Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 428-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__428_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1144
(voir 2e série, t. XIII, p. 112),

Par M. MORET-BLANC.

Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés. Les deux premiers ont la forme

$$(6\mu \pm 1)^2,$$

et le troisième la forme

$$4(6\mu \pm 1)^2.$$

(Catalan.)

Il y a deux cas à considérer :

1° Si le carré donné est premier avec 3, il est de la forme $(6\mu \pm 1)^2$, et l'on a identiquement

$$6(6\mu \pm 1)^2 = (6\mu \pm 1)^2 + (6\mu \pm 1)^2 + 4(6\mu \pm 1)^2.$$

2° Le carré donné est multiple de 3. Le sextuple de ce carré étant de la forme $8m + 6$, on peut le décomposer en trois carrés premiers entre eux (Legendre, *Théorie des nombres*, nos 319 et 320, éd. de 1830), deux carrés impairs, et le troisième quadruple d'un carré impair. Deux de ces carrés étant nécessairement premiers avec 3, il en est de même du troisième. Ils seront donc de la forme

$$(6\mu \pm 1)^2, \quad (6\mu \pm 1)^2, \quad 4(6\mu \pm 1)^2.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. C. Chabanel.

Question 1160

(voir 2e série, t. XIV, p. 96);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, on les coupe par une de leurs sphères orthogonales, et l'on prend les circonférences obtenues comme bases d'autant de cônes ayant pour sommet commun un point de l'axe radical. Chacun de ces cônes coupe la sphère correspondante suivant une deuxième circonférence : toutes ces circonférences sont sur une même sphère orthogonale aux sphères données. Réciproque. (G. Fouret.)

Soient M et N les points d'intersection, réels ou imaginaires, de l'axe radical et des sphères données; C le centre de la sphère orthogonale et S le sommet commun des cônes.

Par l'axe radical, faisons passer un plan quelconque; il coupe les sphères données suivant des circonférences ayant le même axe radical, la sphère orthogonale suivant une circonférence orthogonale aux premières, chaque cône suivant deux génératrices et les cercles, intersection de ce cône avec la sphère correspondante, suivant deux cordes AB, A′B′ de la circonférence intersection de la sphère et du plan, dont l'une, AB, est la corde d'intersection de cette circonférence et de la circonférence orthogonale. Il faut démontrer que les tangentes menées par A′B′ à la circonférence ABB′A′ vont concourir en un point de l'axe radical qui reste le même quelle que soit la circonférence considérée.

Le point de concours des cordes AB, A′B′ appartient à la polaire du point C et à la polaire de S; c'est donc le pôle de l'axe radical par rapport à la circonférence ABB′A′. Il en résulte que le point de concours C′ des tangentes menées par A′ et B′ à cette circonférence, pôle de A′B′, est sur l'axe radical. Il faut démontrer que ce point est le même pour toutes les circonférences.

Toutes les cordes AB rencontrent l'axe radical en un même point D, conjugué harmonique du point C par rapport à MN. Soit D′ le point où A′B′ coupe l'axe radical.

On sait que, si un quadrilatère est inscrit dans une conique et que l'on mène une transversale, elle rencontre les côtés opposés et la conique en trois couples de points qui forment une involution (théorème de Désargues).

Les points S, M, N, D, D′ forment donc une involution dont S est un point double; or les points S, M, N, D sont fixes; donc il en est de même du sixième point D′, et par suite du point C′, conjugué harmonique de D′ par rapport à MN. Le théorème est donc démontré. Le point C est le centre d'une seconde sphère orthogonale sur laquelle sont situées les circonférences, secondes intersections des cônes et des sphères proposées.

Réciproquement, si l'on donne C et C′, ce qui détermine D et D′, le point S sera l'un des points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points M, N, D, D′. Donc :

Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, si on les coupe par deux sphères orthogonales, par les intersections de ces deux sphères avec chacune des sphères données, on pourra faire passer deux cônes, et tous ces cônes auront leurs sommets en deux mêmes points situés sur l'axe radical.

Note. — MM. Brocard et Calinon démontrent de même, par la Géométrie élémentaire, la proposition énoncée; MM. Launoy, Astor et Chadu en donnent une démonstration analytique; M. Bourguet indique, d'une manière abrégée, la démonstration de la première partie seulement.