tome cité, p. 498.

(**) *Ibid.*, p. 496.

frirait un grand inconvénient toutes les fois que l'on a à construire des combinaisons de plusieurs systèmes, comme cela a lieu dans les questions considérées par M. Sylvester.

Systèmes a quatre tiges.

I. *Système de M. Roberts* (*). — Soit CDD_1C_1 (*fig.* 24) un quadrilatère articulé formé de quatre tiges, et tel que les côtés *adjacents* soient égaux deux à deux, c'est-à-dire que $CC_1 = CD = a$, $D_1D = D_1C_1 = b$. Si l'on fixe les deux sommets C, C_1 ou la tige CC_1, chaque point de la tige DD_1 et du plan emporté par cette tige décrit une inverse de conique. La démonstration de cette propriété, due à M. Roberts, ne pourrait pas trouver place ici (**).

On voit donc que le système de M. Roberts offre un moyen de décrire une inverse de conique au moyen de trois tiges seulement. De plus, M. Mannheim a trouvé cette propriété aussi curieuse qu'élégante, que le déplacement de la tige DD_1, dans ce système, peut s'obtenir par le roulement d'un ovale de Descartes dans un ovale de Descartes.

II. *Système de M. Hart* (***). — Imaginons de nouveau un quadrilatère articulé CD_1DC_1, mais tel que les côtés *opposés* soient égaux deux à deux, c'est-à-dire que $CC_1 = DD_1 = a$, $CD_1 = C_1D = b$; nous aurons devant nous ou un parallélogramme ou un trapèze isoscèle;

(*) Voir *Revue scientifique*, 4e année, 2e série, numéro du 2 janvier 1875, p. 640.

(**) Cette démonstration est indiquée dans le compte rendu de la communication faite par M. Sylvester dans la troisième session de l'Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Lille, 1874), inséré dans la *Revue scientifique*, numéro du 2 janvier 1875.

(***) *Ibid.*

considérons le dernier cas représenté sur la *fig.* 25. Si, dans ce système, on fixe les deux sommets C, C_1 ou la tige CC_1, chaque point de la tige DD_1 et du plan emporté par cette tige décrira une inverse de conique (*), ce qui fournit un second moyen de décrire ces inverses

Fig. 24.

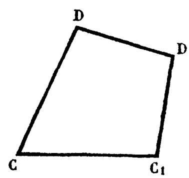
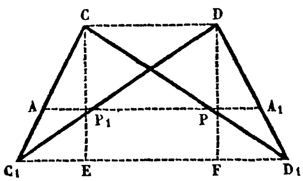


Fig. 25.



au moyen de trois tiges. La propriété analogue à celle qui a été trouvée par M. Mannheim pour le système de M. Roberts consiste ici en ce que le déplacement de la tige DD_1 s'obtient en faisant rouler une ellipse sur une ellipse égale ou une hyperbole sur une hyperbole égale; cette propriété est due à M. Clifford (**).

Si, dans le système à quatre tiges de M. Hart, on fixe, au lieu des deux sommets C, C_1, un point quelconque A du côté CC_1, et que l'on prenne sur les tiges CD_1, C_1D deux points P, P_1 situés avec le point A sur une même droite parallèle aux diagonales CD, C_1D_1 du trapèze, les trois points A, P, P_1 resteront toujours en ligne droite, et le produit des longueurs AP, AP_1 restera constant pendant le mouvement de l'instrument. Ainsi le système considéré présente un inverseur qui diffère essentiellement de celui de M. Peaucellier, en ce qu'il ne compte plus que quatre tiges au lieu de six. Pour démontrer la propriété

(*) On trouvera la démonstration de cette propriété dans le compte rendu cité de la communication de M. Sylvester.

(**) *Ibid.*

énoncée, posons $AP = \rho$, $AP_1 = \rho_1$, $AC_1 = a_1$, $AC = a_2$, $CD = \alpha$, $C_1D_1 = \beta$; la similitude des triangles CC_1D_1, CAP et C_1CD, C_1AP_1, similitude qui se conserve pendant le mouvement, donne les deux proportions

$$\rho : \beta = a_2 : a,$$
$$\rho_1 : \alpha = a_1 : a,$$

d'où

$$\rho\rho_1 = \frac{a_1 a_2}{a^2}\alpha\beta.$$

D'autre part, il est aisé de voir que le produit $\alpha\beta$ des diagonales du trapèze reste constant pendant le mouvement. En effet, en nommant δ la commune grandeur des projections C_1E, D_1F des côtés CC_1, DD_1 sur la diagonale C_1D_1, on a

