Concours d'agrégation (année 1871)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 318-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__318_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1871).

Question de Mécanique

(voir 2e série, t. X, p. 472);

PAR M. A. TOURRETTES.

Une tige homogène pesante, dont on néglige les dimensions transversales, est en mouvement dans un plan vertical. On donne pour une certaine époque sa vitesse de rotation et la position du centre instantané de rotation, qu'on supposera situé sur la direction même de la tige. En cet instant, la tige heurte par un de ses points, qui devient ainsi momentanément immobile, un *obstacle fixe. On propose de déterminer d'abord les effets du choc, puis le mouvement ultérieur de la tige.*

On examinera comment les effets du choc varient avec la position de l'obstacle fixe.

Soient G le centre de gravité de la tige; C le point qui reçoit le choc; O le centre instantané de rotation; x la distance GC; a la distance OG; Mk^2 le moment d'inertie autour du centre de gravité; ω, ω' les vitesses de rotation autour de G avant et après le choc; v, v' les vitesses de translation du centre de gravité avant et après le choc; enfin, soit R la force du choc.

Il s'agit de déterminer d'abord R, ω' et v'. Nous supposerons, en premier lieu, que la barre est dépourvue d'élasticité; puis nous étudierons le cas où elle serait douée d'une élasticité e.

La rotation autour du centre de gravité donne l'équation

$$\omega' - \omega = -\frac{Rx}{Mk^2}. \tag{1}$$

La translation du centre de gravité fournit

$$v' - v = -\frac{R}{M}; \tag{2}$$

d'ailleurs

$$v = a\omega. \tag{3}$$

Il faut encore une autre équation. Nous la trouverons en exprimant qu'au moment du choc le point C est immobile; or sa vitesse est $v' + \omega' x$; donc nous aurons

$$v' + \omega' x = 0. \tag{4}$$

Éliminant ω, v, v' entre ces équations, on trouve

$$R = Mk^2\omega \frac{x + a}{x^2 + k^2}; \tag{5}$$

puis, au moyen de (2) et de (4), il vient

$$(6) \qquad \omega' = \frac{\omega(k^2 - ax)}{x^2 + k^2},$$

$$(7) \qquad v' = -\frac{\omega x(k^2 - ax)}{x^2 + k^2}.$$

Ces trois équations déterminent les effets du choc. Je les discuterai un peu plus loin.

Connaissant ω' et v', il est facile d'avoir le mouvement ultérieur de la tige. Le centre de gravité G décrit une parabole, comme un point de masse M lancé avec la vitesse v' inclinée de α sur l'horizon. Cette parabole, si l'on prend l'origine au centre de gravité à l'instant du choc, a pour équation

$$y = x \tang \alpha - \frac{g}{2v'^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Pendant que le point G décrit la parabole, la barre tourne uniformément autour de ce point avec la vitesse ω'.

Si, à l'instant du choc, la barre est horizontale, le point G décrit une verticale, comme un point de masse M lancé de bas en haut avec la vitesse initiale v', pendant que la barre tourne uniformément autour du point G.

Examinons maintenant comment varient les effets du choc avec la position de l'obstacle fixe C. Prenons la dérivée de R par rapport à x

$$\frac{dR}{dx} = -Mk^2\omega \frac{x^2 + 2ax - k^2}{(x^2 + k^2)^2}.$$

Égalant à zéro le numérateur

$$x^2 + 2ax - k^2 = 0,$$

nous aurons les valeurs de x qui répondent au maximum ou au minimum de R ; ces valeurs sont

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + k^2} = \begin{cases} x', \\ x''. \end{cases}$$

On voit sans peine que la première valeur

$$x + a = \sqrt{a^2 + k^2}$$

répond à un maximum

$$R' = \frac{M k^2 \omega}{2(\sqrt{a^2 + k^2} - a)},$$

et la deuxième valeur

$$x + a = -\sqrt{a^2 + k^2}$$

à un minimum

$$R'' = -\frac{M k^2 \omega}{2(\sqrt{a^2 + k^2} + a)};$$

mais, si l'on ne considère que la valeur absolue de R'', on peut dire que les deux racines x', x'' correspondent à des valeurs maxima de R. Le point D, fourni par x', est un centre de percussion maximum de même sens que l'impulsion primitive R ; le point D′ correspondant à x'', et situé à gauche du centre instantané, est aussi un centre de percussion maximum, mais de sens contraire à l'impulsion primitive.

Si l'on appelle l la distance du centre de percussion ordinaire au point O, on sait que

$$\sqrt{a^2 + k^2} = \sqrt{al};$$

par suite

$$OD = \sqrt{al}, \quad OD' = -\sqrt{al}.$$

Ainsi OD est moyenne proportionnelle entre les distances du centre instantané de rotation au centre de gravité et au centre de percussion P. Le point D est entre G et P, et l'on peut remarquer que le segment DD′ est divisé harmoniquement par G et P, car

$$\overline{OD}^2 = OG.OP.$$

Si l'on substitue dans ω' et v' les valeurs de x qui correspondent au maximum, on trouve

$$\omega' = \tfrac{1}{2}\omega,$$

$$v'_1 = -\frac{\omega}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+k^2}\right), \quad v'_2 = \frac{\omega}{2}\left(a + \sqrt{a^2+k^2}\right).$$

Remarques. — Les valeurs de ω' et v' données par les formules (6) et (7) s'annulent pour $x = \frac{k^2}{a}$. Cette distance est celle du centre de percussion ordinaire P. On voit que, quand la barre rencontre l'obstacle fixe par ce point, les vitesses de rotation et de translation sont détruites. Si $x = 0$, c'est-à-dire si la barre frappe par son centre de gravité, $R = Ma\omega$, $\omega' = \omega$, $v' = 0$. La vitesse de translation seule est détruite, et la rotation est la même qu'avant le choc. Si l'on cherche la valeur de R pour $x = \frac{k^2}{a}$, on trouve $Ma\omega$. Ainsi la percussion est la même que quand le corps frappe par son centre de gravité.

Passons au cas d'une barre élastique. Soit e le coefficient d'élasticité.

La percussion totale est plus grande que dans le cas d'une élasticité nulle dans le rapport de $1+e$ à 1. Nous aurons donc

$$R_e = Mk^2\omega(1+e)\frac{x+a}{x^2+k^2},$$

$$\omega'_e = -\frac{\omega[ex^2 + a(1+e)x - k^2]}{x^2+k^2},$$

$$v'_e = \frac{\omega x[ex^2 + a(1+e)x - k^2]}{x^2+k^2}.$$

Si l'on cherche les valeurs de x qui rendent R_e maximum, on trouve les mêmes résultats qu'au cas de l'élasticité nulle. Ces valeurs de x, substituées dans ω'_e, v'_e, donneraient les vitesses de rotation et de translation correspondantes, et le problème se poursuivrait sans difficulté.