$$\alpha\beta = \alpha(\alpha + 2\delta).$$

Mais les triangles rectangles C_1FD, C_1EC donnent respectivement, en désignant par h la hauteur CE du trapèze,

$$(\alpha + \delta)^2 + h^2 = b^2,$$
$$\delta^2 + h^2 = a^2.$$

En retranchant la seconde de ces égalités de la première, il vient

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha = b^2 - a^2,$$

et, par conséquent,

$$\alpha\beta = b^2 - a^2 = \text{const.}$$

Si l'on porte maintenant cette valeur du produit $\alpha\beta$ dans l'expression trouvée plus haut pour le produit $\rho\rho_1$, on obtient

$$\rho\rho_1 = \frac{a_1 a_2}{a^2}(b^2 - a^2).$$

Les quantités a, b, a_1, a_2 étant invariables, on voit que le produit $\rho\rho_1$ reste constant pendant le mouvement. On pourrait démontrer d'une manière tout à fait analogue que, si l'on fixe un des trois points A_1, P_2, P au lieu du point A, les produits $A_1P.A_1P_1$, $P_1A_1.P_1A$, $PA.PA_1$ resteraient respectivement constants; l'appareil peut donc servir d'inverseur de quatre manières différentes.

D'après la propriété qui vient d'être démontrée, le point A étant fixe, si l'un des pôles P, P_1 décrit une circonférence passant par A, le second pôle décrira une droite. Le système de la *fig.* 25 donne donc la solution du problème de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne exact au moyen de cinq tiges seulement, en comptant la tige qui doit relier le pôle décrivant la circonférence au centre fixe de cette circonférence (*). Et, si l'on observe que, d'une part, tout système de tiges articulées servant à résoudre cette question doit être formé d'un nombre impair de tiges, et que, d'autre part, un système de trois tiges ne donne point de solution rigoureuse du problème, on voit que, parmi tous les systèmes imaginables de tiges articulées propres à résoudre rigoureusement la question de la transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne, celui de M. Hart est formé du plus petit nombre possible de tiges (**).

(*) Dans la quatrième session de l'Association française pour l'avancement des sciences (Congrès de Nantes, 1875), M. Bréguet fils a fait voir un très-beau modèle en cuivre de ce système à cinq tiges.

(**) Les divers systèmes à quatre, six et huit tiges, décrits dans ce travail, épuisent, je crois, le nombre total des *types* connus de systèmes articulés, c'est-à-dire des systèmes *simples* et essentiellement distincts qui ont été proposés; tous les autres systèmes connus n'en présentent que des combinaisons plus ou moins compliquées. C'est à cette seconde classe de systèmes combinés ou *multiples* qu'appartiennent, par exemple, les divers *conicographes* de MM. Peaucellier, Sylvester, Hart, etc., à quinze, treize, onze, neuf, sept tiges (combinaisons d'un système propre à décrire l'inverse d'une conique, comme le système de M. Sylvester à huit tiges, ceux de MM. Roberts, Hart, etc., avec un inverseur de

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. C. CHADU,
Professeur au lycée de Mont-de-Marsan.

Soient α, β, γ, δ *quatre points pris sur chacun des côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD; *soient* P, P' *les points d'intersection de la droite* $\alpha\gamma$ *avec chacun des plans* $BC\delta$, $AD\beta$. *Démontrer la relation*

$$\frac{A\alpha . B\beta . C\gamma . D\delta}{A\delta . B\alpha . C\beta . D\gamma} = \frac{P\alpha}{P\gamma} : \frac{P'\alpha}{P'\gamma}.$$

Plaçons en A un point matériel dont la masse A' soit prise arbitrairement et en B, C, D trois autres points matériels dont les masses B', C', D' soient telles que

α	soit le centre	de gravité de	A' et B',
β	»	»	B' et C',
γ	»	»	C' et D'.

M. Peaucellier ou de M. Hart); le *paradoxe cinématique* de M. Sylvester à soixante-treize tiges obligeant deux points non liés entre eux à rester à une distance invariable et servant à réaliser le mouvement d'un ou de plusieurs points suivant la ligne des centres (combinaison de huit inverseurs de M. Peaucellier et de cinq extracteurs binômes quadratiques); les systèmes de M. Sylvester à vingt-cinq tiges, pour produire un mouvement suivant une parallèle à la ligne des centres (combinaison de deux inverseurs de M. Peaucellier avec deux extracteurs binômes quadratiques), et à quarante-trois tiges pour produire un mouvement suivant une droite formant un angle donné avec la ligne des centres (combinaison de quatre inverseurs de M. Peaucellier, de deux extracteurs binômes quadratiques et d'un élément pantographique); les divers systèmes servant à l'extraction des racines, etc. Il est évident que la théorie de ces systèmes multiples ne présente aucune difficulté dès que l'on connaît les propriétés des systèmes simples qui les constituent.

Ces conditions entraînent les relations

$$(1)\qquad \frac{A\alpha}{B\alpha}=\frac{B'}{A'},\quad \frac{B\beta}{C\beta}=\frac{C'}{B'},\quad \frac{C\gamma}{D\gamma}=\frac{D'}{C'}.$$

Le centre de gravité du système A', B', C', D' sera sur la droite $\alpha\gamma$; d'ailleurs il est dans le plan βAD; il devra donc se trouver en P à l'intersection de la droite et du plan.

Par conséquent

$$\frac{P\alpha}{P\gamma}=\frac{D'+C'}{A'+B'}.$$

En tenant compte des relations (1), on aura

$$(2)\qquad \frac{P\alpha}{P\gamma}=\frac{A\alpha.B\beta\,(C\gamma+D\gamma)}{C\beta.D\gamma\,(A\alpha+B\alpha)}.$$

P' étant le point d'intersection de la droite $\alpha\gamma$ et du plan δBC, on aura de même

$$(3)\qquad \frac{P'\alpha}{P'\gamma}=\frac{A\delta.B\alpha(C\gamma+D\gamma)}{D\delta.C\gamma\,(A\alpha+B\alpha)}.$$

En divisant membre à membre les relations (2) et (3), on obtient l'égalité qui fait l'objet du théorème.

Si l'on suppose que les deux droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ soient dans un même plan, les deux points P et P' se confondent :

$$\frac{P\alpha}{P\gamma}:\frac{P'\alpha}{P'\gamma}=1,$$

et alors

$$\frac{A\alpha.B\beta.C\gamma.D\delta}{A\delta.B\alpha.C\beta.D\gamma}=1.$$

On trouve donc comme cas particulier le théorème suivant :

Quand un plan rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, il y forme huit segments, tels que le *produit de quatre d'entre eux, qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des quatre autres.*

La méthode que nous venons d'employer pour établir le théorème précédent est due à Jean Ceva, géomètre italien (*Aperçu historique*, p. 294).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1176

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 288),

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu des points de l'espace tels qu'une conique donnée se projette suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné sur le plan de la conique. (PELLET.)

On sait que, si deux coniques tracées sur une surface du second ordre se coupent, le carré de la demi-corde commune est égal au produit des segments qu'elle intercepte sur le diamètre de chaque conique passant par son milieu multiplié par le carré du rapport du demi-diamètre de la conique parallèle à la corde au demi-diamètre conjugué. Si les coniques ne se coupent pas, le théorème subsiste pour l'intersection de leurs plans et les diamètres conjugués à sa direction, en ce sens que les deux produits, qui étaient égaux au carré de la demi-corde commune, restent égaux entre eux.

Cela posé, soient O un point pris dans le plan d'une conique (C), MN sa polaire, O′ le point où elle est coupée par le diamètre AB de la conique qui passe par le point O. Prenons sur cette polaire, à partir de O′, deux longueurs O′M, O′N, telles que

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'N}^2 = O'A . O'B . \frac{b^2}{a^2},$$

$2a$ et $2b$ désignant le diamètre AB et son conjugué parallèle à MN.

Soit S le sommet d'un cône de projection. La projection du point O sera le centre de la courbe projection de (C), si l'on prend le plan du tableau parallèle au plan (S, MN), car le pôle d'une droite située à l'infini est au centre de la courbe. Pour que la courbe soit un cercle, il faut :

1° Que la droite MN ne rencontre pas le cône, et, par suite, que le point O soit à l'intérieur de la conique (C) ;

2° Que le plan (S, MN) coupe le cône suivant un cercle infiniment petit, et, comme MN sera la direction conjuguée de SO′, il faut que ces deux droites soient rectangulaires, et de plus, en vertu du théorème énoncé plus haut, on aura les relations

$$\overline{O'S}^2 = O'A . O'B \frac{b^2}{a^2} = \overline{O'M}^2,$$

$$O'S = O'M.$$

Le lieu du point S est donc la circonférence décrite du centre O′ avec un rayon $O'S = \frac{b}{a}\sqrt{O'A . O'B}$ dans le plan perpendiculaire à MN (*).

(*) *Voir* Poncelet, *Propriétés projectives des figures*, n° 110.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIV, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Correspondance.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XIV, 2e SÉRIE.)

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.